目　　录

（下　册）

第五章　作图……………………………………（1）

习题二十五……………………………………（1）

习题二十六……………………………………（12）

习题二十七……………………………………（20）

习题二十八……………………………………（32）

习题二十九……………………………………（41）

习题三十……………………………………（47）

习题三十一……………………………………（56）

习题三十二……………………………………（66）

复习题五……………………………………（72）

总复习题……………………………………（101）

附录

名词索引……………………………………（305）

第五章　作　图

习 题 二 十 五

3．自定圆外一已知点 P 求作割线交定圆于 A、B，使 $PA=AB$。

解：设$\odot O(r)$为定圆，取 PO 中点为O_1，作$\odot O_1(r/2)$交$\odot O(r)$于 A，连 PA 交$\odot O(r)$于B，则割线 PAB 为所求。

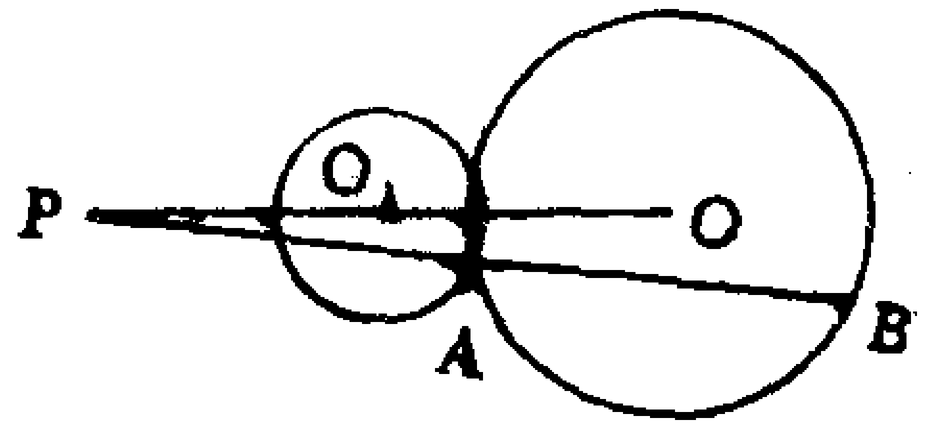


图25—3

4．在已知直线上求一点，自它向一定圆引切线，使两切点的距离等于定长。

解：设定直线l，定圆$\odot O(r)$、定长d，作$\odot O\left(\frac{r_2}{\sqrt{r_2-(d/2)^2}}\right)$、交$l$于$P$，则$P$为所求。

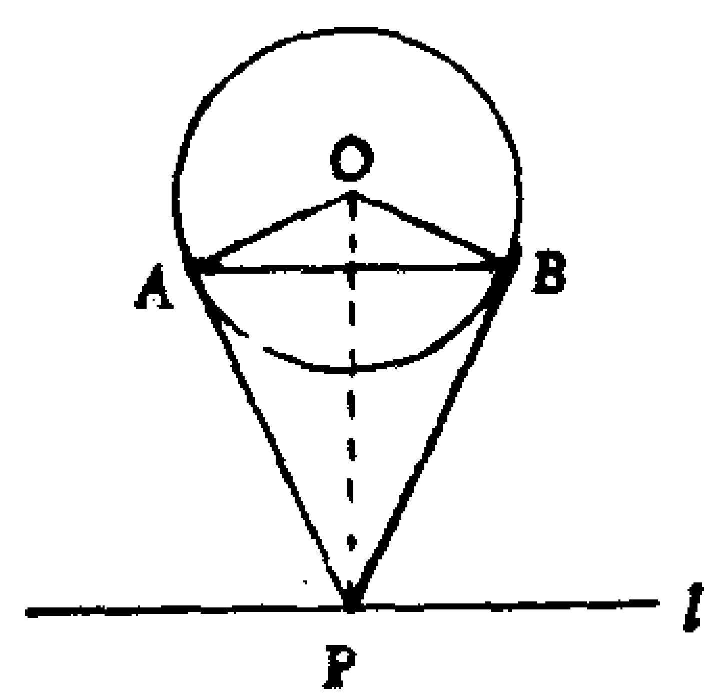


图25—4

5．在已知直线上求一点，使它对两个定圆的视角相等。

解：设定直线 l、两定圆$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$，作与$\odot O_1(r_1)$与$\odot O_2(r_2)$的相似圆(习题二十一第15题)交l于P，则P点为所求。

6．设A是定直线a上的定点，B是线外的定点。在a上求一点P，使$PA+PB$等于定长。

解：设定长为s，在a上取一点B'，使$AB'=s$，作BB'中垂线交a于P，则P为所求。

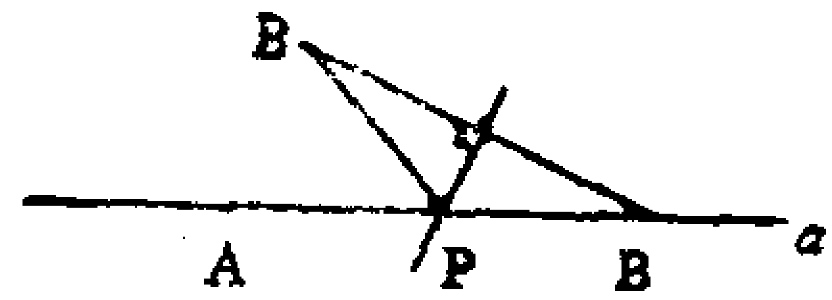


图25—6

7．在已知三角形一边上求一点，使它至其它两边的距离和等于定长。

解：设定$\triangle ABC$及定长s，作与AB距离为s的平行线交AC于C'，在AB上取B'，使$AB'=AC'$，连$B'C'$交BC于P，则P为所求。

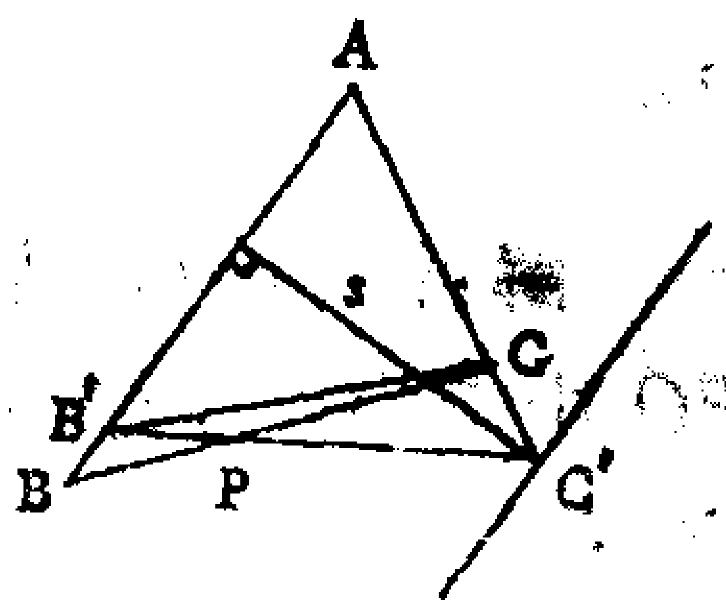


图25—7

8．在已知三角形一边上求一点，自它引其他两边的平行线，使与其他两边交成的平行四边形有一定的周长。

解：设定$\triangle ABC$及定长s，在AB、AC上各取一点E、F，使$AE=AF=s$，连EF交BC于P，则P为所求。

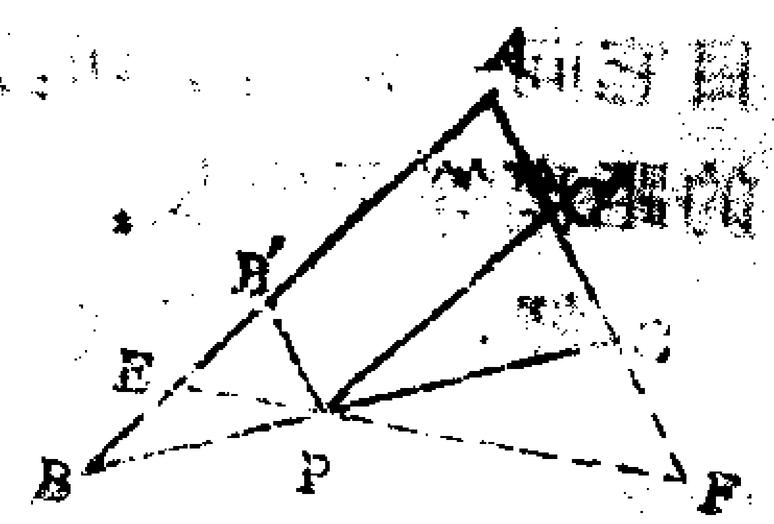


图25—8

9．在直角三角形的弦上求一点，自它引勾股的平行线，使与勾股交成的矩形合于下列条件之一：

(1)两邻边的差(绝对值)等于定长；

(2)两邻边的平方和等于常数。

解：(1)设定长s，在AB(或延长线)上取一点E，使$AE=s$，在AC延长线(或线段AC)上取一点F，使$AF=s$，连EF交BC于P，则P为所求。

(2)设常数为r^2，作$\odot A(r)$交于P，则P为所求。

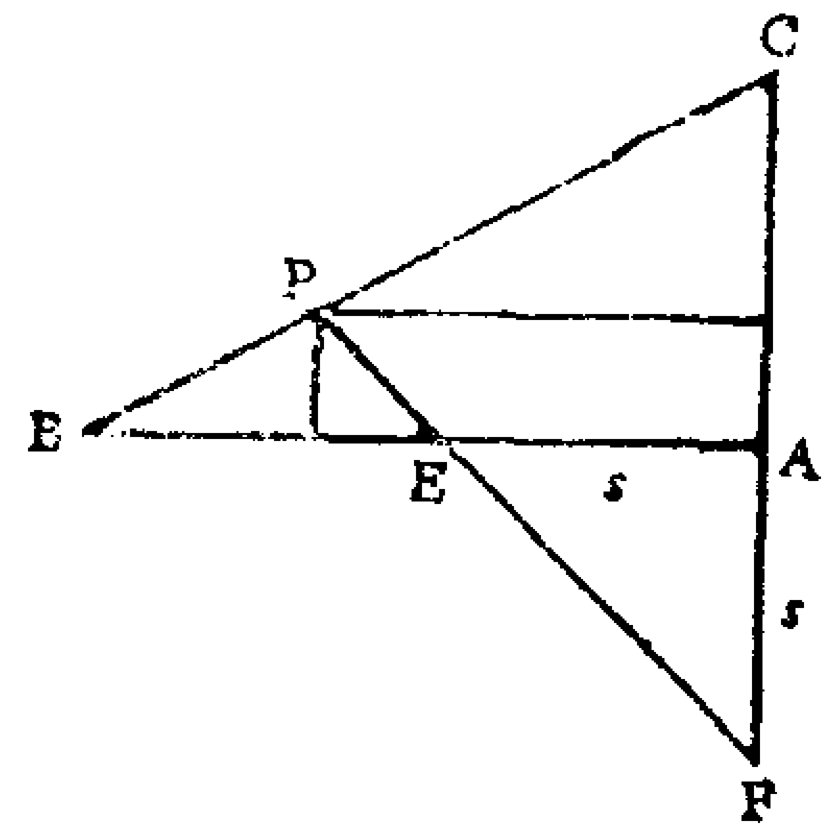


图 25—9

10. 设AB、CD是固定的两线段。在已知直线l上求一点P，使$\triangle PAB$与$\triangle PCD$等积。

解：设AB交CD于Q，作$l_1 \parallel AB$且相距CD，作$l_2 \parallel CD$且相距AB，设l_1交l_2于R，连QR交l于P，则P为所求。

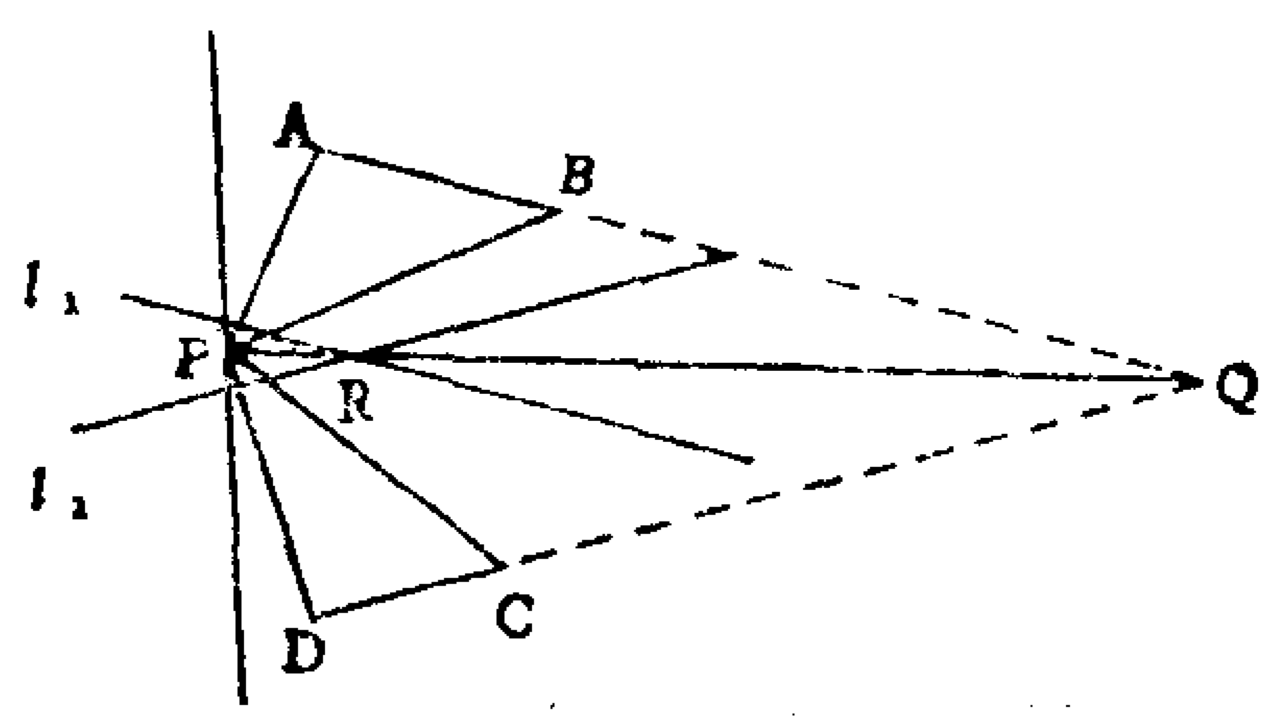


图25—10

11. 过三角形一边上某定点作两直线，要把三角形的面积三等分。

解：设P在$\triangle ABC$的BC边上，作BC边的三等分点E、F，过E作$EE_1 \parallel AP$交折线BAC于E_1过F作$FF_1 \parallel AP$交折线BAC于F_1，则直线PE_1、PF_1为所求。

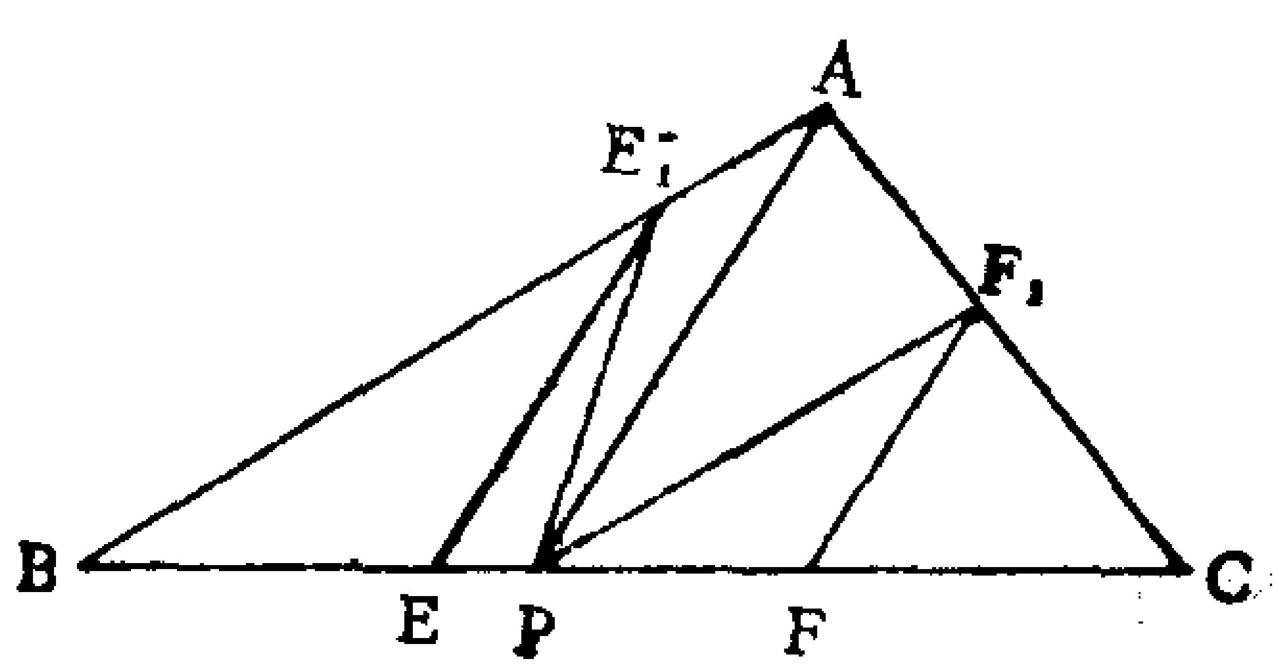


图25—11

12. 设P、Q是$\triangle ABC$的BC边上的两定点，先过P求作一直线把$\triangle ABC$划分为两块，再过Q求作一直线把含有Q的一块又划分为两块，使前后所得三块均等积。

解：作BC边的三等分点E_1、E_2，作$E_1F_1 \parallel AP$交折线BAC于F_1，若F_1在AC上，仿§67 例题86 作一直线QF_2将$\triangle PF_1C$面积等分，则PF_1、QF_2为所求直线。

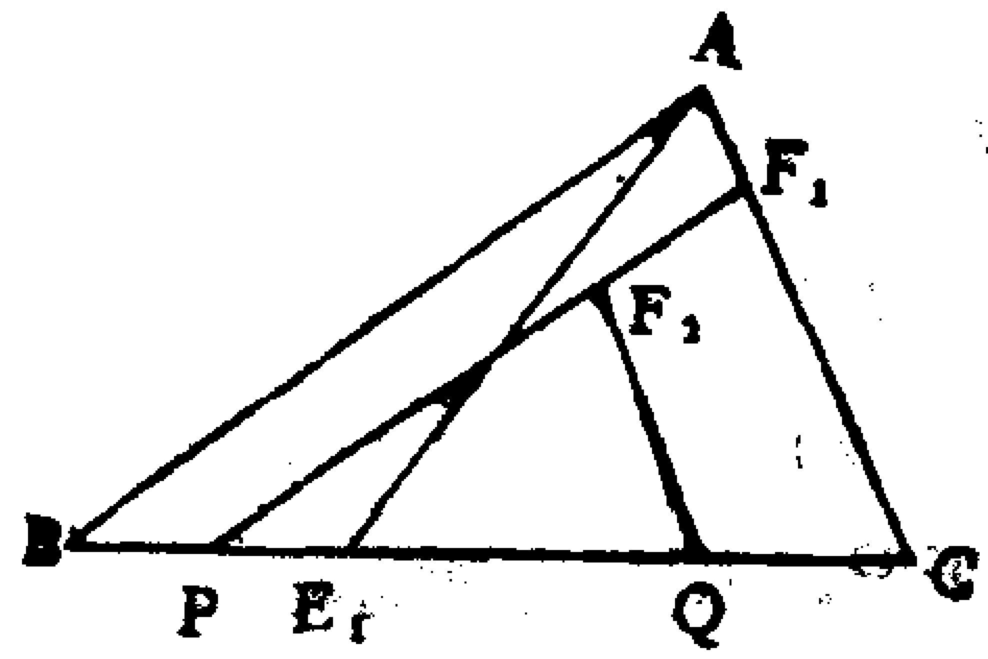


图25—12（a）

若F_1在AB上，QF_2作法如下：

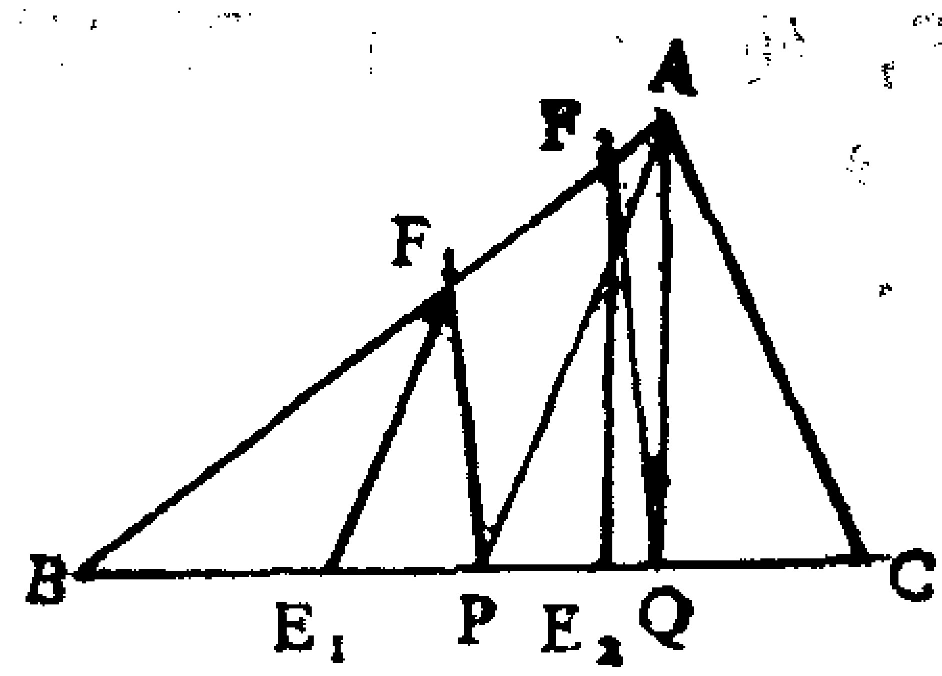


图25—12（b）

当$BP>PQ$，作$E_2F_2 \parallel AQ$交折线CAF_1于F_2；

当$BP<PQ$时，在PF_1上取一点F_2，使$PF_2=\dfrac{PB \cdot PF_1}{PQ}$。

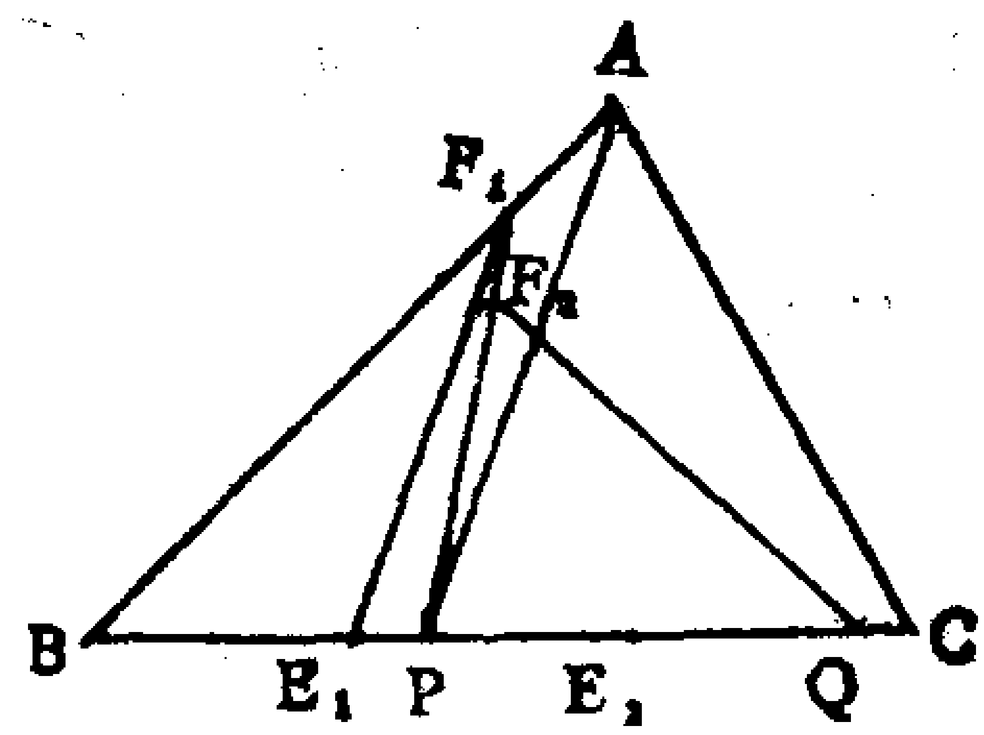


图25—12（c）

13. 在定圆中，求作内接三角形，使一边有定长，其它两边分别通过定圆内的两个已知点。

解：设P、Q是定圆$\odot O(r)$内二定点，a是定线段。

作$\triangle O_1B'C'$，使$O_1B'=O_1C'=r$，$B'C'=a$。

作O' 使$\triangle O'PQ\backsim\triangle O_1B'C'$（在$PQ$二侧各一点）作$\odot O'(O'P)$交$\odot O(r)$于$A$，延长$AP$、$AQ$交$\odot O(r)$于$B$、$C$，则$\triangle ABC$为所求。

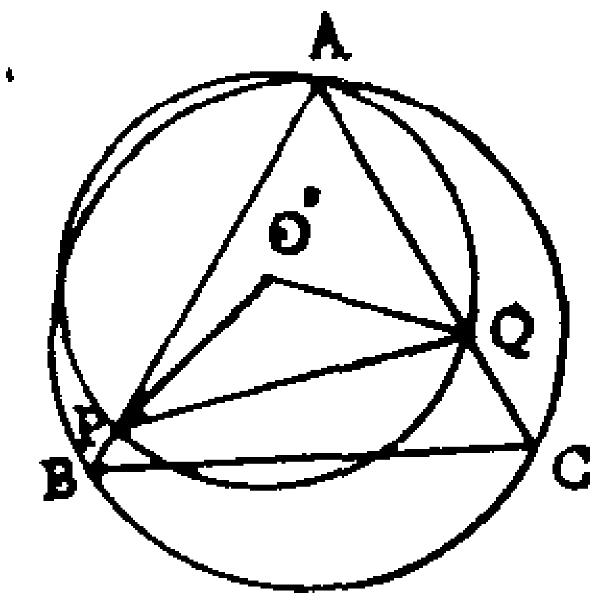


图25—13

14. 设l是通过定圆的中心O的定直线，A、B是这圆上的两定点且同在l的一侧。在定圆上求一点P，连PA、PB交l于M、N，使$OM=ON$。

解：由习题十第25题得知，作法如下：

设直线AB交l于Q，作QD切$\odot O$于D，连DO交$\odot O$于P，则P为所求。

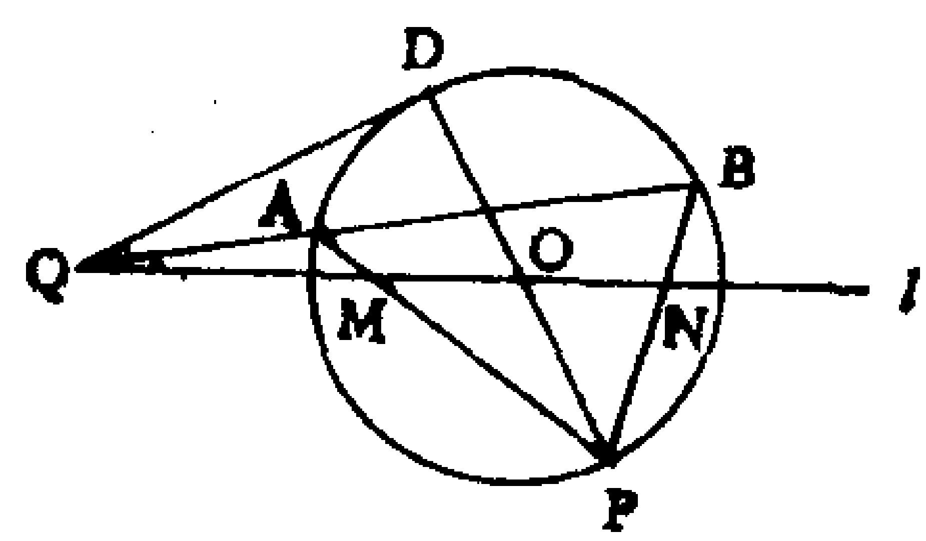


图25—14

15. 在一圆形撞球台上有两球恰位于一直径上，试问应循什么方向击其中一球使撞球台边反射后正好撞着另一球？

解：设P、Q为位于定圆$\odot O(r)$一直径的两定点，P球被击，显然OP方向为所求。

利用§57例题64，作P、Q之比为$OP:OQ$的阿氏圆，设此圆交$\odot O(r)$于A，则PA方向为所求。

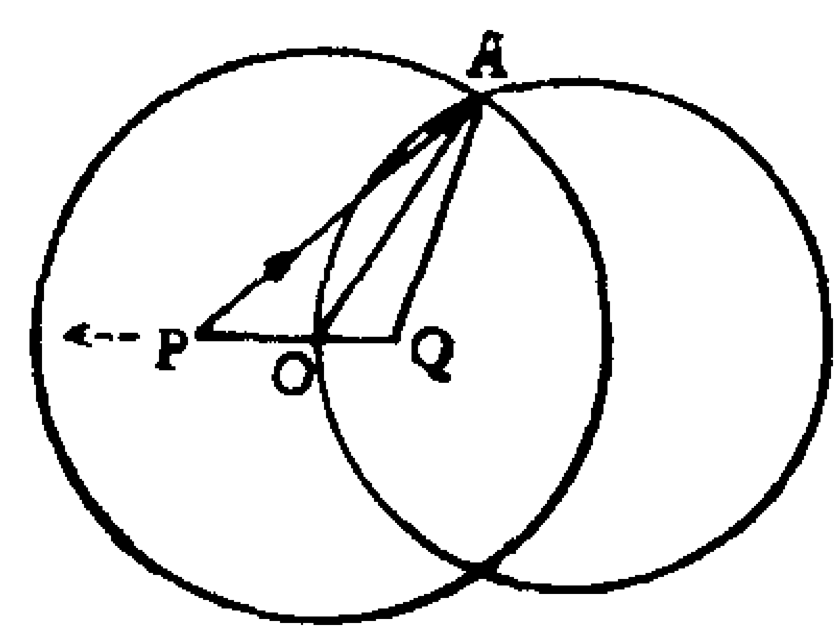


图25—15

16. 求作已知扇形的内切圆。

解：设OAB为已知扇

形，M为$\overset{\frown}{AB}$中点，作$MN\perp OB$于N，在OB延长线上取点C，使$BC=MN$，作$BZ\parallel CM$交OM于Z，作$ZD\perp OB$于D，则$\odot Z(ZD)$为所求。

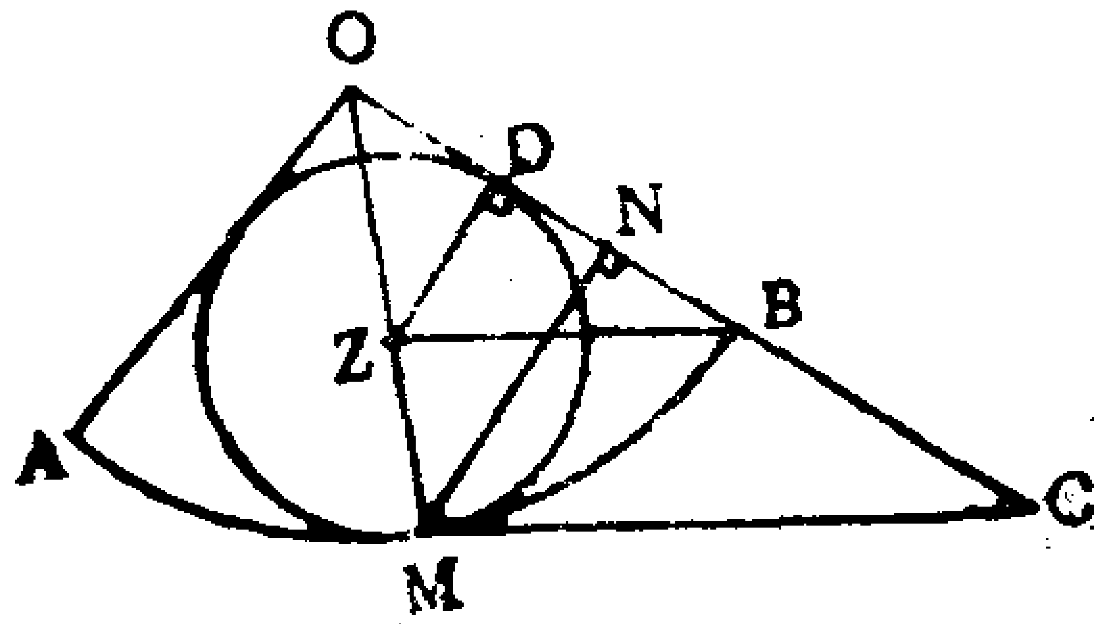


图25—16

17。已知一定圆及一定直线，求作一圆，令切定圆于定点，而且切于定直线。

解：设A为定圆$\odot O$上的定点，定直线l。作关于OA的对称线l'，作直线$a\perp OA$于A，过A作$\odot O'$，使切于三直线l、l'、a，则$\odot O'$为所求。

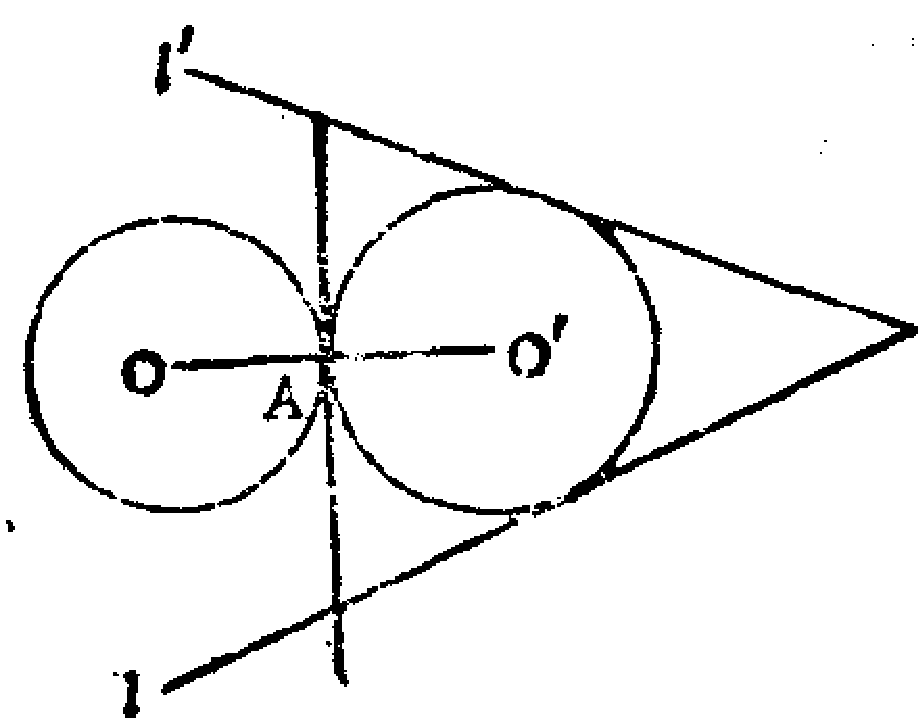


图25—17

18。求定一点，使对三已知圆的视角均相等。

解：利用习题二十一第16题即可。

19、一直线上有A、B、C、D四点排成{$ABCD$}的顺序，在线外求一点P，使$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD$。

解：利用§57例题64，在l上取点B'、C'，使$B'A:B'C=BA:BC$；$C'B:C'D=CB:CD$，分别以BB'、CC'为直

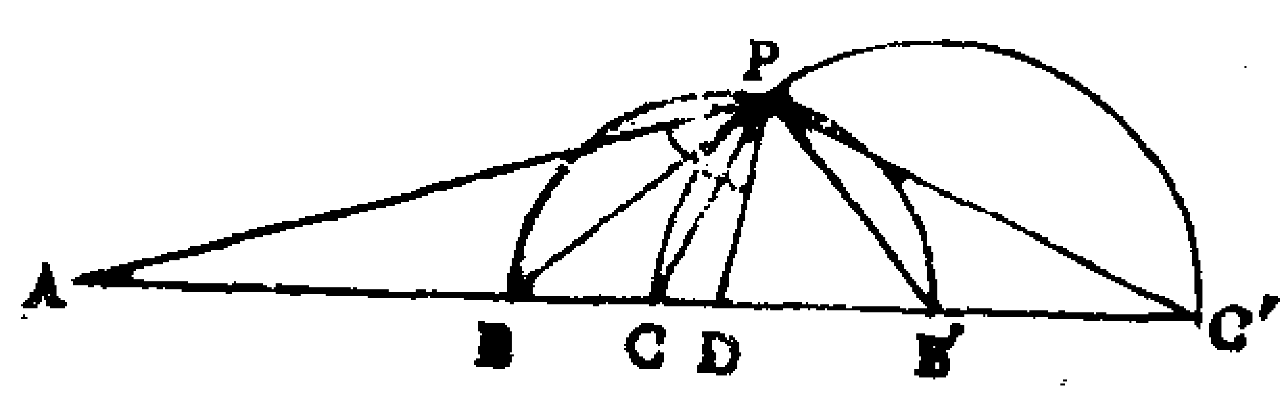


图25—19

径作圆，设它们交于P，则P为所求。

20. 已知$\triangle ABC$及三线段l、m、n，求一点P合于$PA:PB:PC=l:m:n$。

解：利用§57例题64，作A、B之比为$l:m$的阿氏圆，B、C之比为$m:n$的阿氏圆，设它们交于P，则P为所求。

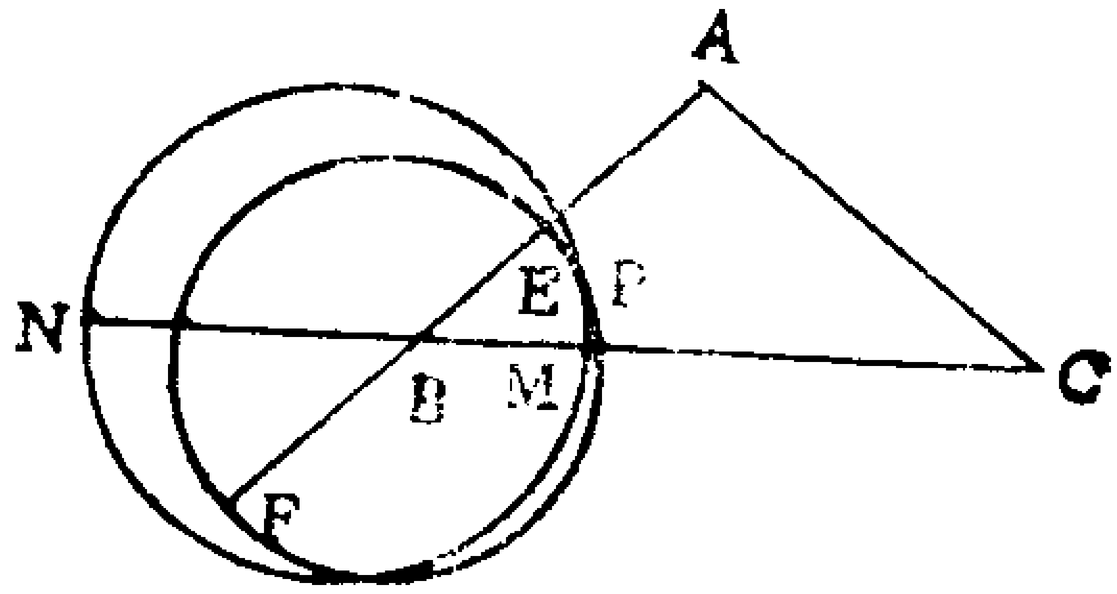


图25—20

21. 已知$\triangle ABC$，求一点S使合于$SA\cdot BC=SB\cdot CA=$
$=SC\cdot AB$。这样的S点叫做$\triangle ABC$的等力点。一般三角形都有两个等力点，惟正三角形只有一个这样的点。

解：利用§57的习题64，作A、B之比为$CA:BC$的阿氏圆，B、C之比为$AB:CA$的阿氏圆，设它们交于S，则S为所求。

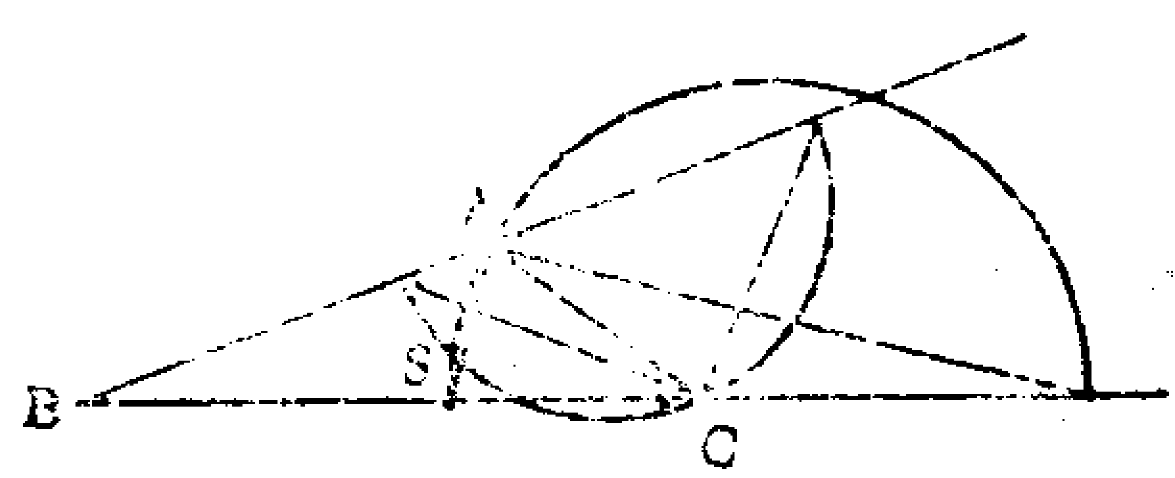


图25—21

22. 在$\triangle ABC$的BC边上求一点P，使AP是BP与CP的比例中项。

解：设O为$\triangle ABC$的外心，以OA为直径作圆交BC于P，则P为所求。

23. a、b是平行的两定直线，P是a上的定点，Q是a、b外的定点。求过Q作直线l交a、b于A、B，使$PA=PB$。

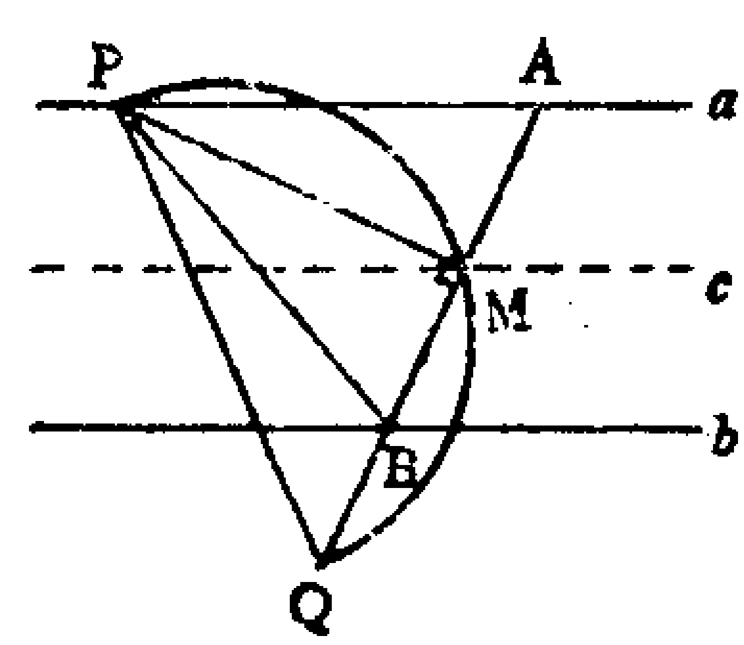


图25—23

解：以PQ为直径作圆交a、b的中线c于M，直线QM为所求。

24. 过定圆$\odot O$内一定点P作弦AB，使A、B至直线OP的距离差(绝对值)等于定长。

解：设定长d、作直线l使与OP相距d，作$\odot O(OP)$交l于Q，设PQ直线交$\odot O$于A、B，则弦AB为所求。

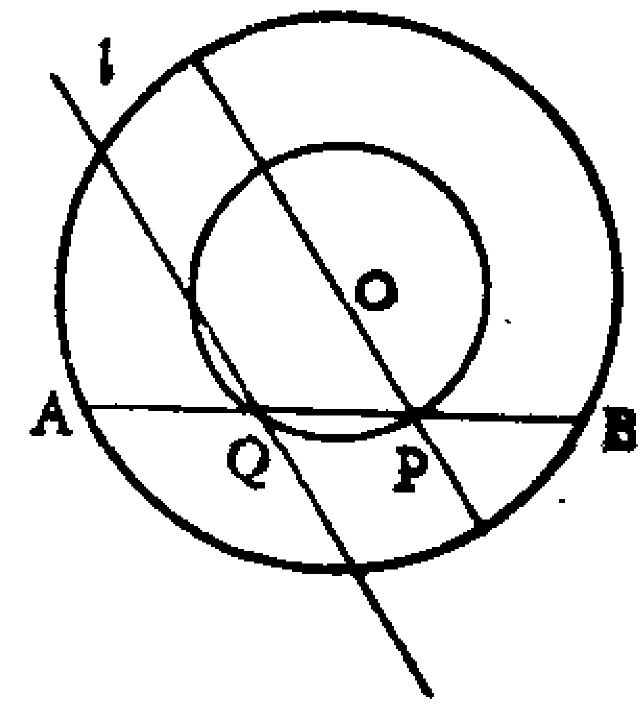


图25—24

25. 已知边长，求作菱形，使边长恰为两对角线的比例中项。

解：设定长AB，作直线l距AB为$AB/4$，以AB为直径作圆交l于O，延长AO至C使$OC=AO$，BO至D使$OD=BO$，则$ABCD$为所求菱形。

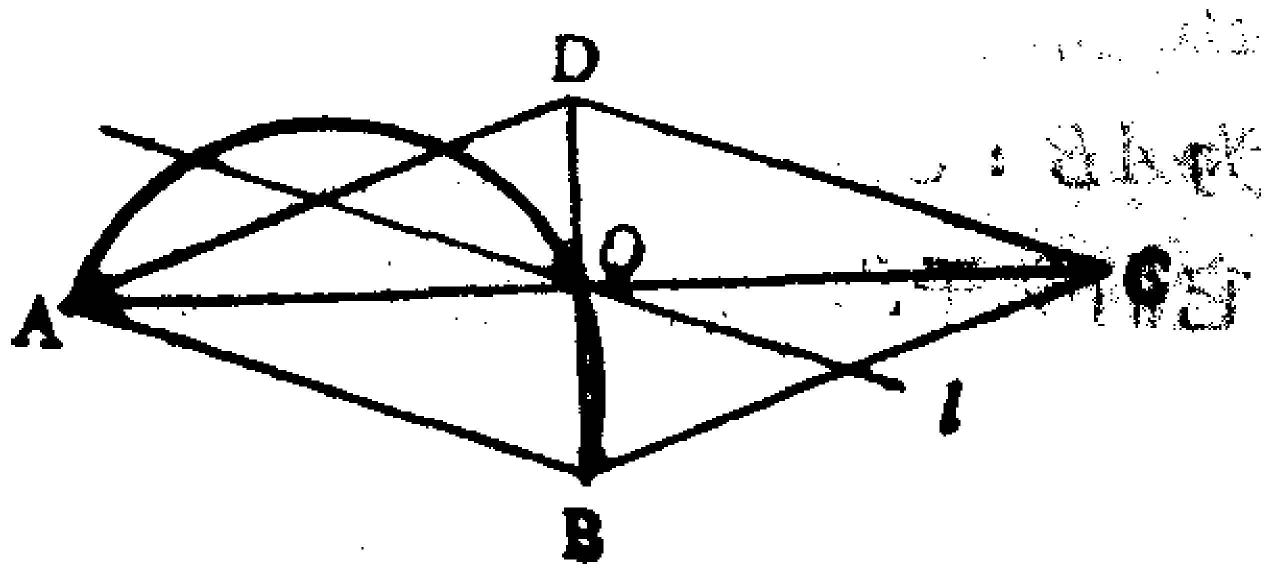


图25—25

26. 已知三边的长，求作四边形，使它同时有外接圆和内切圆。

解：设定长a、b、c，由§67例题88，作边长为a、b、c、$a+c-b$的四边形，使其有外接圆。

27. 在定圆中，求作定长的弦，使被一已知弦平分。

解：设定圆$\odot O$，定长为a，CD为定弦，任作$\odot O(r)$的

一弦$EF=a$，作$\odot O(r')$使切于EF，而交CD于M，作弦$AB\perp OM$ 于M，则AB为所求。

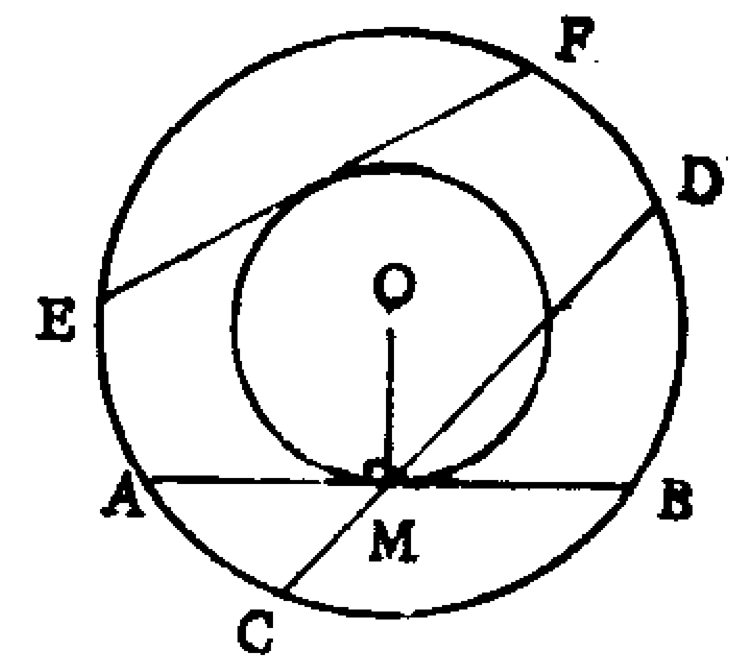


图25—27

28。已知两同心圆及一点P，求过P作一直线l交外圆于A、B，使自这两交点所作l的垂线恰好切于内圆。

解：设两定圆$\odot O(R)$、$\odot O(r)$，($R>r$)

任作$\odot O(R)$的一弦$CD=2r$、作$ON\perp CD$于N，作圆$\odot O(ON)$交以PO为直径的圆于M。则直线PM为所求。

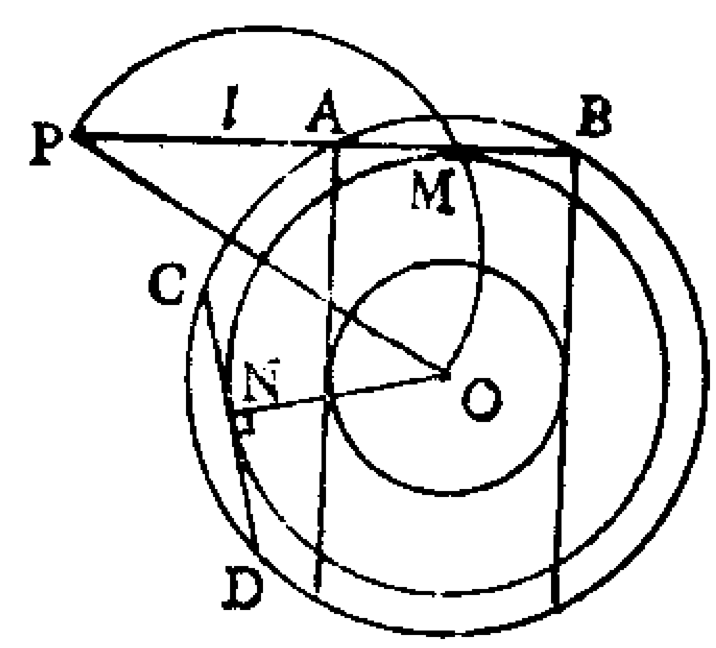


图25—28

29。以一固定线段为一边求作平行四边形，使这边的对边恰好是一定圆的弦。

解：设固定线段AB、定圆$\odot O$。

任作$\odot O$的一弦$EF=AB$，作$ON\perp EF$于N、作圆$\odot O(ON)$，作$OM\perp AB$于M。设$\odot O(ON)$交OM于G，作$\odot O$弦$CD\perp OM$于G，则$ABCD$为所求作的平行四边形。

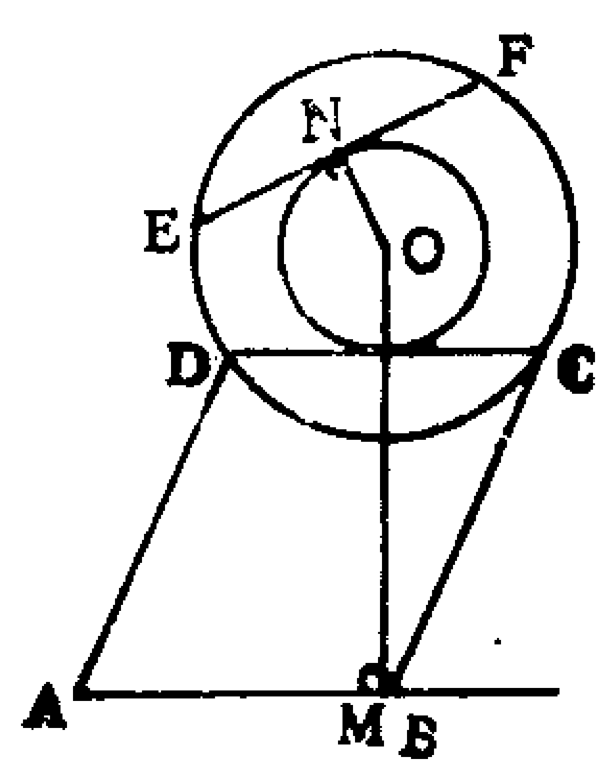


图25—29

30。在定圆中，求作内接三角形，使两边各等于定长，第三边(所在直线)通过一已知点。

解：设定圆⊙O，定点P，定长b、c。

在⊙O上任取一点A'，在⊙O上作二点B'、C'，使$A'C'=b$,$A'B'=c$，作$ON\perp B'C'$于N。作⊙$O(ON)$及以OP为直径的圆，设它们交于M,连PM交⊙O于B、C，在⊙O上取一点A，使$\angle CBA=$ $=\angle C'B'A'$，则$\triangle ABC$为所求。

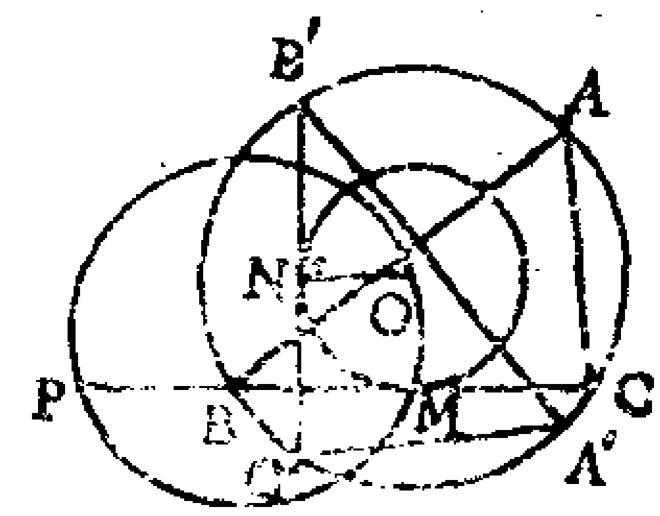


图25—30

31．已知一顶点的位置及三边的长，求作三角形，使定顶点的对边(所在直线)通过一定点。

解：设定点P、A及定长a、b、c。

作$\triangle A'B'C'$使$B'C'=a$，$C'A'=b$，$A'B'=c$，$A'D'\perp B'C'$于D'。作以PA为直径的圆，交⊙$A(A'B')$于D，在PD上取B、C，使$BD=B'D'$，$DC=D'C'$,则$\triangle ABC$为所求。

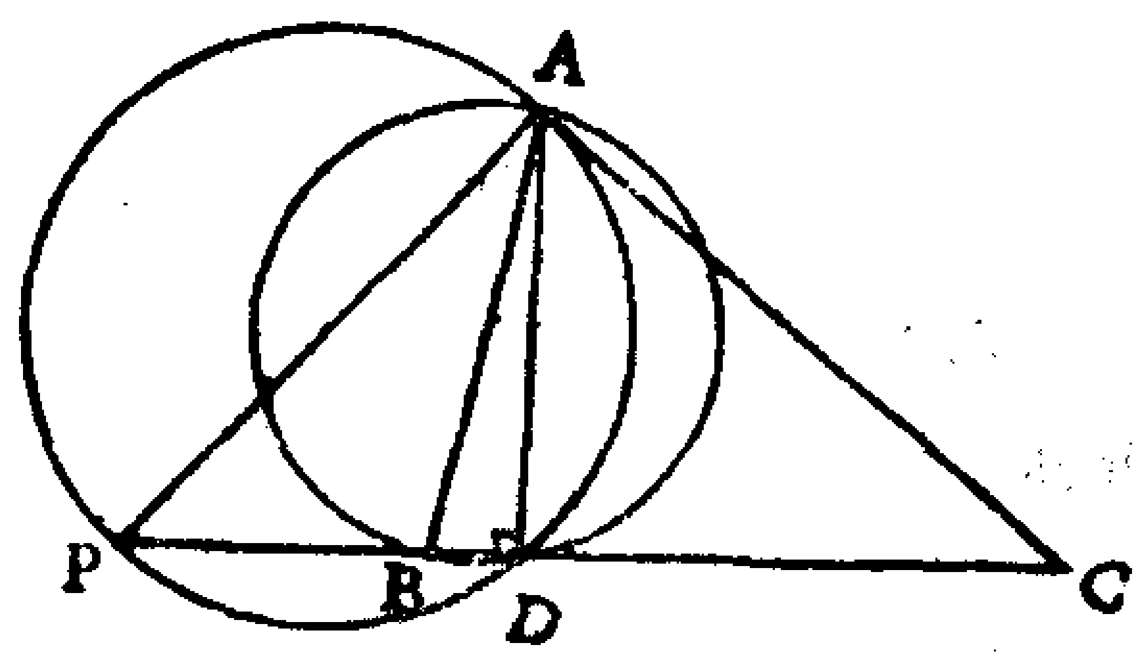


图25—31

32．已知周长、一角及这角的平分线，求作三角形。

解：设$\angle EAF$为定角，它的角平分线AT等于定长t，令$AE=AF=$ $=s/2$(半周长)，作⊙I切AE、AF于E、F，过T作直线切⊙I且交AE、AF于B、C。则$\triangle ABC$为所求。

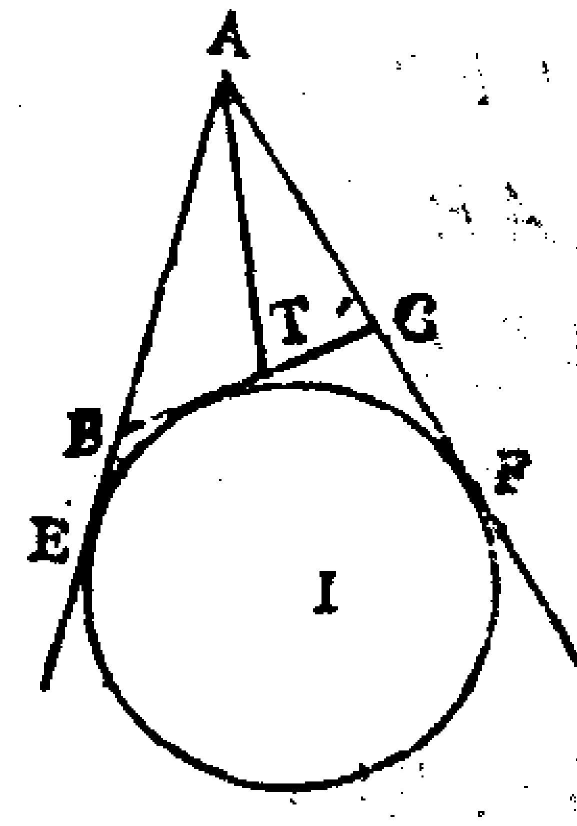


图25—32

33. 已知周长、一角、夹这角的两边之比，求作三角形。

解：设$\angle EAF$为定角，$AE=AF=s/2$(半周长).定长为$p:q$、在AE、AF上各取点B'、C'，使$AB'=p$ $AC'=q$。作$\odot I$切AE、AF于E、F，过I作$B'C'$的垂线交$\odot I$于D，过D作$\odot I$的切线交AE、AF于B、C，则$\triangle ABC$为所求。

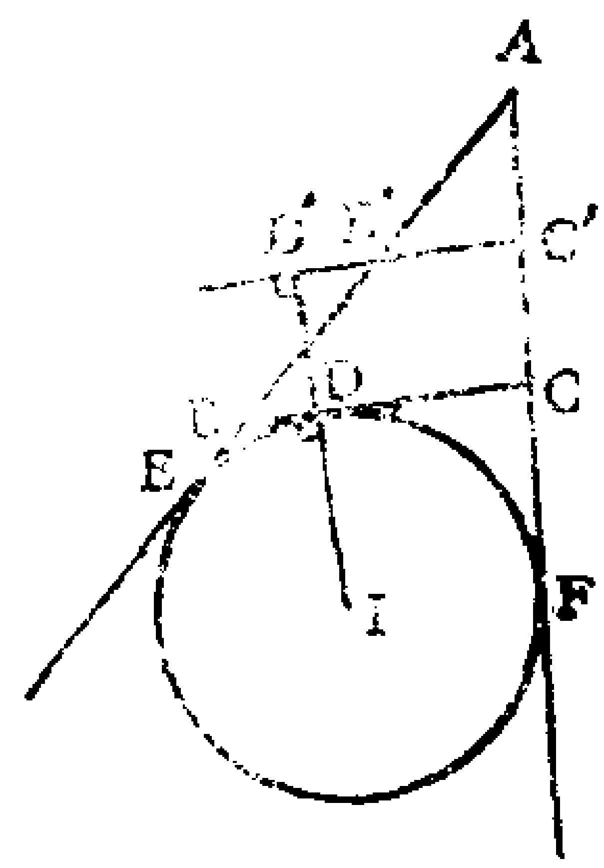


图25—33

34. 已知周长、一角及对边的高，求作三角形。

解：设$\angle EAF$为定角，定长h、$AE=AF=s/2$(半周长)，作$\odot I$使切AE、AF于E、F，作$\odot A(h)$与$\odot I$的公切线交AE、AF于B、C，则$\triangle ABC$为所求。

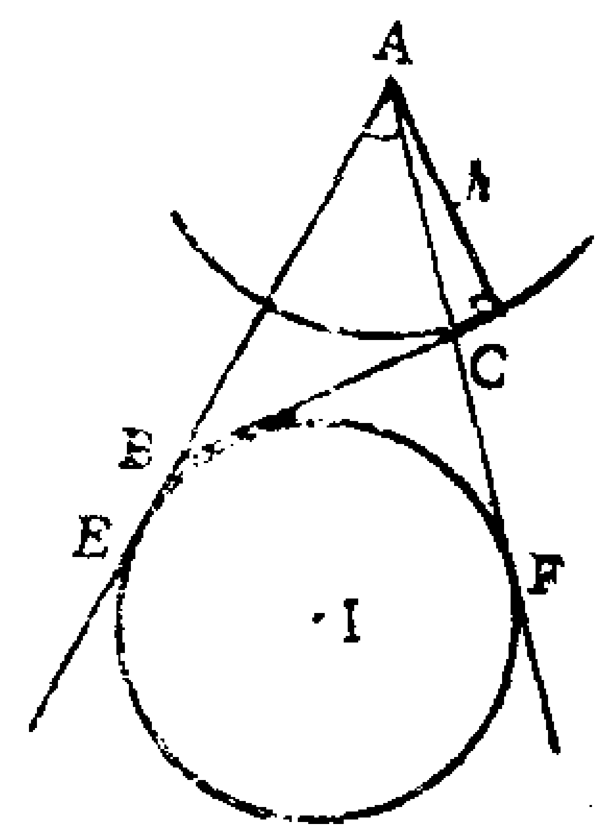


图25—34

35. 已知周长、一角、内切圆半径，求作三角形。

解：设定长r及定角$\angle EAF$，$AE=AF=s/2$(定半周)

作$\odot I_1$切AE、AF于E、F，如图作直线b、c距AC、AB都为r。设b、c交于I，作$\odot I$切AE、AF，作$\odot I_1$、$\odot I$的一内公切线交AE、AF于B、C，则$\triangle ABC$为所求。

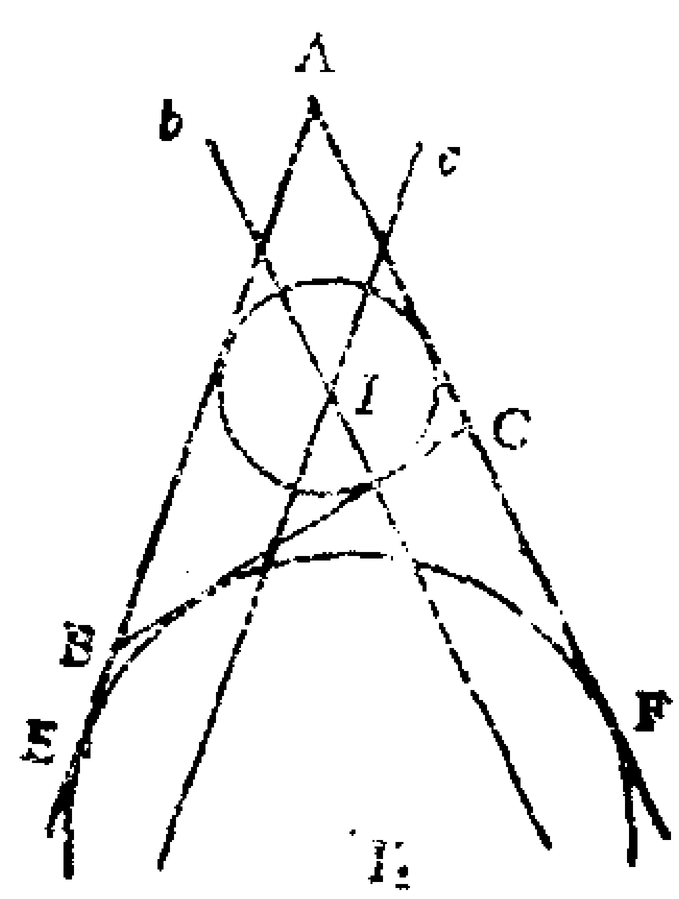


图25—35

36. 已知内切圆半径、一角及对边的高，求作三角形。

解：设定长r、h，定角$\angle EAF$。

作⊙I切于AE、AF且半径为r，作⊙$A(h)$与⊙I的外公切线交AE、AF于B、C，则$\triangle ABC$为所求。

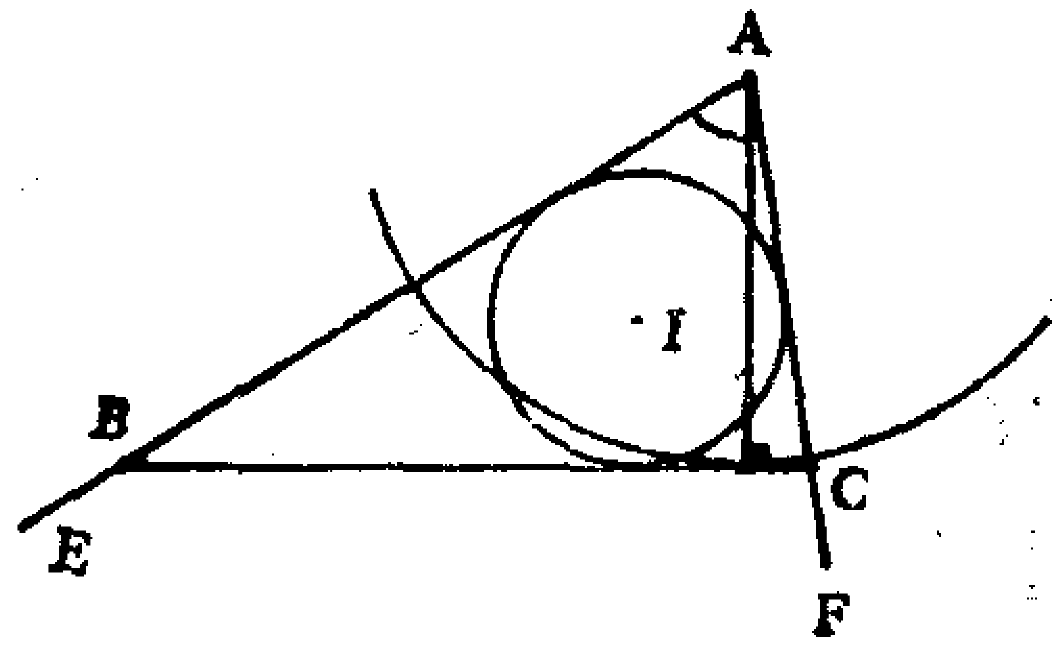


图25—36

习题二十六

2. 已知一底、一腰、高、中横线，求作梯形。

解：设定长a、b、h、m，作$\triangle EAD$，使$\angle AED=90°$，$AD=b$，$DE=h$，在直线AE上取点B，使$AB=a$。设M为AD中点，作$MN \parallel AB$且$MN=m$，延长BN至C，使$NC=BN$，则$ABCD$为所求。

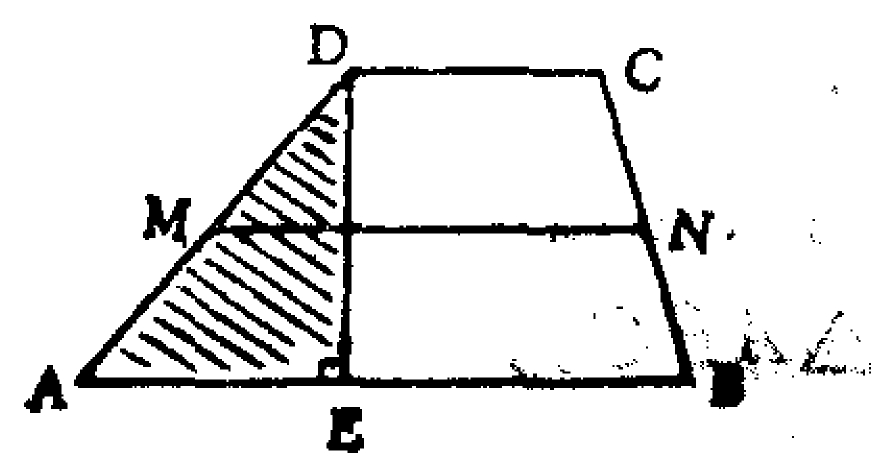


图26—2

3. 已知高及两对角线，求作平行四边形。

解：设定长h、e、f，作$\triangle EAO$使$\angle AEO=90°$，$AO=e/2$，$OE=h/2$，作$\triangle EOB$，使$\angle BEO=90°$，$OB=f/2$，延长AO至C，使$OC=AO$；BO至D使$OD=BO$，则$ABCD$为所求。

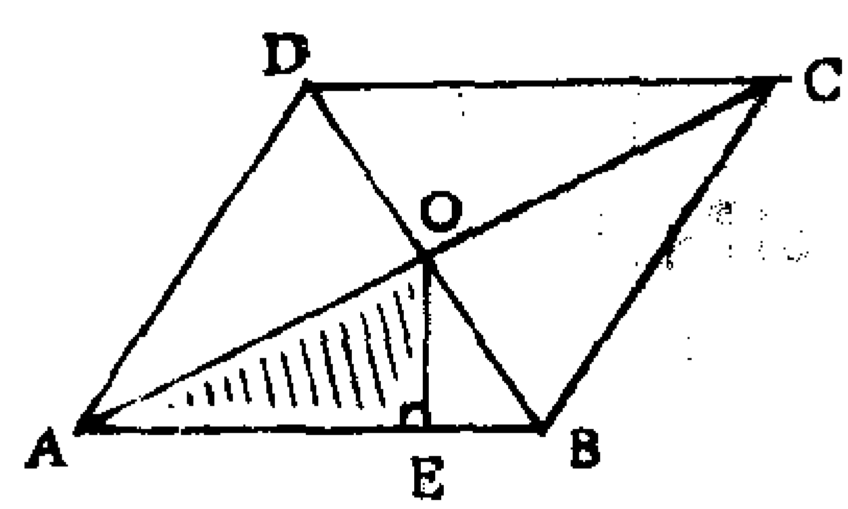


图26—3

4．已知腰的高及底边，求作等腰三角形。

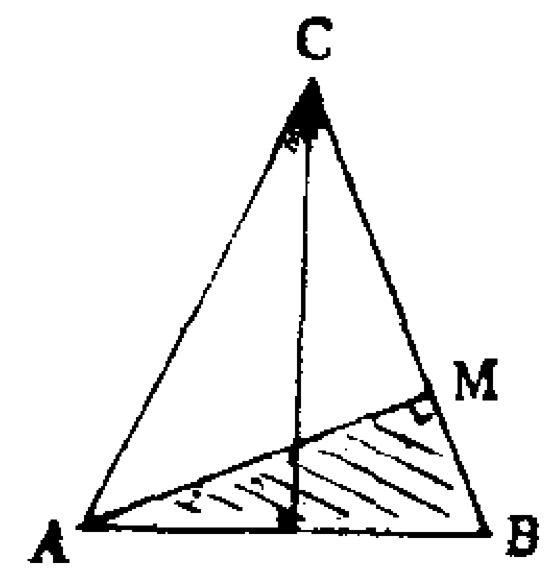


图26—4

解：设实长h、a，作$\triangle MAB$，使$AB=a$，$AM=h$，$\angle AMB=90°$，作AB中垂线，设交直线BM于C，则$\triangle ABC$为所求。

5．已知两边的中线及第三边，求作三角形。

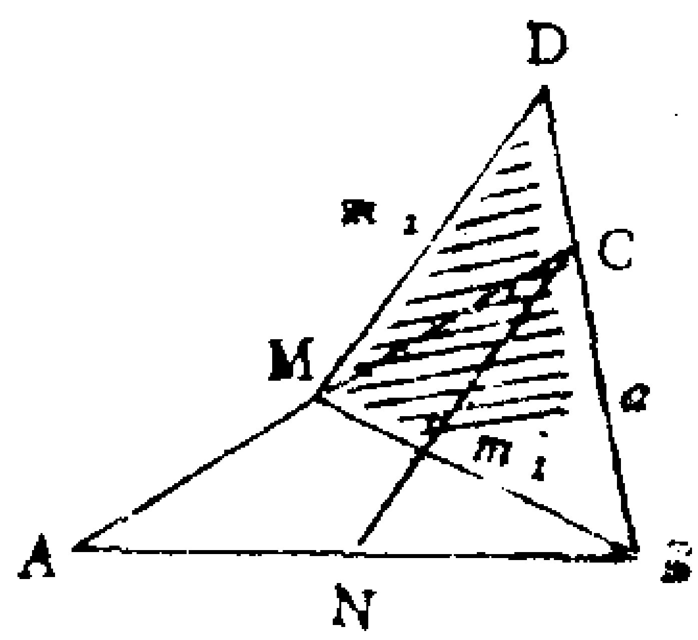


图26—5

解：设定长m_1、m_2及a，作$\triangle MBD$，使$MB=m_1$，$MD=m_2$，$BD=3a/2$，在BD内取一点C，使$BC=a$，延长CM至A，使$MA=CM$，则$\triangle ABC$为所求。

6．已知两边的中线及这两边中的一边，求作三角形。

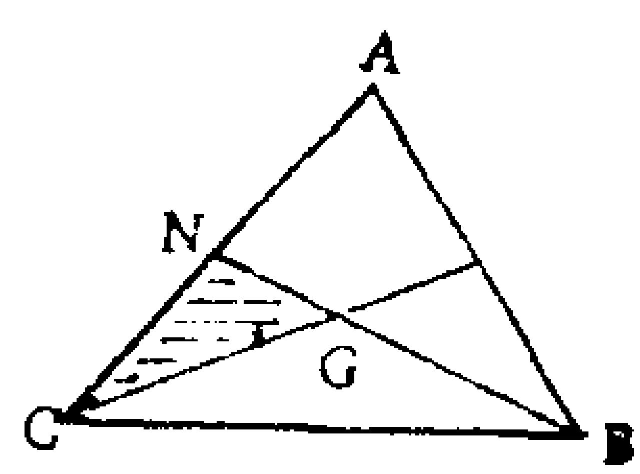


图26—6

解：设定长m_1、m_2及b，作$\triangle CGN$，使$CN=b/2$，$GN=m_1/3$，$CG=2m_2/3$，延长CN至A，使$NA=CN$；NG至B使$GB=2NG$，则$\triangle ABC$为所求。

7．已知两边的中线及第三边的高，求作三角形。

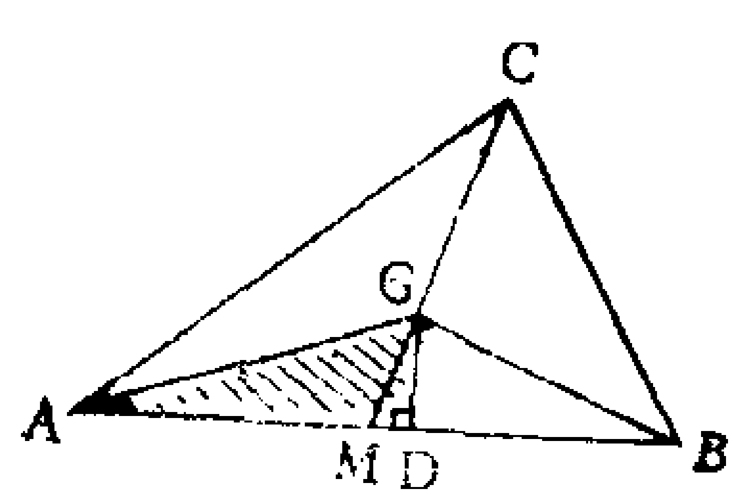


图26—7

解：设定长m_1、m_2及h，作$\triangle AGD$使$AG=2m_1/3$，$GD=h/3$ $\angle ADG=90°$，在直线AD上取点B，使$GB=2m_2/3$，连AB中

点M与G，将MG延长至C，使$GC=2MG$，则$\triangle ABC$为所求。

8．已知两边的中线及其中一边的高，求作三角形。

解： 设定长m_1、m_2、h_1，作$\triangle BGD$，使$\angle BDG=90°$，$GB=2m_2/3$，$GD=h_1/3$，在直线BD上取点M，使$GM=m_1/3$，延长MG至A，使$GA=2MG$；BM至C使$MC=BM$，则$\triangle ABC$为所求。

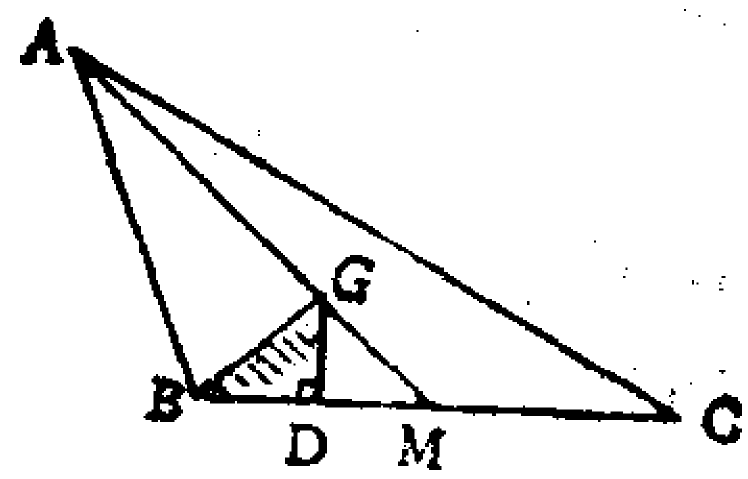


图26—8

9．已知两边的高及其中一边的中线，求作三角形。

解： 设定长h_1、h_2及m_1，取一线段$AM=m_1$，在AM上取点G，使$MG=m_1/3$，作$\triangle MGE$，使$GE=h_1/3$，$\angle GEM=90°$，作$\triangle AGD$使$GD=h_2/3$，$\angle GDA=90°$，设直线ME、AD交于C，延长CM至B，使$MB=CM$，则$\triangle ABC$为所求。

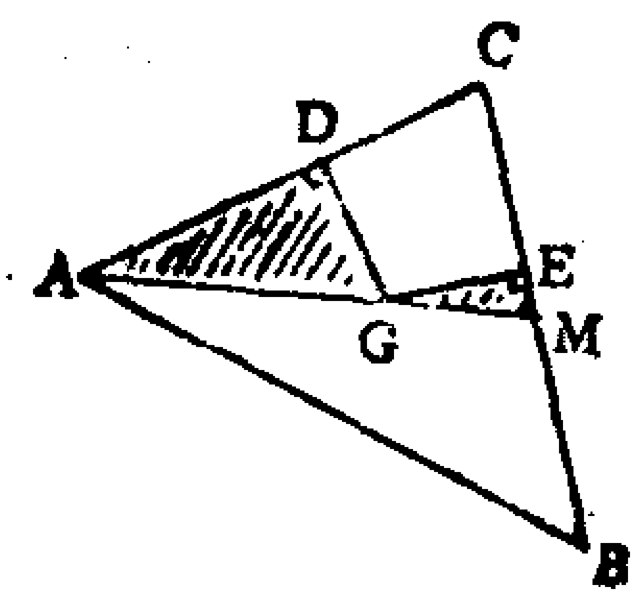


图26—9

10．已知第一边的长、第二边的高、第二第三两边的和，求作三角形。

解： 设定长a、h_2、s，作$\triangle BCE$，使$BC=a$，$BE=h_2$，$\angle BEC=90°$，在CE上取点D，使$CD=s$，作BD中垂线交直线CE于A，则$\triangle ABC$为所求。

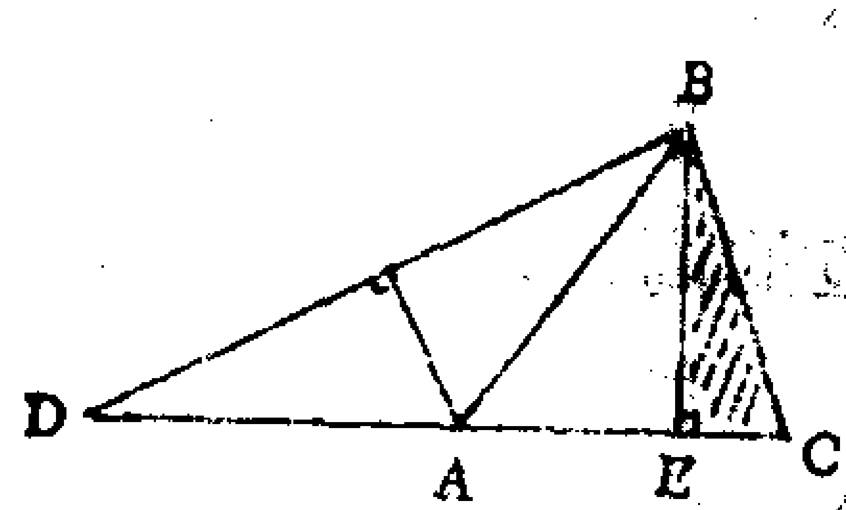


图26—10

11．已知第一边的长、第二边的高、第三边的中线，求

作三角形。

解：设定长a、h_2、m_3，作$\triangle BCE$使$BC=a$，$BE=h_2$，$\angle BEC=90°$，作点M，使$MC=m_3$且M距CE为$h_2/2$，延长BM至A，使$MA=BM$，则$\triangle ABC$为所求。

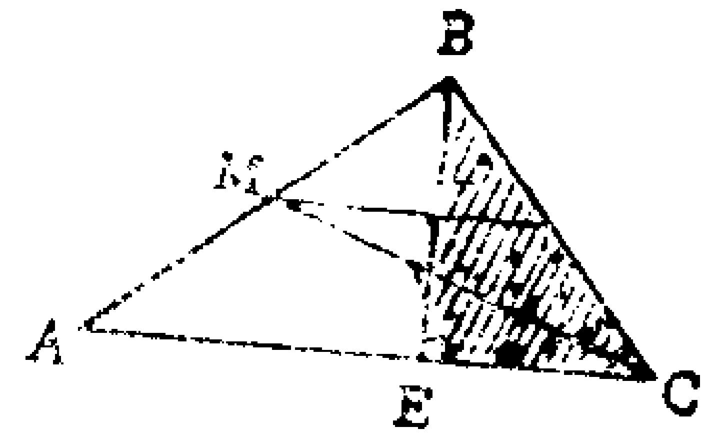


图26—11

12．已知一边、这边的中线、另一边的高，求作三角形。

解：设定长a、m_1、h_2，作$\triangle BCE$使$BC=a$，$BE=h_2$，设BC中点M，在CE上取点A使$MA=m_1$，则$\triangle ABC$为所求。

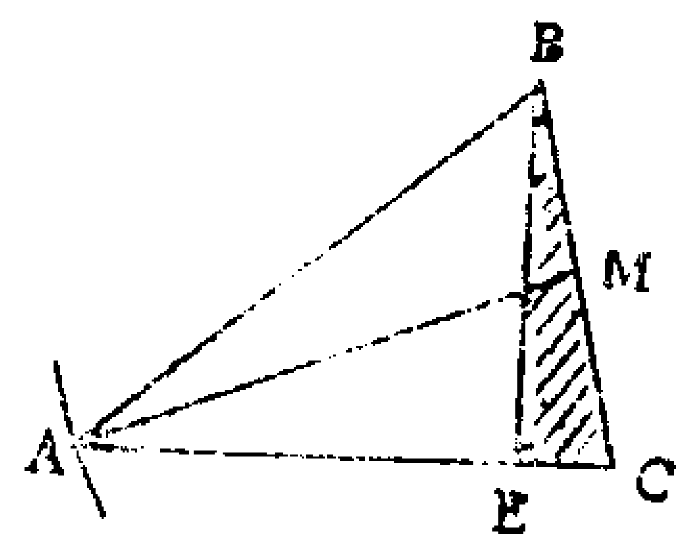


图26—12

13．已知第一边的对角、第二边的长、第三边的中线，求作三角形。

解：设定角$\angle XAY$，定长b、m_3，在AX上取点C，使$AC=b$，在AY上取点M，使$CM=m_3$，延长AM至B，使$MB=AM$，则$\triangle ABC$为所求。

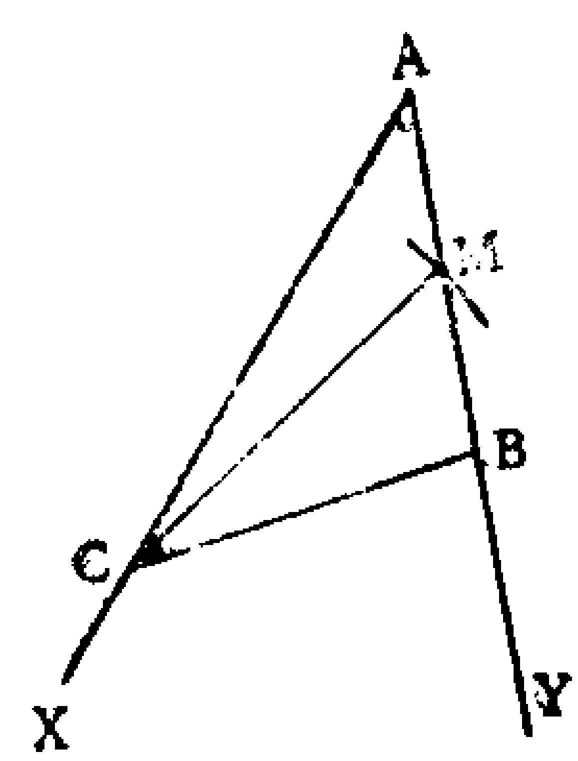


图26—13

14．已知第一边的高、第二边的对角、第三边的中线，

求作三角形。

解：设定角β，定长h_1、m_3。作$\triangle ABD$，使$\angle ABD=\beta$，$\angle ADB=90°$，$AD=h_1$，取AB中点M，在直线BD上取点C，使$MC=m_3$，则$\triangle ABC$为所求。

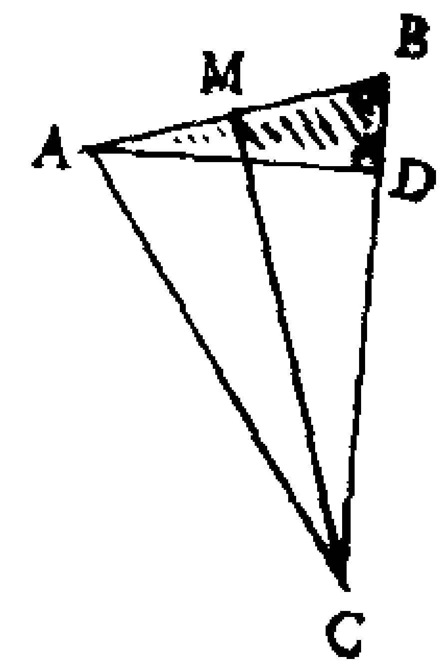


图26—14

15. 已知一角及对边的高与中线，求作三角形。

解：设定角α，定长h_1、m_1，作$\triangle ADM$使$\angle ADM=90°$，$AM=m_1$、$AD=h_1$，延长AM至E，使$ME=AM$，以AE为弦，$180°-\alpha$为张角作弓形弧交直线MD于C，延长CM至B，使$MB=CM$，则$\triangle ABC$为所求。

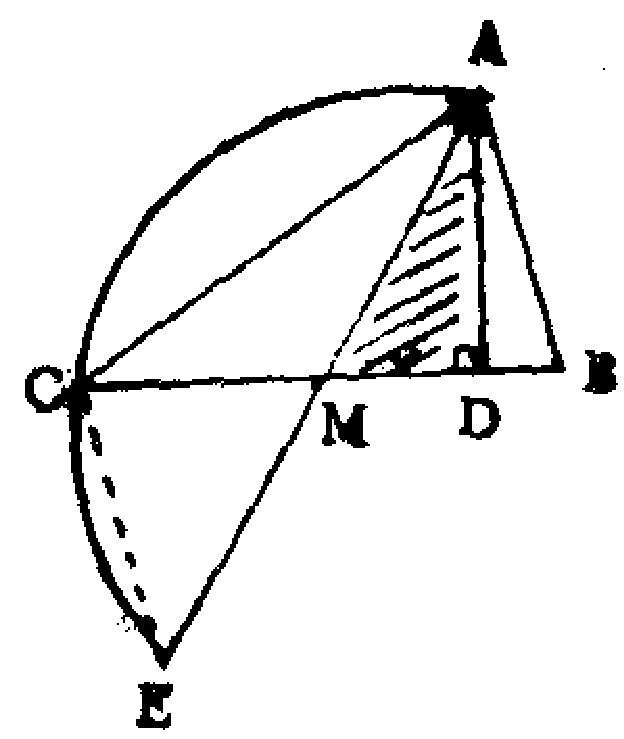


图26—15

16. 已知一边的长、另一边的高、外接圆的半径，求作三角形。

解：设定长a、h_2、R，作$\triangle BEC$使$BC=a$，$BE=h_2$，$\angle BEC=90°$，作$\triangle OBC$，使$OB=OC=R$，作$\odot O(OB)$交直线CE于A，则$\triangle ABC$为所求。

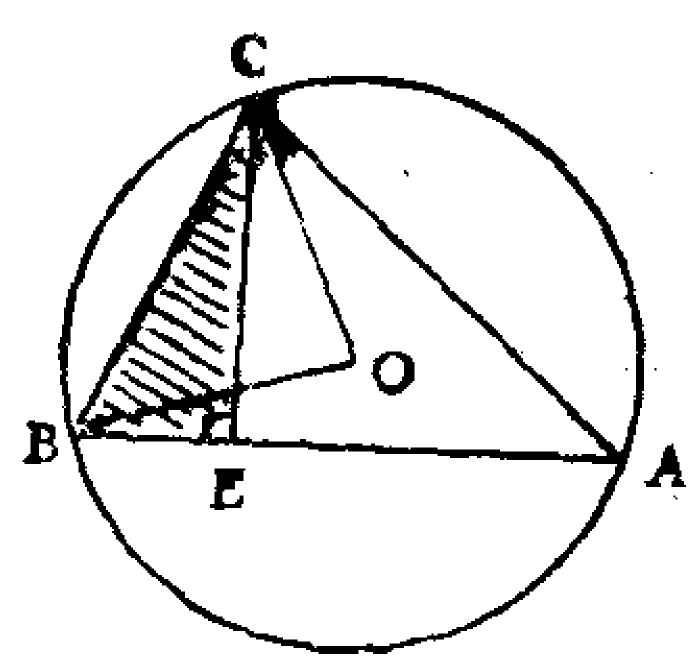


图26—16

17. 已知外接圆半径及一边的高与中线，求作三角形。

解：设定长R、h_1、m_1，作$\triangle AMD$使$\angle ADM=90°$，$AM=m_1$，$AD=h_1$，作直线$l\perp MD$于M，作$\odot A(R)$，设交l于O；作$\odot O$交直线MD于B、C，则$\triangle ABC$为所求。

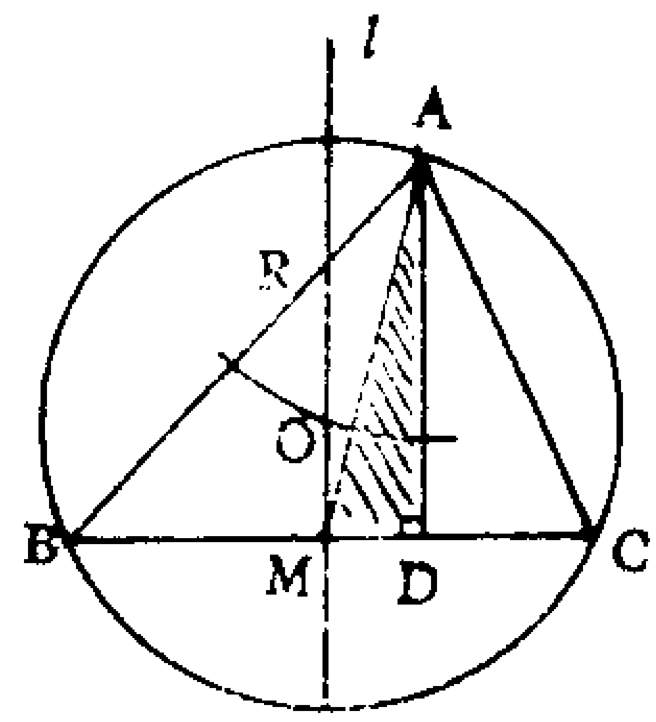


图26—17

18. 已知一边的高、对角的平分线、内切圆半径，求作三角形。

解：设定长h_1、t_1、r，作$\triangle ADT$使$AD=h_1$，$AT=t_1$，$\angle ADT=90°$；在A与TD间作直线l，使它与BC相距为r。设l交AT于I，作$\odot I(r)$，过A作$\odot I(r)$的两切线交直线TD于B、C，则三角形ABC为所求。

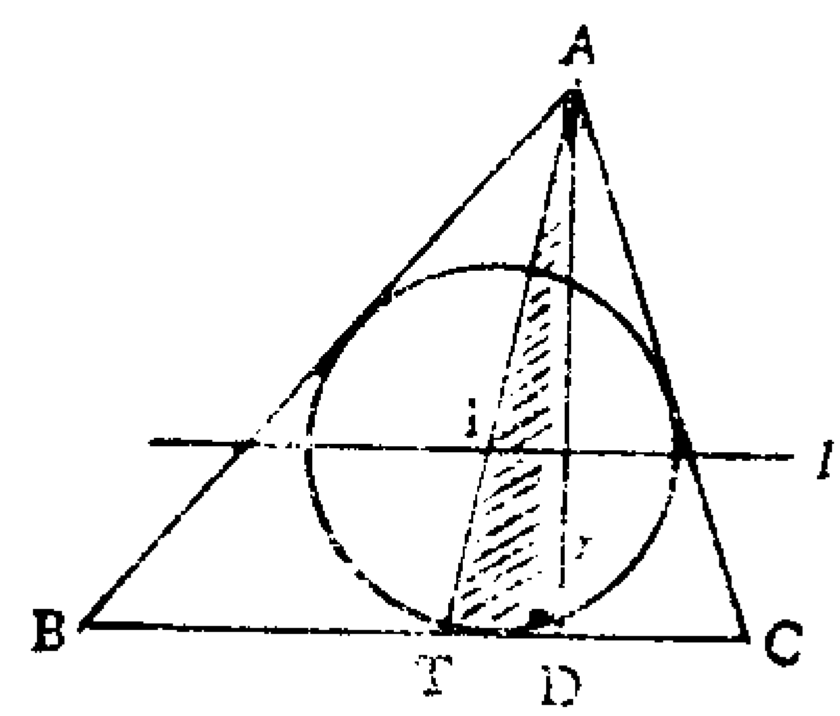


图26—18。

19. 已知一边的高、对角的平分线、另两边的积，求作三角形。

解：设定长h_1、t_1、p，作$\triangle ADT$，使$\angle ADT=90°$，$AD=h_1$，$AT=t_1$，在AD上取点D'，使$AD'=p^2/AD$。设TD关于AT的对称线l，以AD'为直径作圆，设交l于B'，延长AB'交TD于B，在TD上取点C，使$TC=TB'$，则$\triangle ABC$为所求。

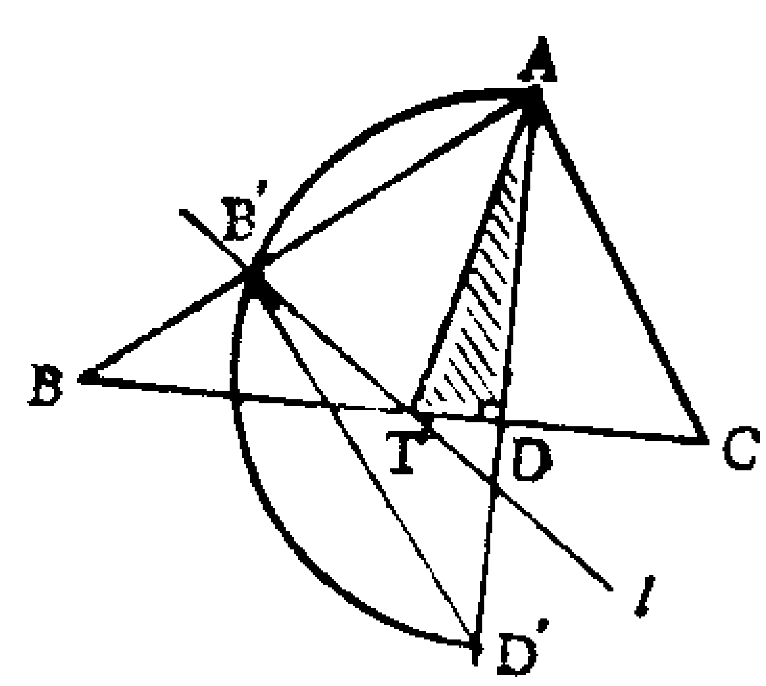


图26—19

20. 已知自同一顶点所引出的高、中线、外角平分线的长，求作三角形。

解：设定长h_1、m_1、t_1'，作$\triangle ADM$，使$AD=h_1, AM=m_1$，$\angle ADM=90°$，在MD的延长线上取点T'，使$AT'=t_1'$，作直线$l\perp MD$于M，设l交AT'于N，作AN中垂线交l于O，作$\odot O(OA)$交直线MD于B、C，则$\triangle ABC$为所求。

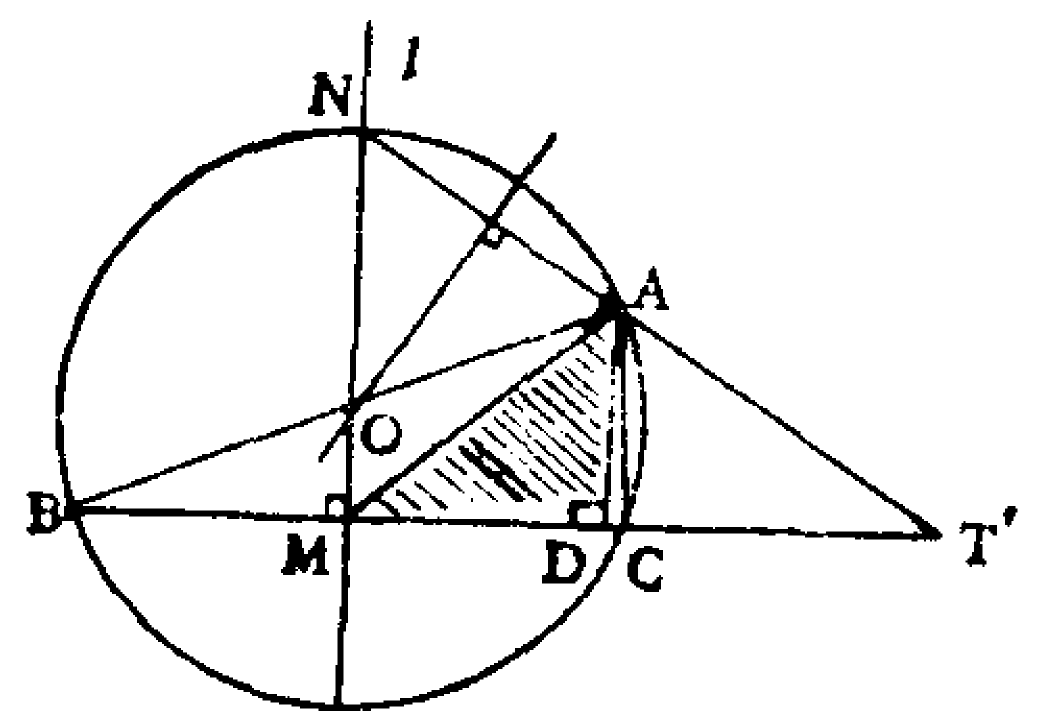


图26—20

21. 已知一边的高及中线，又知这边与另一边之比，求作三角形。

解：设定长h_1、m_1及定比$a:b$，作$\triangle ADM$使$AD=h_1$，$AM=m_1$，$\angle ADM=90°$，§57例64作M、A两点之比为$a/2:b$的阿氏圆，设交直线MD于C，延长CM至B，使$MB=CM$，则$\triangle ABC$为所求。

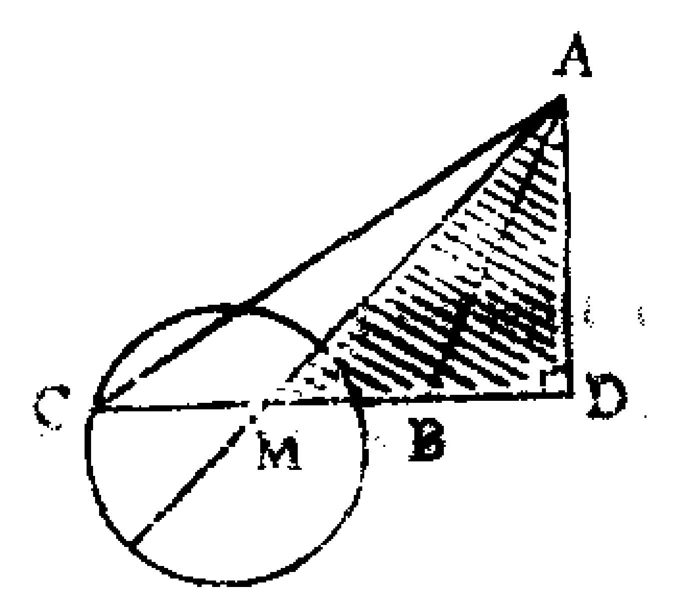


图26—21

22. 已知腰的高及中线，求作等腰三角形。

解：当上题$a:b=1:1$时，便是本题。

23. 已知顶角的平分线、两底角的差、两腰的和与底边之比，求作三角形。

解：设定长 t_1、定角 θ，定比 $p:q$，作线段$AT=t_1$，过T作直线l，使与AT夹角为$90°-\theta/2$，利用§57例题64，作A、T两点之比为$p:q$的阿氏圆，设交l于B、C，则$\triangle ABC$为所求。

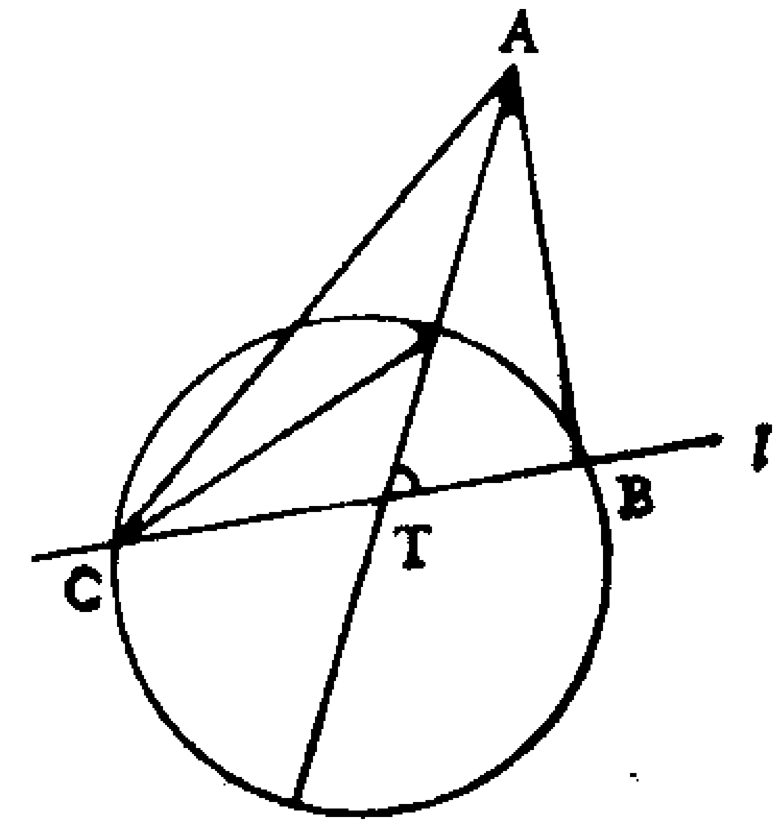


图26—23

24。已知底边的长、两腰的差、两底角的差，求作三角形。

解：设定长a、d，定角θ，作线段$BC=a$，射线CE使CE与CB夹角为$\theta/2$，在CE上取点D，使$BD=d$，作CD中垂线交BD于A，则$\triangle ABC$为所求。

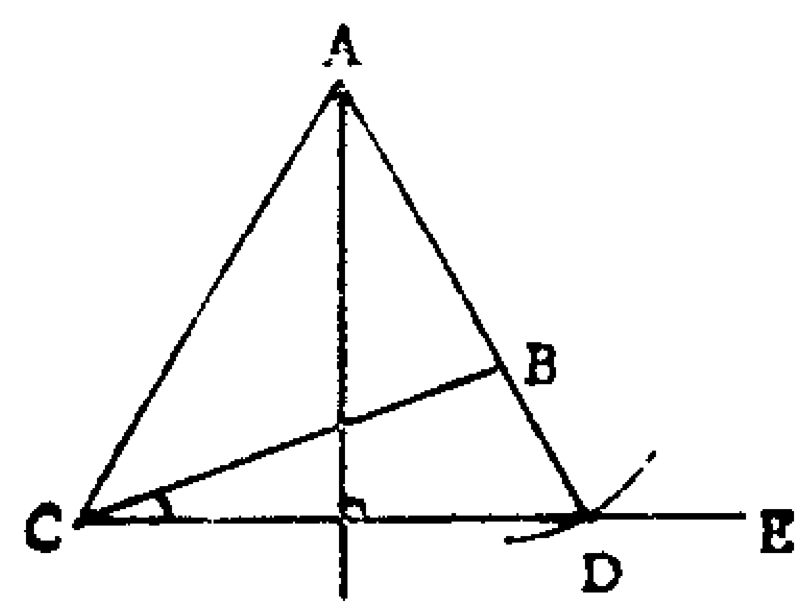


图26—24

25。已知底边、顶角、两腰的高之和，求作三角形。

解：设定长a、s，定角α，作$\triangle BGH$，使$\angle BGH=90°$，$\angle BHG=\alpha$，$BG=s$，作$\angle BHG$平分线l，在l上取一点C，使$BC=a$，作CH的中垂线交BH于A，则$\triangle ABC$为所求。

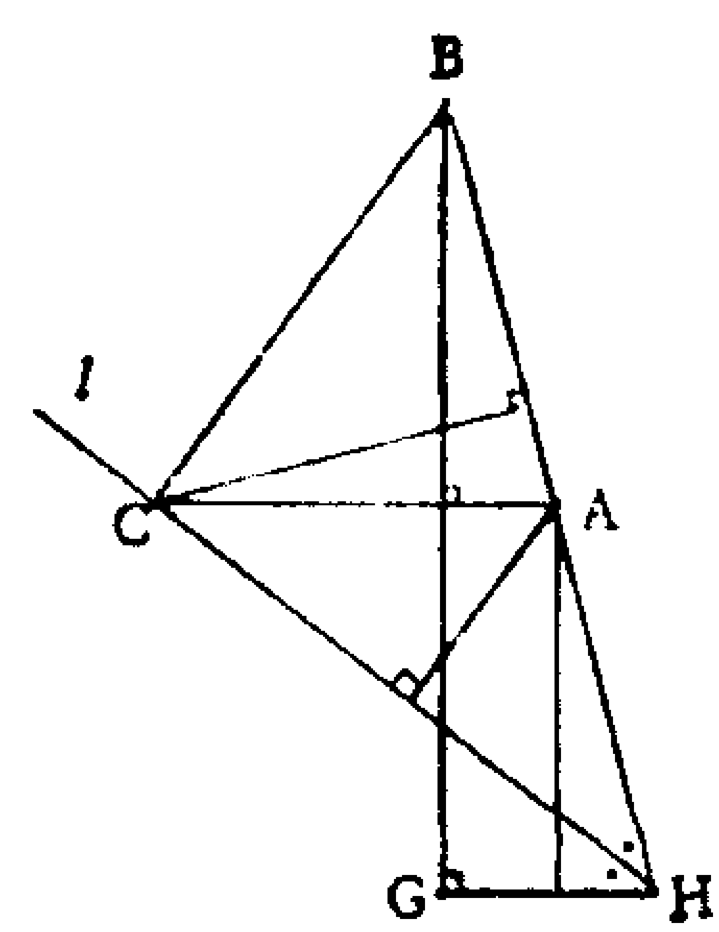


图26—25

习题二十七

9．已知四边的长，且知一角被对角线平分，求作四边形。

解：设定长 a、b、c、d，作 $\triangle CBD'$，使 $CB=b$，$CD'=d$，$BD'=|a-d|$。在 BD' 射线上取点 A，使 $BA=a$，作 D' 关于 AC 的对称点 D，则四边形 $ABCD$ 为所求。

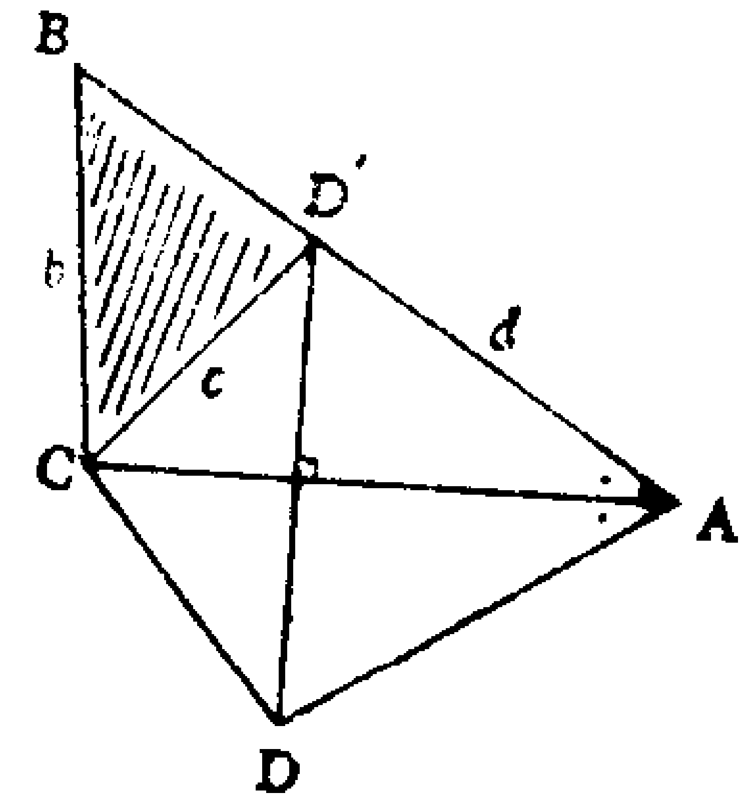


图27—9

10．求作一正方形，使一双对顶点同落在一条定直线上，他双对顶点分别落在另外两条定直线上。

解：设定直线 l、l_1、l_2，作 l_1 关于 l 的对称线 l_1'。

设 l_1' 交 l_2 于 C，作 $CA\perp l$ 于 O 而交 l_1 于 A，在 l 上取两点 B、D，使 $OB=OD=OA$，则 $ABCD$ 为所求。

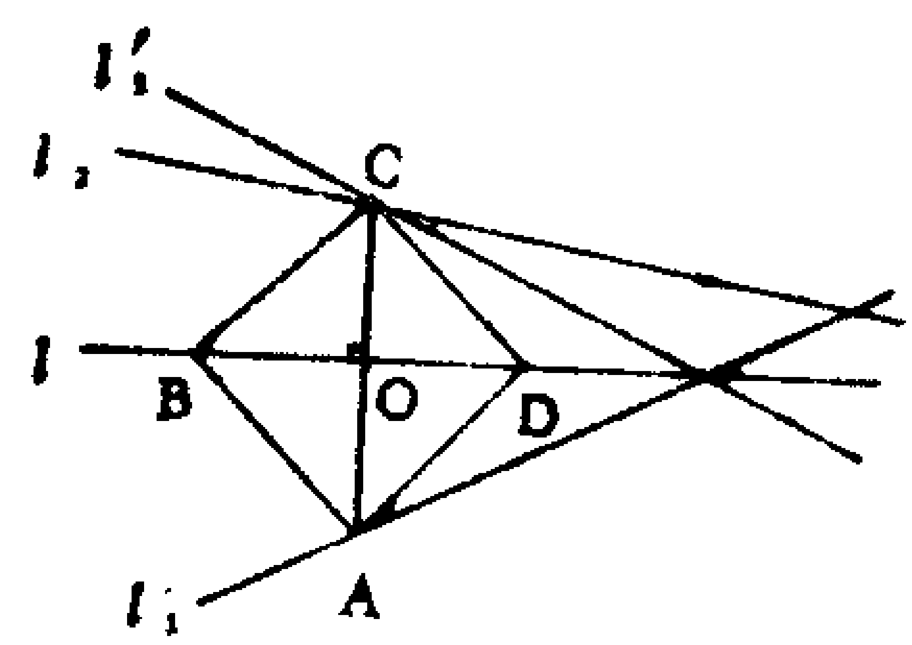


图27—10

11．设两定点 A、B 分在直线 l 的两侧，P 是 l 上的定点，在 l 上求另一点 Q，使合于 $\angle PAQ=\angle PBQ$。

解：作A关于l的对称点A'，作$\odot PA'B$，设交l于Q，则Q为所求。

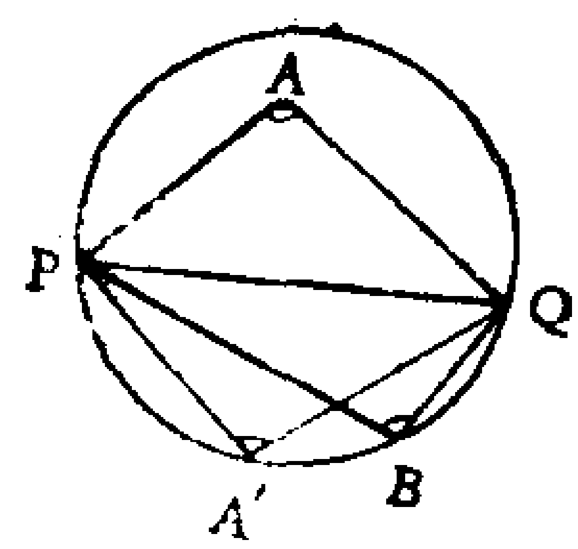


图27—11

12. 在已知三角形中，求作周长极小的内接三角形，但有一顶点是已经指定的。

解：设P在$\triangle ABC$的BC边上，作P关于AB、AC的对称点P_1、P_2，连P_1P_2交AB、AC于R、Q，则$\triangle PQR$为所求。

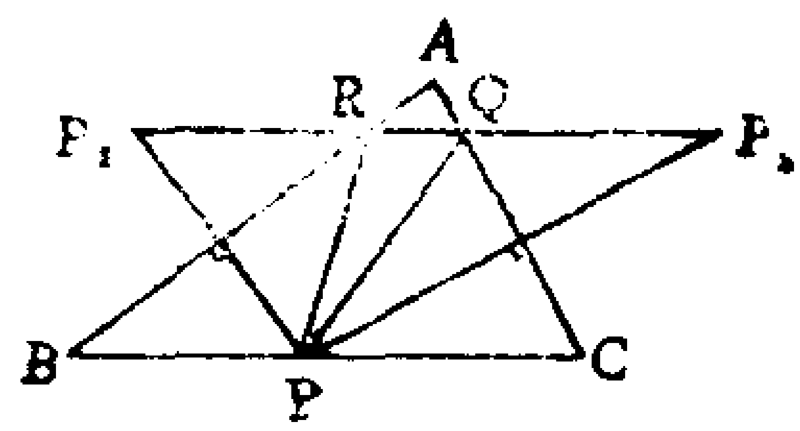


图27—12

13. 设OX、OY、OZ是三条定半线，P是$\angle YOZ$内一定点。求作$\triangle ABC$，使A、B、C三顶点分别落在OX、OY、OZ上，BC边通过P点，而O恰是$\triangle ABC$的内心。

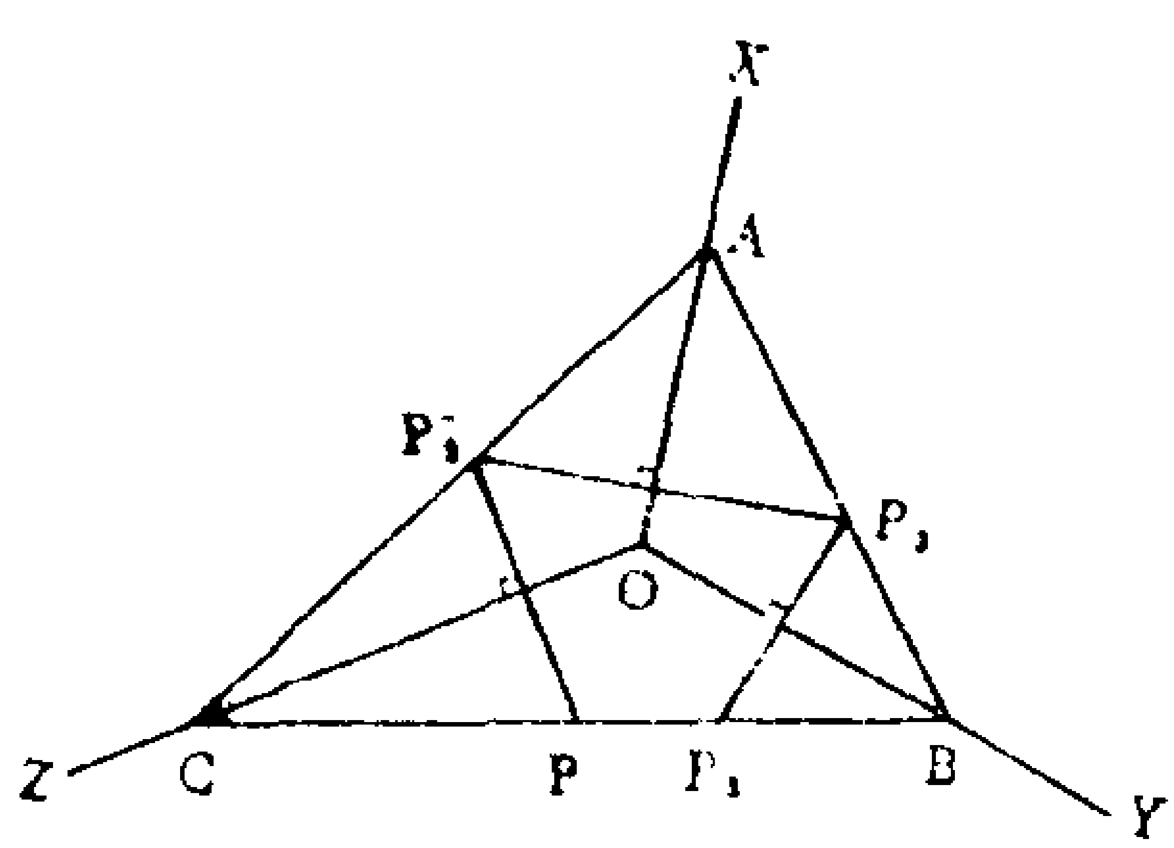


图27—13

解：以OZ为对称轴，将P变为P_1；以OX为对称轴，将P_1变为P_2；以OY为对称轴，将P_2变为P_3。

连PP_3交OY、OZ于B、C，连BP_2交OX于A，则$\triangle ABC$为所求。

14. 求作一三角形，使共点的三条已知直线恰是它的三边的中垂线，并且有一边（所在直线）通过一已知点。

解：设三定直线OX、OY、OZ，一定点P。过P作直线$l \perp OX$，作l关于OY的对称线l_1、作l关于OZ的对称线l_2；设l_1、l_2交于A，过A引OY、OZ的垂线交l于C、B，则$\triangle ABC$为所求。

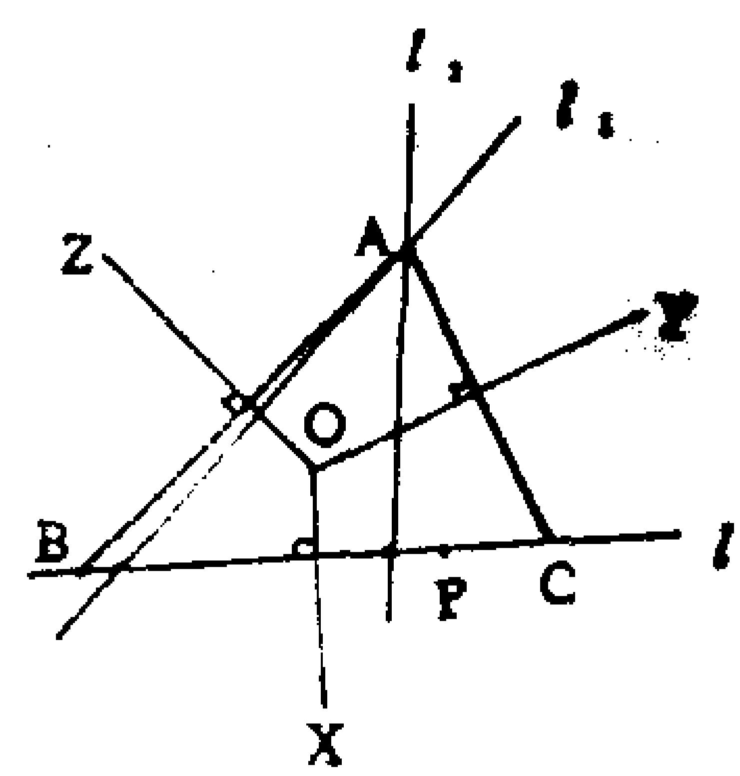


图27—14

15. 已知四边的中垂线的位置，求作四边形。

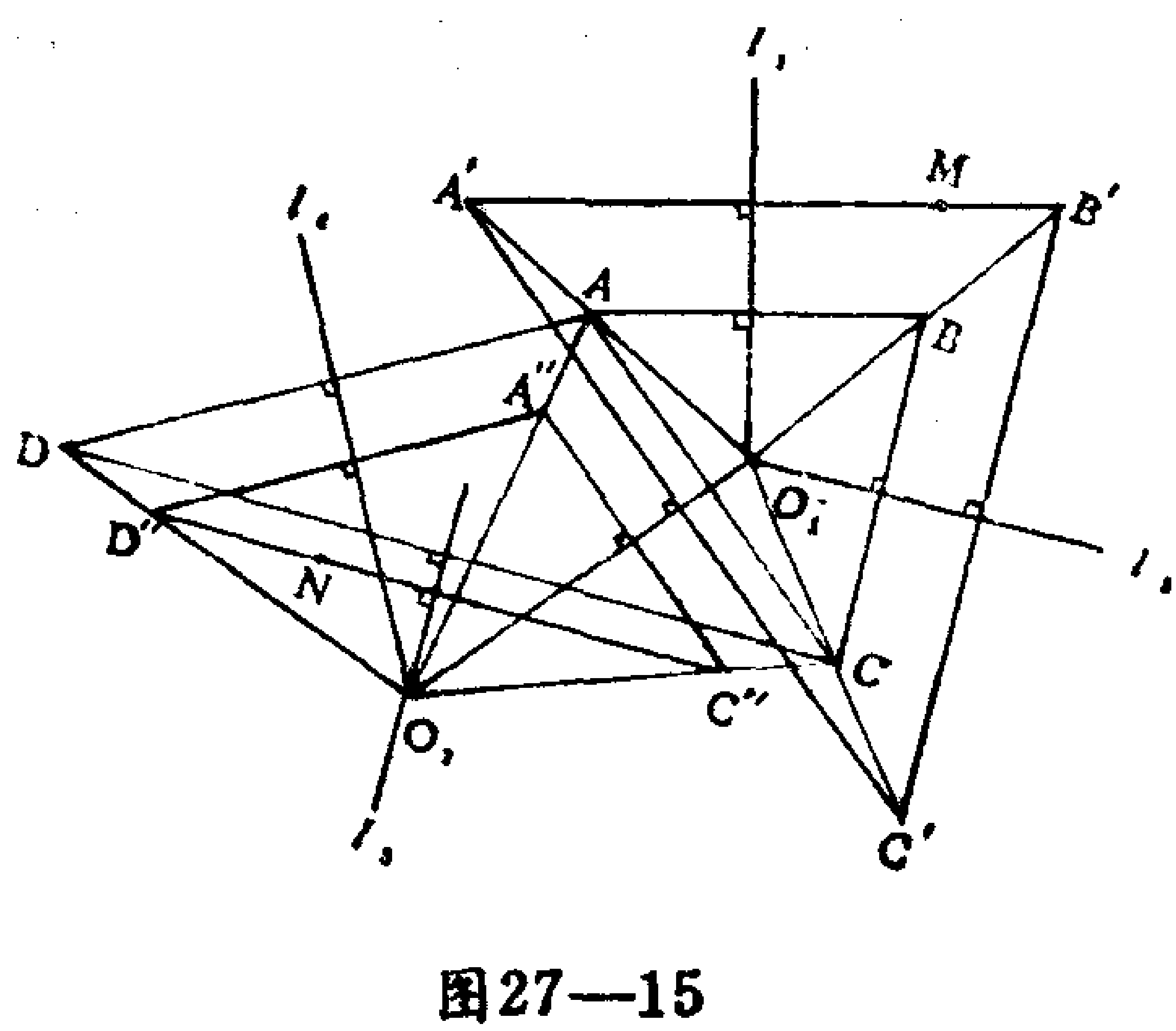


图27—15

解：设四定直线l_1、l_2、l_3、l_4。令l_1、l_2交于O_1，l_3、l_4交于O_2。

任取两定点M、N，利用上题作$\triangle A'B'C'$，使l_1、l_2、O_1O_2恰为它的三边中垂线且$A'B'$过M（如图）；作$\triangle C''D''A''$，使l_3、l_4、O_2O_1恰为它的三边中垂线且$C''D''$过N。

设O_1A'交O_2A''于A，O_1C'交O_2C''于C，作A关于l_1的对称点B，作A关于l_4的对称点D。则四边形$ABCD$为所求。

16. 已知一底、两对角线及其交角，求作梯形。

解：设定长a、e、f及定角θ。

作$\triangle BDE$，使$DE=e$，$DB=f$，$\angle EDB=\theta$。

在EB上取A，使$BA=a$，作$AC \mathrel{\underline{\parallel}} ED$，则$ABCD$为所求。

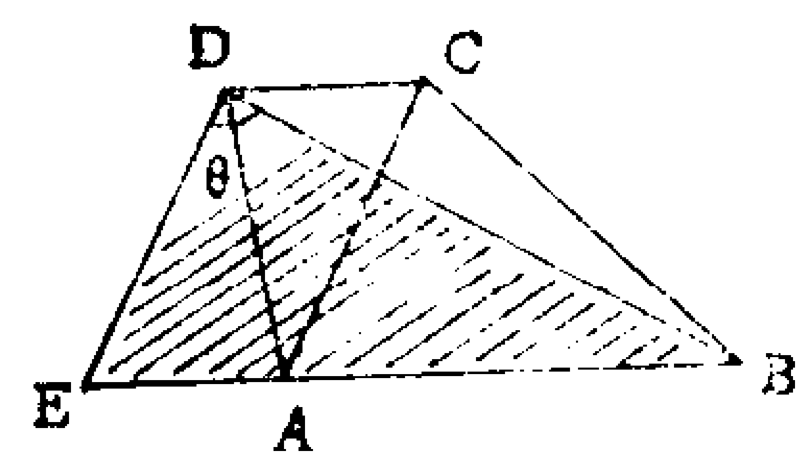


图27—16

17. 已知一腰、两对角线及其交角，求作梯形。

解：设定长b、e、f，及定角θ。

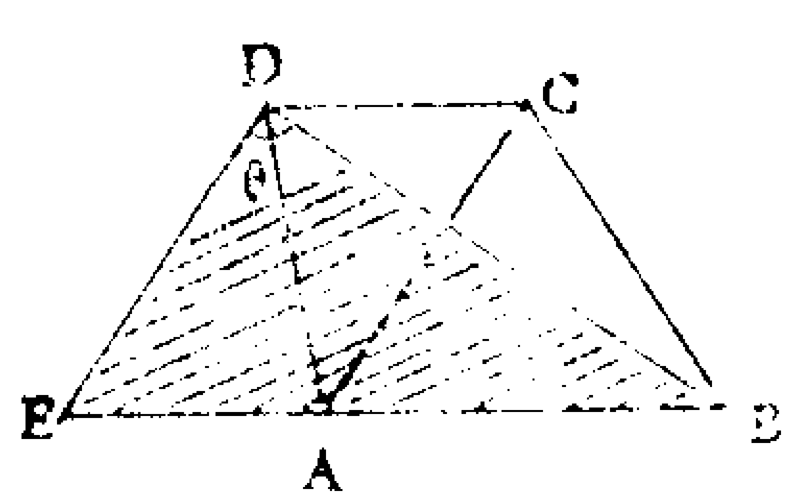


图27—17

作$\triangle BDE$，使$DE=e$，$DB=f$，$\angle EDB=\theta$，在EB上取点A，使$DA=b$，作$AC\perp\!\!\!\!=ED$，则$ABCD$为所求。

18. 已知一双对边及两对角线，求作四边形，但须使两对角线互相垂直。

解：设定长a、c、e、f，作$\triangle ACE$，使$\angle ACE=90°$，$AC=e$，$CE=f$，作点B，使$BA=a$，$BE=c$，作$CD\perp\!\!\!\!=EB$，则$ABCD$为所求。

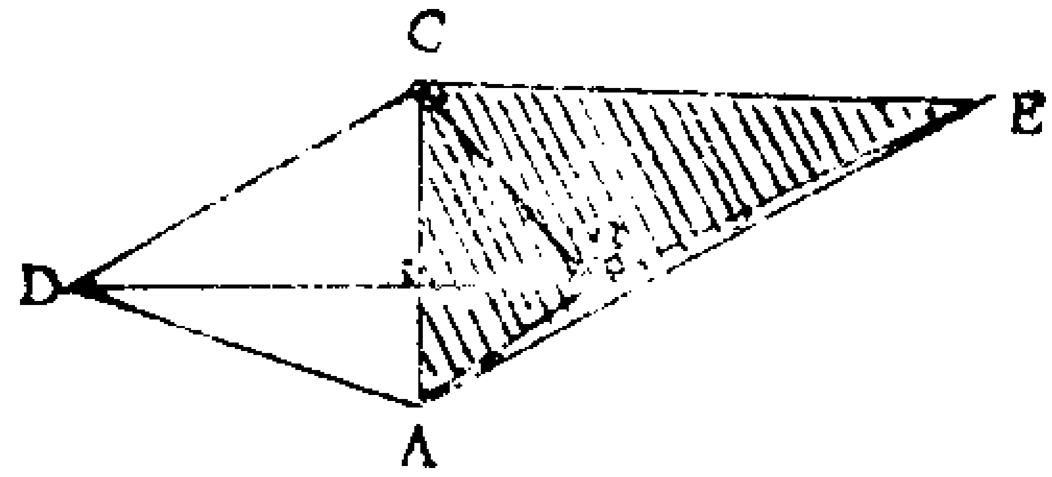


图27—18

19. 求作一等于定长且平行于定直线的线段，使它的两端分别落在两个定圆上。

解：设定长d及定直线l，定圆$\odot O_1$、$\odot O_2$。

将$\odot O_1$按直线l方向平移距离为d到$\odot O_1'$，设$\odot O_1'$交$\odot O_2$于B，作$BA\perp\!\!\!\!=O_1'O_1$，则AB为所求。

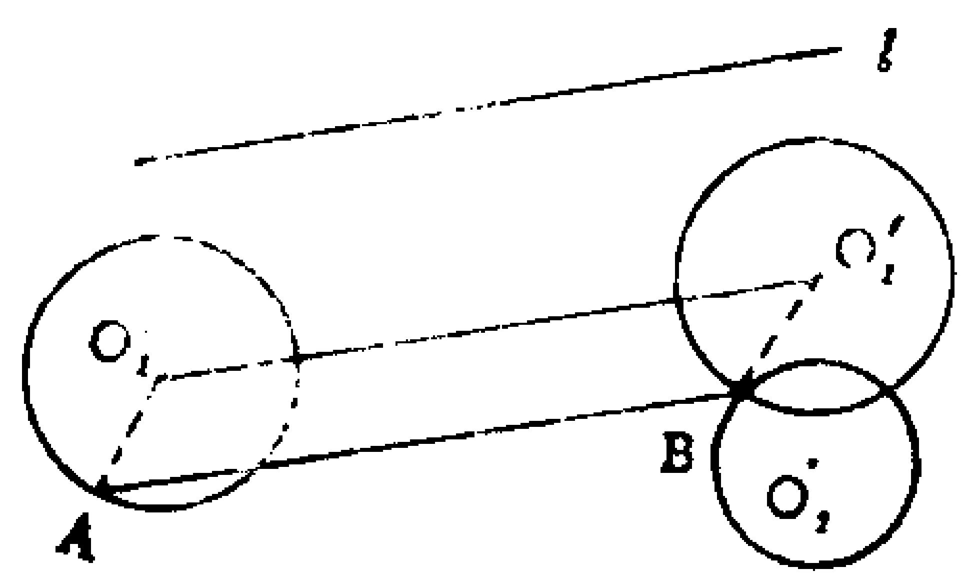


图27—19

20. 求作一圆，使通过一定点，且切于已知的两平行线。

解：设定点P、定平行线a、b；设a、b间距离为d与它们等距的直线是l。令O是$\odot P(d/2)$与l的交点，则$\odot O(d/2)$为所求。

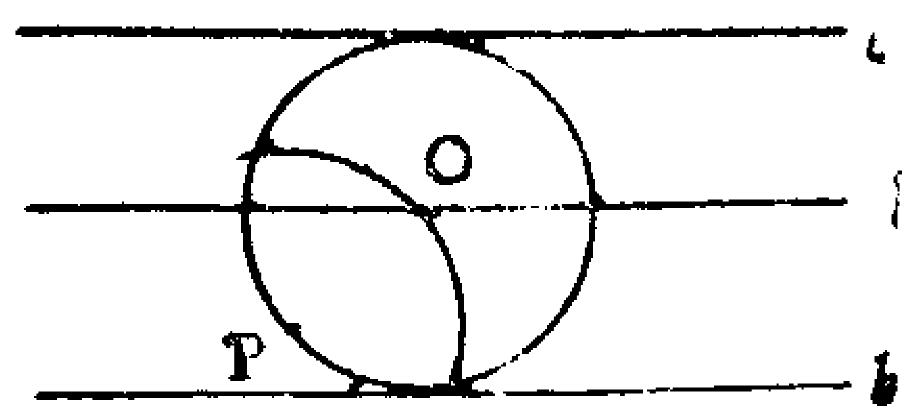


图27—20

21．在两岸平行的河的两侧各有一村庄，试问在什么地点搭桥（桥身垂直于河岸），才使得两村间的路径最短？

解：设两平行线a、b是河的两岸，设A、B各是在a、b侧的村庄，设$AA_1 \perp a$于A_1，$BB_1 \perp b$于B_1。在AA_1上取点C，使$AC = B_1B$，CB连线交b于F，作$FE \perp a$于E，则EF是合要求的搭桥位置。

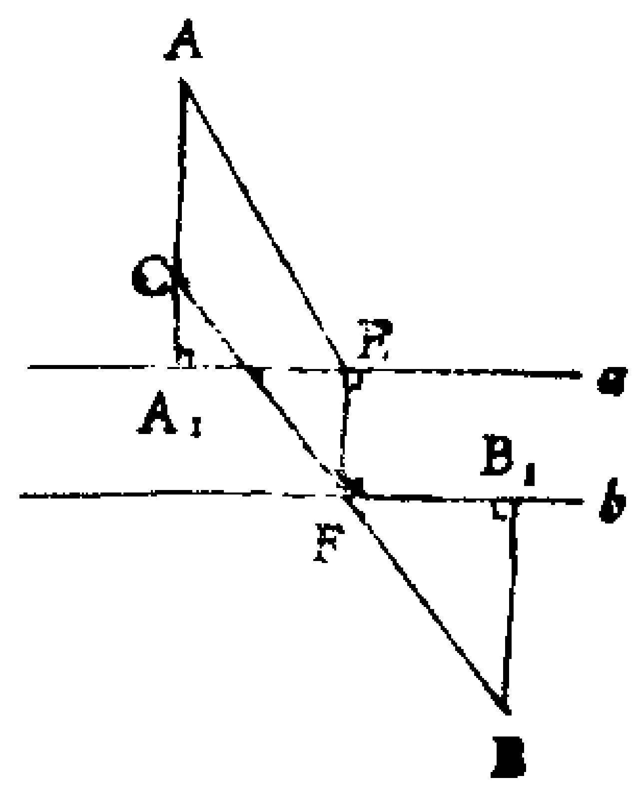


图27—21

22．已知$\triangle ABC$，求作长度一定而两端各着于直线AB、AC的线段EF，并且使得$AE = CF$。

解：设定长d，作直线CD，使与CA夹角为$\angle A/2$，设G为$\odot A(d)$与CD的交点，作CG中垂线交CA于F，作$FE \perp GA$，则EF为所求。

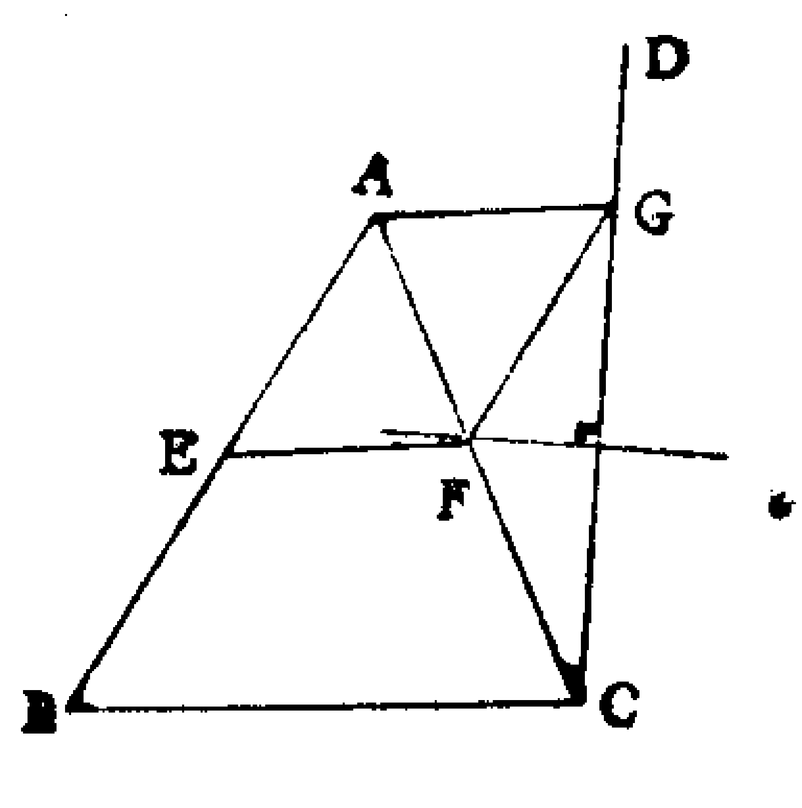


图27—22

23. 设l是定直线，A、B是定圆⊙O上两定点。在⊙O上求一点P，使连线PA与PB在l上截下定长的线段。

解： 设定长d，作$BE\parallel l$且$BE=d$，作以AE为弦，$\overset{\frown}{AB}/2$为张角，作弓形弧交l于C，连CA交⊙O于另一点P，则P为所求。

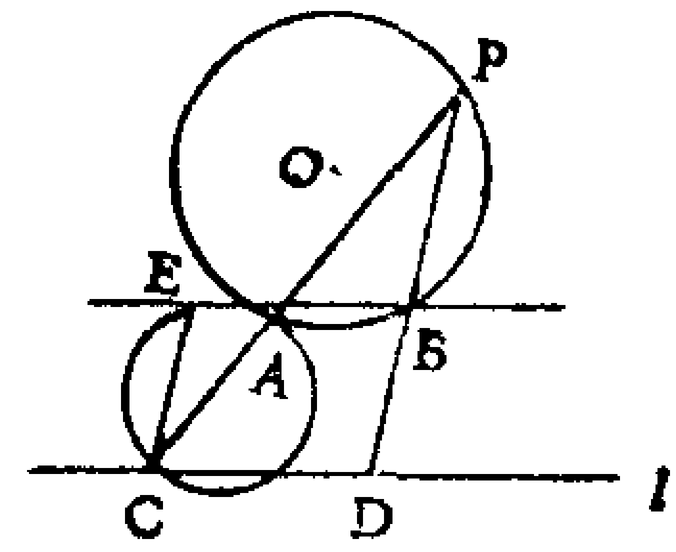


图27—23

24. 在定圆中求作定长的弦，使一已知点对这弦的视角等于定角。

解： 设定圆⊙O及定长a、定点P、定角α。

作⊙O的任一弦$A'B'=a$，作$A'B'$为弦，α为张角的弓形弧交⊙O（OP）于P'，以O为中心，将$\triangle P'A'B'$旋转到$\triangle PAB$，则AB为所求。

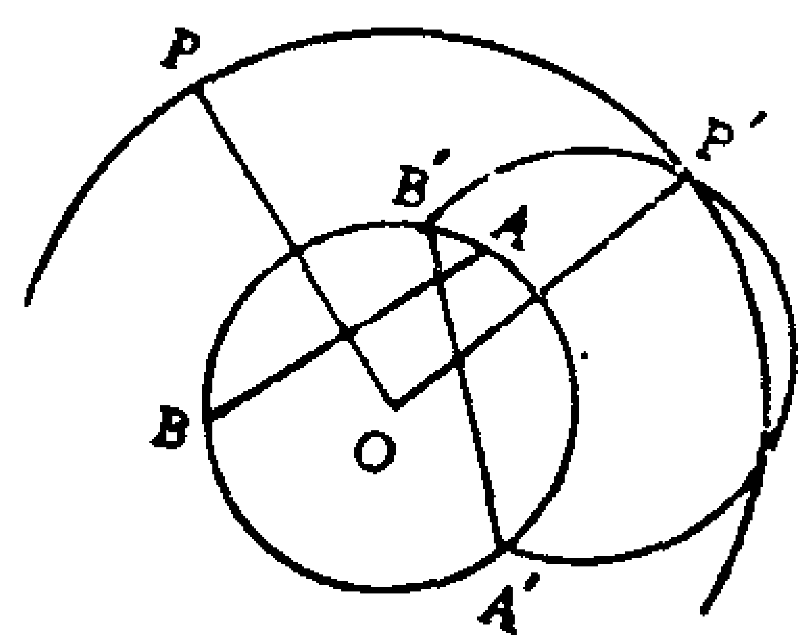


图27—24

25. 求作一正三角形，使它的三个顶点分别落在三条互相平行的定直线上。

解： 设三定平行线a、b、c。在a上取定一点A，在b上取一点D，使AD与b夹角为60°、在b外作一点E，使$\triangle A$DE为正三角形。设DE交c于C点，将直线AC旋转60°到直线AB，AB交b于B，则$\triangle ABC$为所求。

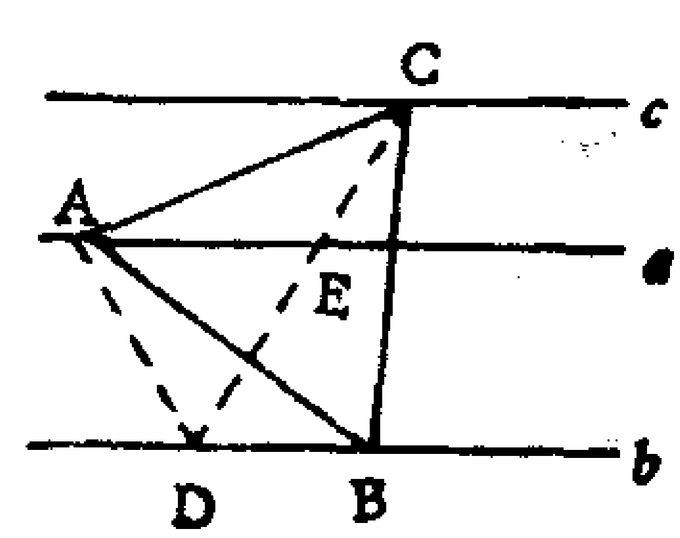


图27—25

26. 已知一顶点的位置，求作一正三角形，使其它两顶点同落在一定圆上。

解：设定点A及定圆$\odot O$，作直线AB，使它与AO夹角为$30°$，且交$\odot O$于B，在$\odot O$上求另一点C。使$AC=AB$，则$\triangle ABC$为所求，

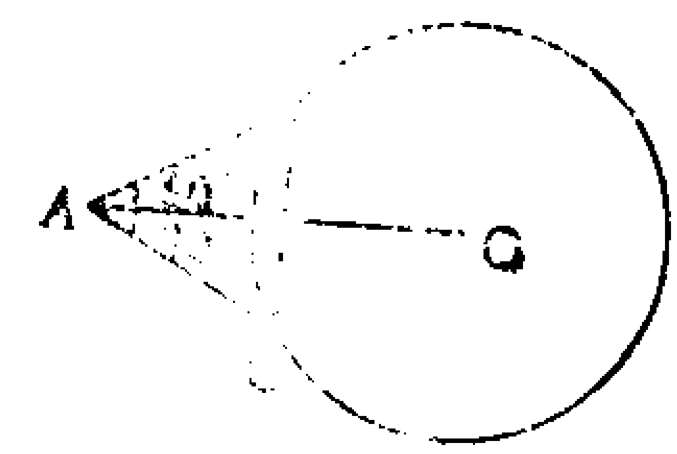


图27—26

27. 求作一正方形，使它的一双对边各是两已知同心圆的弦。

解：设两定同心圆$\odot O(r_1)$、$\odot O(r_2)$。$(r_1>r_2)$，在$\odot O(r_1)$上取定一点A，以A为中心，将$\odot O(r_2)$旋转$-90°$到$\odot O'(r_2)$交$\odot O(r_1)$于B。

以A为中心，将B旋转$+90°$到D，作正方形$ABCD$，则$ABCD$为所求。

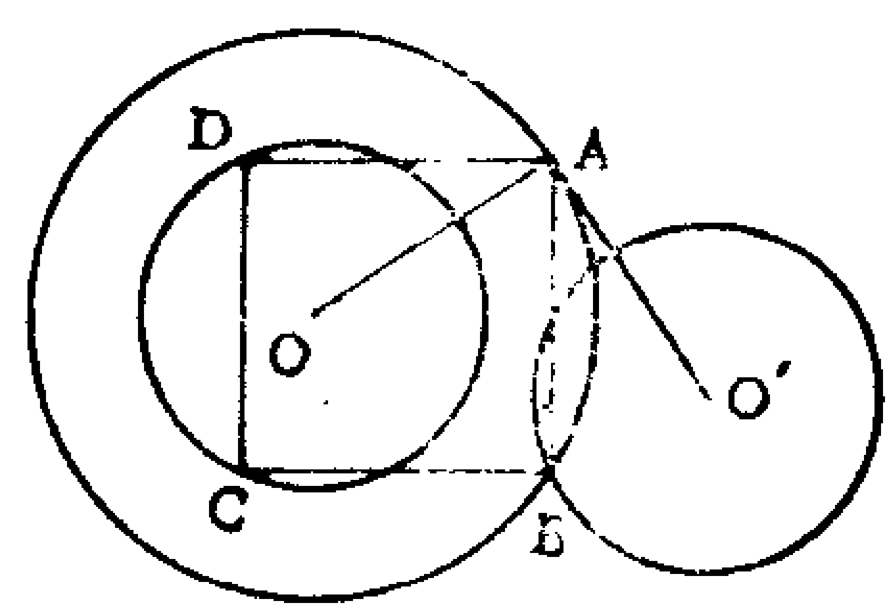


图27—27

28. 求作一正方形，使它的顶点依次落在一已知平行四边形各边所在的直线上。

解：设定$\square ABCD$，O为其中心。

以O为中心，将BA旋转$90°$到l。设l交AD于P，连PO交BC于R，过O作$QS\perp PR$交AB、CD于Q、S。则$PQRS$为所求。

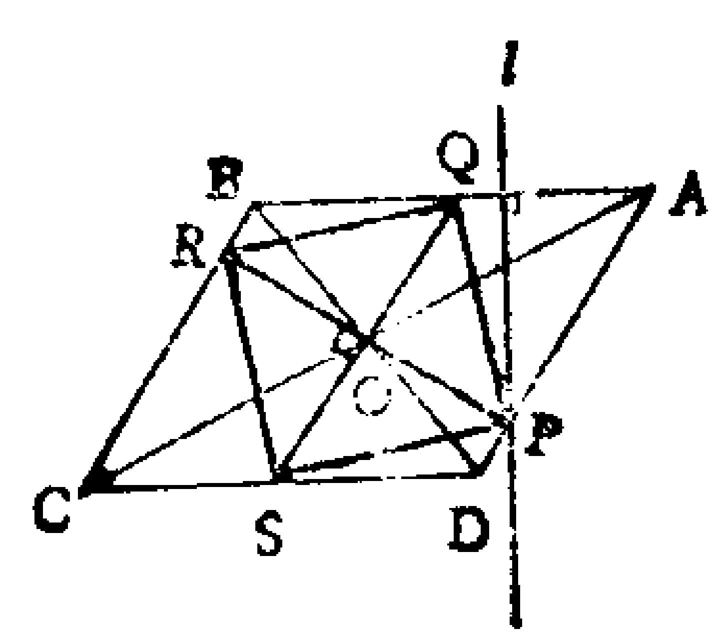


图27—28

29. 已知两直线 a、b 及一点 O，求以 O 为心作圆，使在 a、b 上所截两弦的和等于定长。

解：设定长 s，作 $OA\perp a$ 于 A，$OB\perp b$ 于 B、在 a 上取点 C 使 $AC=s/2$，作 $CD\perp a$ 且 $CD=OB$。

设 OD 中垂线交 a 于 E，则 $\odot O(OE)$ 为所求。

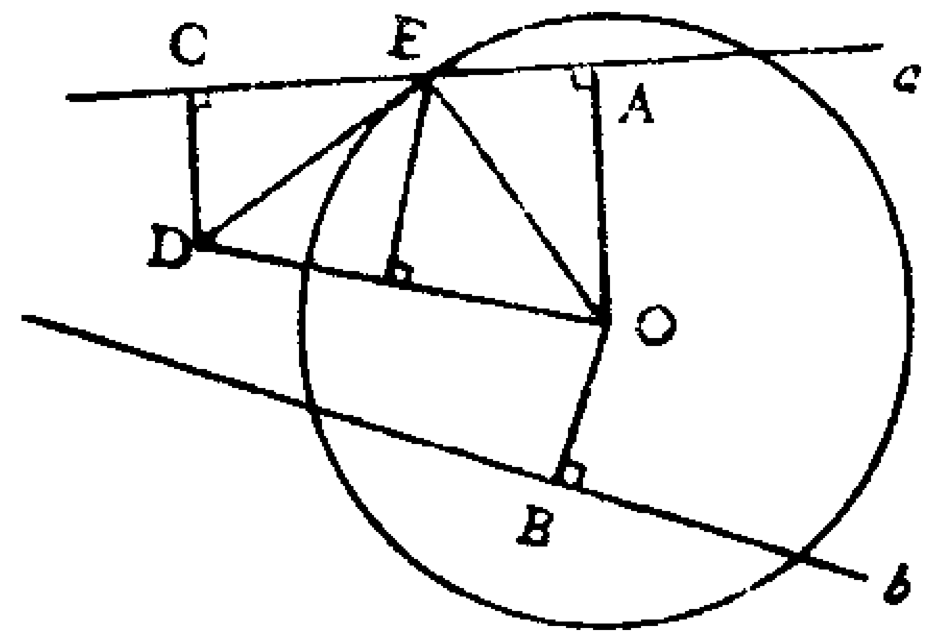


图27—29

30. 过两圆的一交点作一直线，使被两圆所截的弦相等。

解：设定圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$，P 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的一交点。

以 P 为反射中心 将 $\odot O_1$ 反射到 $\odot O_1'$。设 $\odot O_1'$ 交 $\odot O_2$ 于 B，连 BP 交 $\odot O_1$ 于 A，则 AB 为所求。

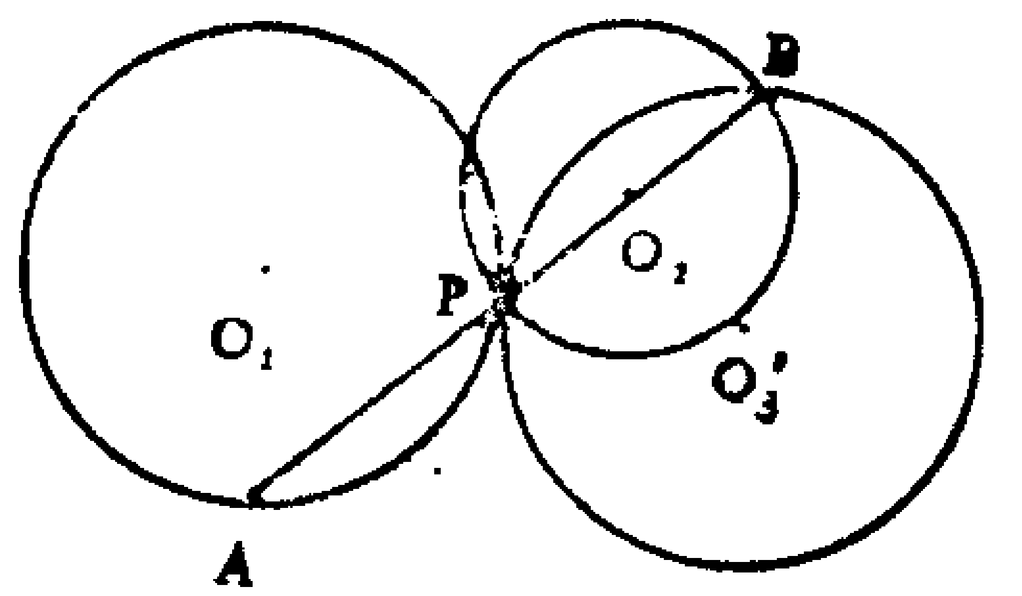


图27—30

31. 在定圆中求作内接矩形，使一双对边（所在直线）各通过一已知点。

解：设定圆 $\odot O$，定点 P、Q，M 为 PQ 的中点。

过 P、Q 各作一条平行于 MO 的直线 a、b，交 $\odot O$ 于 A、B，C、D，则 $ABCD$ 为所求。

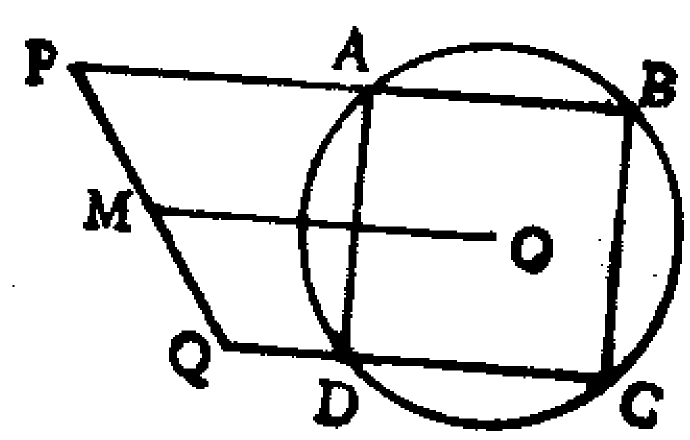


图27—31

32. 设 A、B 是两定点，在定圆中求作一直径 PQ，使 $AP=BQ$。

解：设定圆$\odot O$，延长AO至A'，使$OA'=AO$，作$A'B$中垂线交$\odot O$于Q，连QO交$\odot O$于另一点P，则PQ为所求。

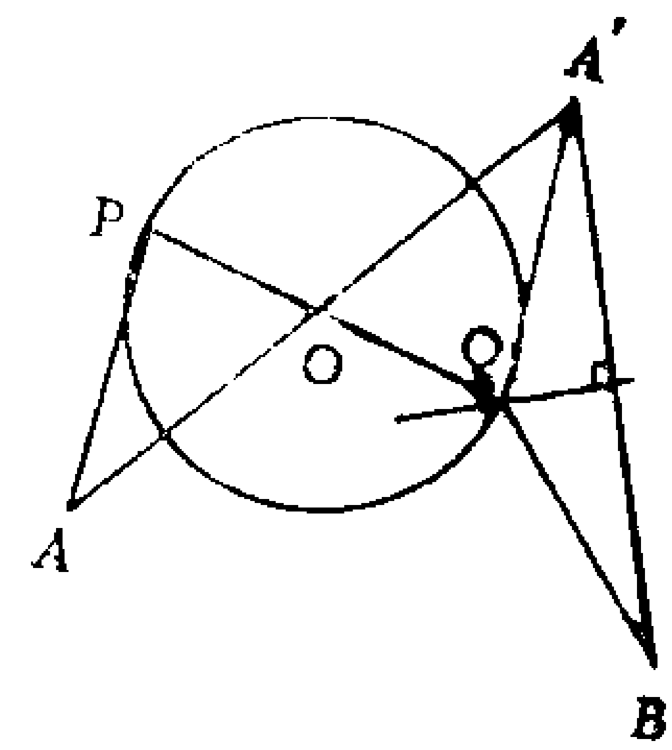


图27—32

33. 已知一顶点及重心的位置，求作三角形，使其它两顶点分别落在两定直线上。

解：设定点A、G，定直线b、c，延长AG至M，使$GM=AG/2$，以M为反射中心，将b反射到b'，令b'交c于C，连CM交b于B，则$\triangle ABC$为所求。

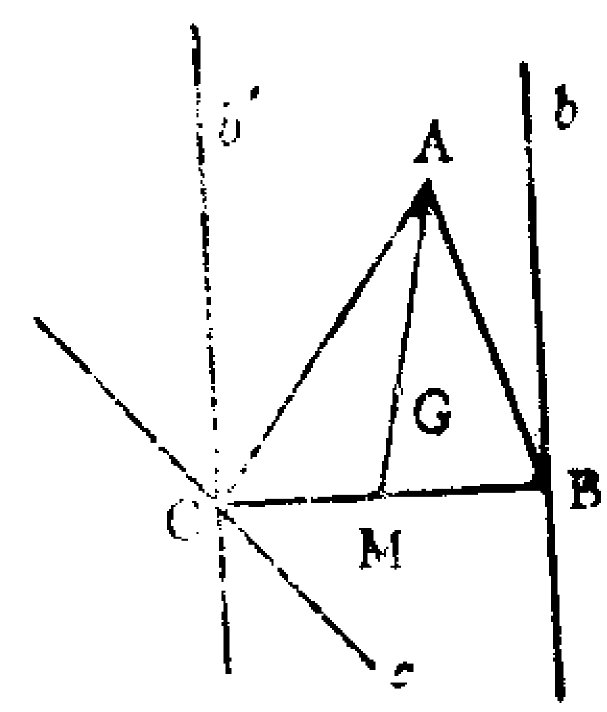


图27—33

34. 已知两边的高及第三边的中线，求作三角形（提示：自第三边的中点向他两边引垂线）。

解：设定长h_2、h_3、m_1，作$\triangle AME$，使$AM=m_1$，$ME=h_2/2$，$\angle AEM=90°$，作$\triangle AMF$，使$MF=h_3/2$，$\angle AFM=90°$，延长AM至D，使$MD=AM$，作$DB \parallel AE$而交AF于B，$DC \parallel AF$而交AE于C，则$\triangle ABC$为所求。

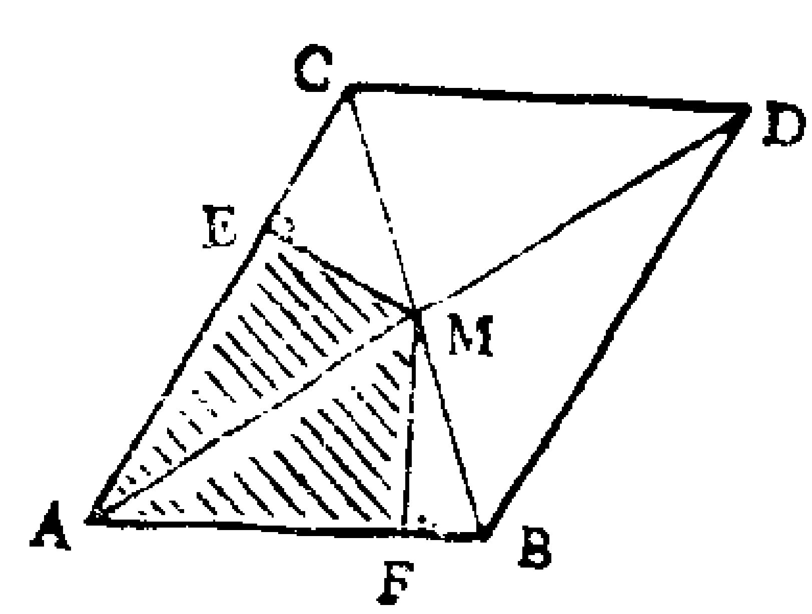


图27—34

35. 已知四边的中点位置，求作五边形，使第五边的两端分别落在两定直线上。

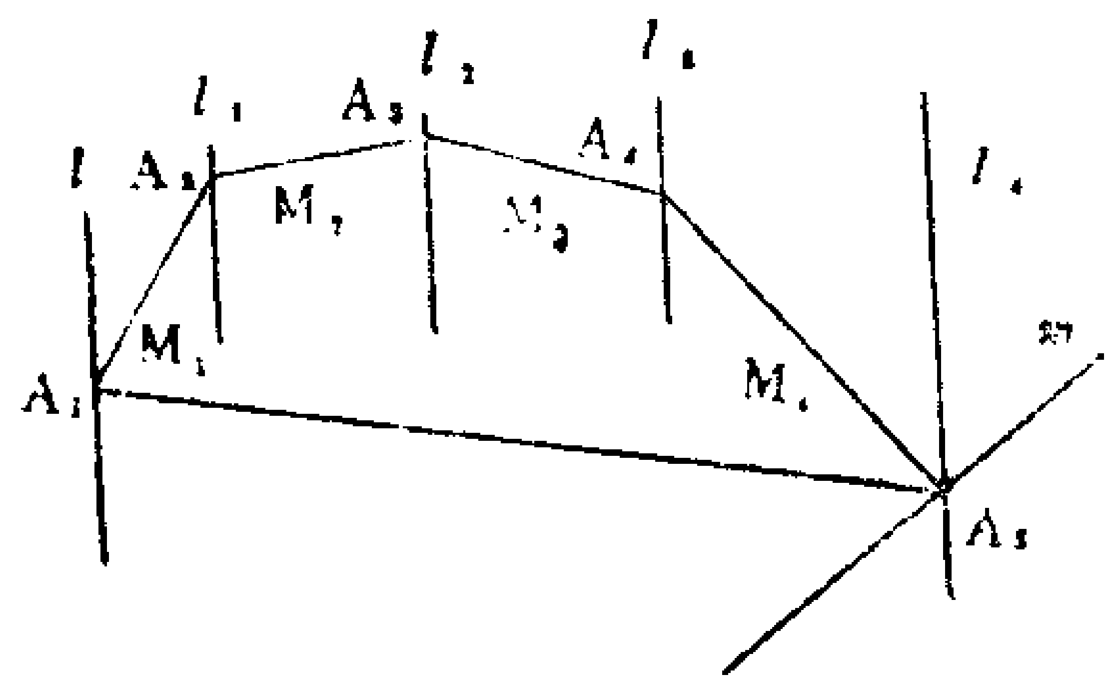


图27—35

解：设定点M_1、M_2、M_3、M_4及定直线l、M，以M_1、M_2、M_3、M_4为反射中心，将l连续反射变换到（l_1、l_2、l_3）l_4。令l_4交m于A_5，延长A_5M_4至A_4，使$M_4A_4=A_5M_4$，……$M_1A_1=A_2M_1$，则$A_1\cdots A_5$为所求。

36. 设A、B是在定直线l同侧的两定点。今有一定长线段PQ在l上滑动，试问这线段停在什么位置，才使折线$APQB$的长最短？

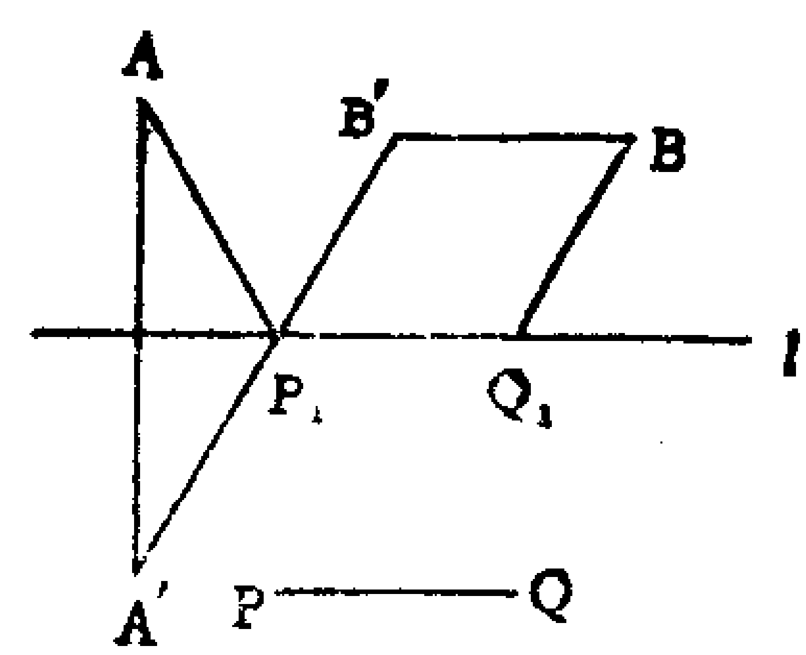


图27—36

解：以l为反射轴，将A反射到A'，

按l方向，将B平移到B'，使$BB'=QP$，连$A'B'$交l于P_1。在l上取一点Q_1，使$P_1Q_1=PQ$。则P_1Q_1为所求位置。

37. 在△ABC内，求作一平行于BC而两端各着于AB、AC两边的线段EF，并使合于下列条件之一：

（1）$BE+CF$等于定长；

（2）$AE+CF$等于定长。

解：（1）设定长s、p。在CA上取点D，使$CD=s$，作DG使$\angle CDG=\angle A/2$，G在BC上，作$GF\parallel AB$而交AC于F，作$FE\parallel CB$而交AB于E，则EF为所求。

（2）在AB上取点G，使$AG=p$，设$\angle A$平分线交BC于T，过G作$GP\perp AT$交BC于P，设GP中垂线交AB于E，作$EF\parallel BC$交AC于F，则EF为所求。

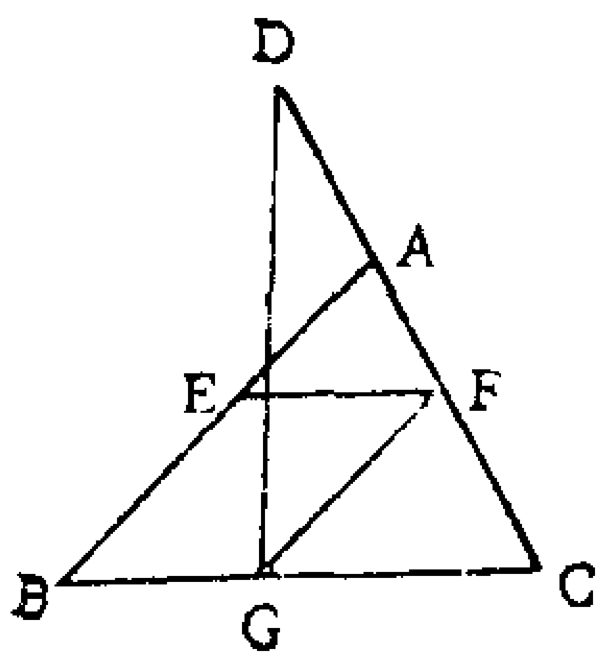


图27—37（1）

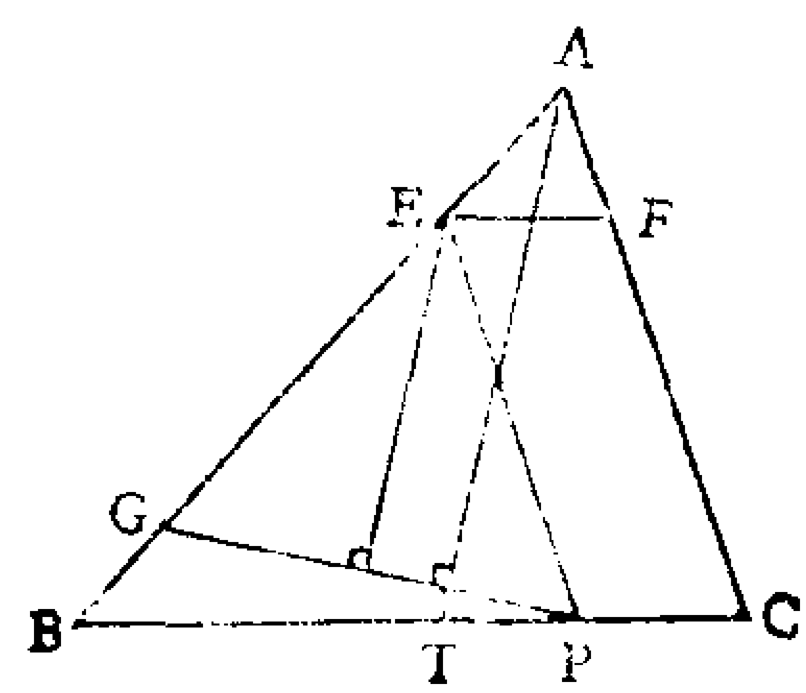


图27—37（2）

38. 设A、B各是已知平行线a、b上的定点，O是a与b间的定点。过O点求作一直线交a、b于P、Q，使$AP+BQ$等于定长。

解：设定长s，AB中点为M。作$MN\parallel a$且$MN=s/2$，连NO交a、b于P、Q，则PQ为所求。

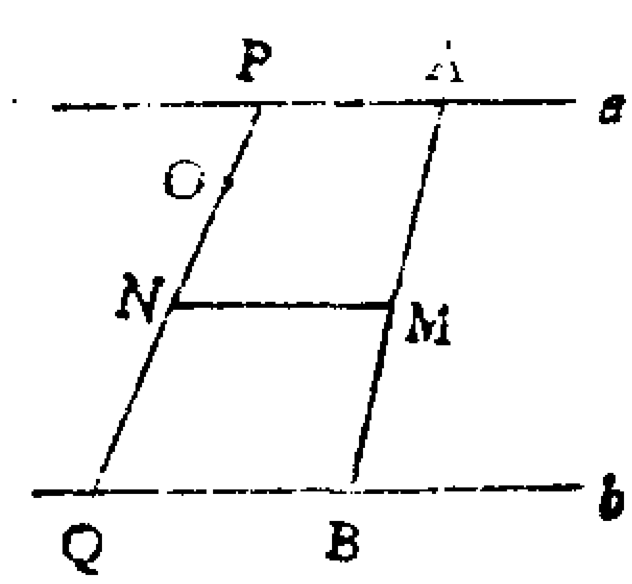


图27—38

习 题 二 十 八

11。已知两直线a、b及线外一点P，求过P作直线l交a、b于A、B，使$PA/PB=m/n$，其中m、n是给定的两线段。

解：在a上任取一点A_1，在PA_1上取点B_1，使$PA_1/PB_1=m/n$、过B_1作$a' \parallel a$而交b于B，连PB交a于A，则PA为所求。

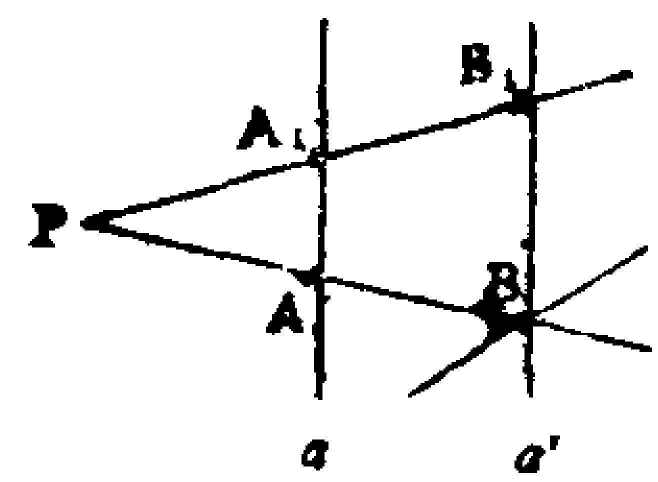


图28—11

12。已知共点的三直线a、b、c及线外一点P，试过P作直线l交a、b、c于A、B、C，使$AB/BC=m/n$，其中m、n是给定的两线段。

解：在c、b上各任取一点E、M，在EM上取点F,使$MF/EM==m/n$，作$FG \parallel c$而交a于G，过P作直线$l \parallel GM$而交a、b、c于A、B、C。则l为所求。

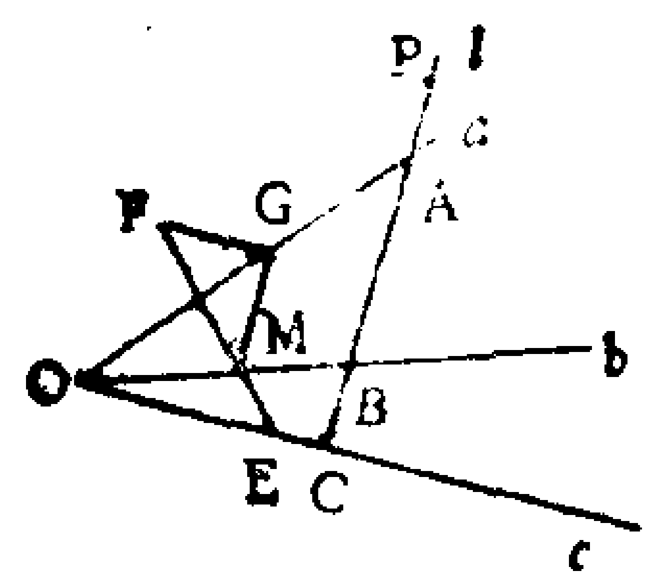


图28—12

13。过圆内一已知点P作弦，使$AB=BP/2$。

解设$\odot O(r)$为定圆，延长OP至O'使$PO'=OP/2$。作$\odot O'(r/2)$交$\odot O(r)$于A，连AP交$\odot O$于另点B，则AB为所求。

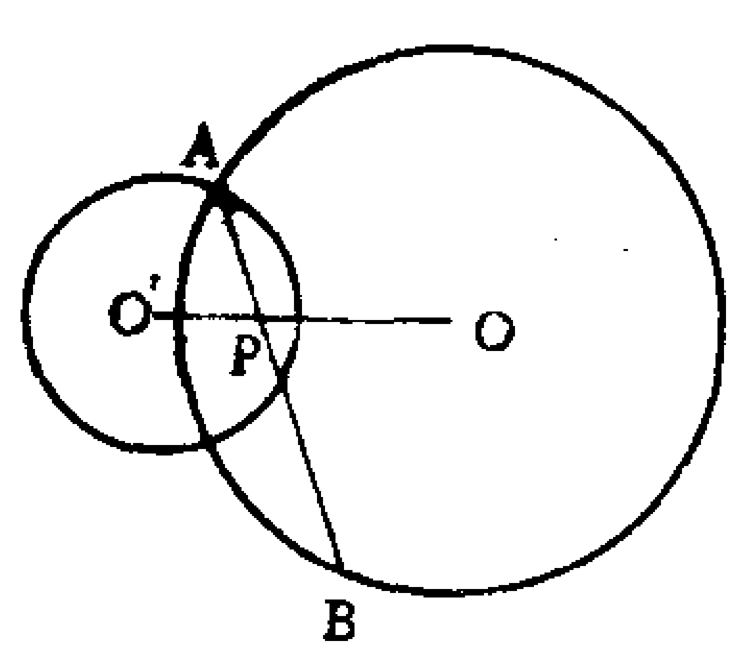


图28—13

14. 过圆外一已知点P作割线交圆于A、B，使$PA/AB=m/n$，m、n是给定的两线段。

解：在PO上取点O'，使$PO/OO'=m/n$，作$\odot O'$〔$(m+n)r/m$〕交$\odot O$于B，连PB交$\odot O(r)$于点A，则割线PAB为所求。

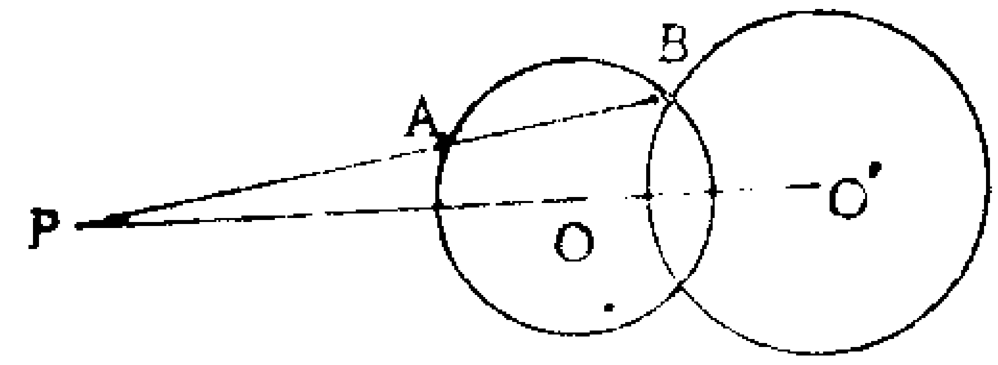


图28—14

15. 已知共点的三直线a、b、c，试以a上一点为心作圆，使与b相切而在c上截下定长的弦。

解：设定长l。a、b、c共点P，在a上一任取点O'，作$\odot O'$切于b而交c于A'、B'。在a上作点O，使$PO=l\cdot PO'/A'B'$，作$\odot O$切于b，则$\odot O$为所求。

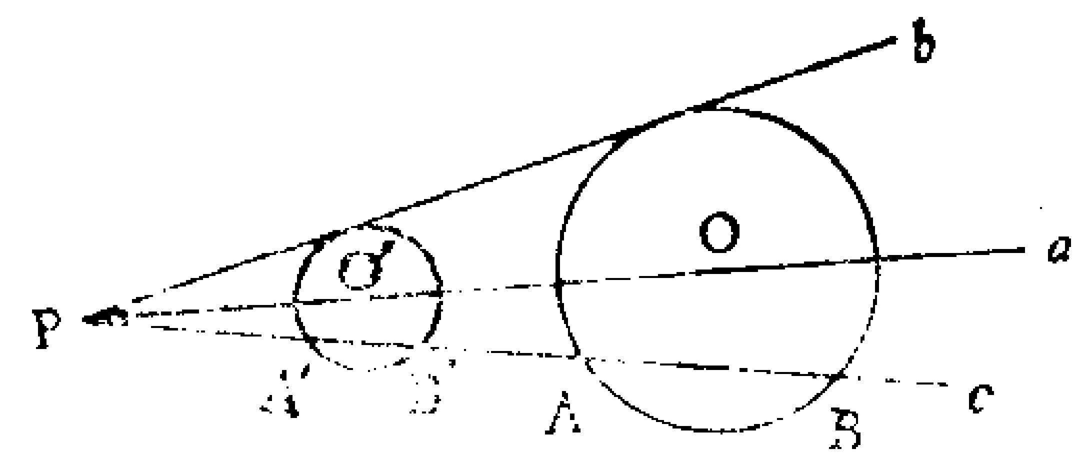


图28—15

16. 已知两直线a、b及线外一点P，在a上求一点A，使与b及P等距。

解：设a、b共点O（$a\parallel b$另外讨论）在a上任取一点A'，作$A'B'\perp b$于B'。在OP上取一点P'，使$A'P'=A'B'$，作$PA\parallel P'A'$交a于A，则A为所求。

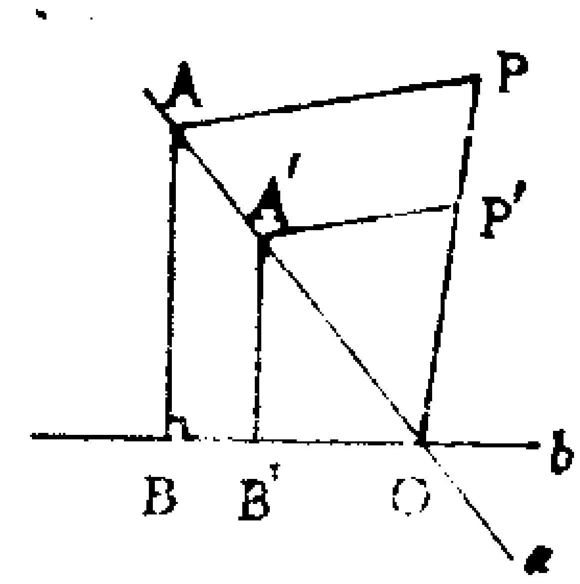


图28—16

17. 已知相交的两直线a、b及线外一点P，求作定向直线l交a、b于A、B，使$\angle APB$等于定角θ。

解：设定向直线m，过P作一直线c使c与a、b共点或互相平行，作$A'B' \parallel m$而交a、b于A'、B'。

以$A'B'$为弦，θ为张角作弓形弧交c于P'。作$PA \parallel P'A'$而交a于A，$PB \parallel P'B'$而交b于B，则AB为所求。

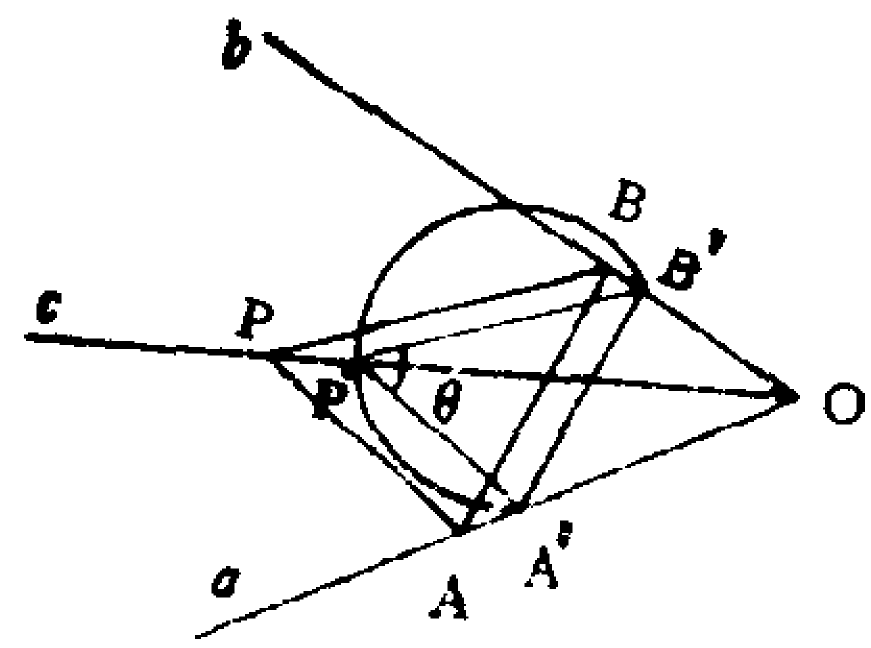


图28—17

18. 已知三直线a、b、c及a上一点A，在b、c上各求一点B、C，使直径为BC的圆切a于A。

解：作b关于A的对称线b'，应用上题作$B'C \perp a$而交b'、c于B'、C，且$\angle B'AC = 90°$，延长$B'A$至B使$AB = B'A$，则B、C为所求。

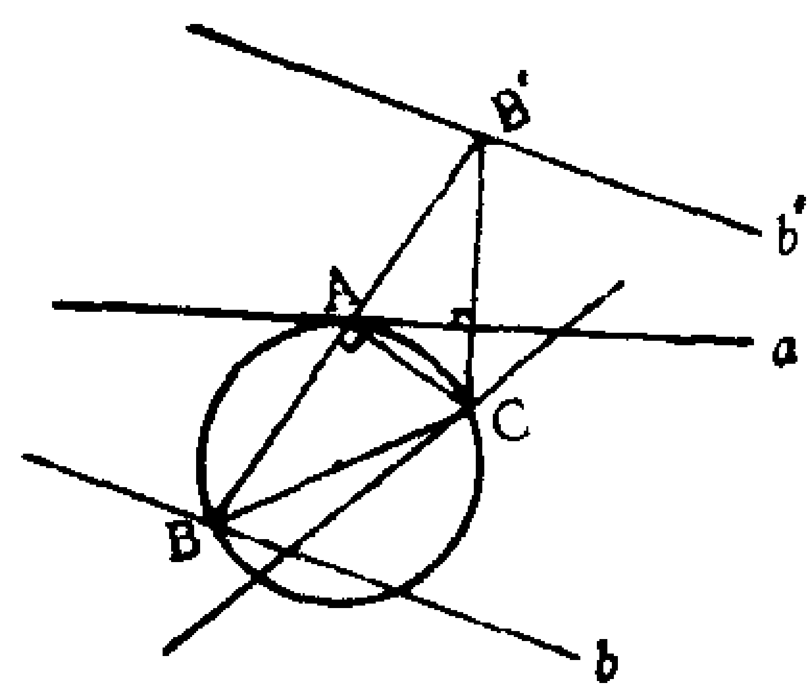


图28—18

19. 在定圆中作一弦，使被两条定半径三等分。

解：设OA、OB是定圆$\odot O$的两定半径。任作一直线$C_1D_1 \parallel AB$而交OA、OB于C_1、D_1。在C_1D_1两侧延长线上各取一点E_1、F_1使$E_1C_1 = C_1D_1 = D_1F_1$，连OE_1、OF_1交$\odot O$于E、F。设E、F交OA、OB于C、D。则EF为所求。

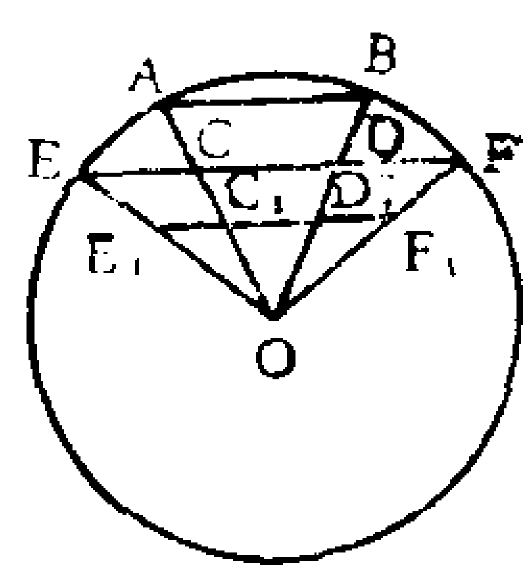


图28—19

20. 已知一梯形，求作平行于底边的直线，使两腰及两对角线(所在直线)截下三个相等的线段。

解：设梯形 $ABCD$，任作一直线 $F'G' \parallel AB$ 交 BD、AC 于 F'、G'，在 $F'G'$ 两侧延长线上各取一点 E'、H'，使 $E'H' = F'G' = G'H'$，令 AC、BD 交于 O，连 OE'、OH' 交 AD、BC 于 E、H，连 EH 交 BD、AC 于 F、G。则直线 EH 为所求。

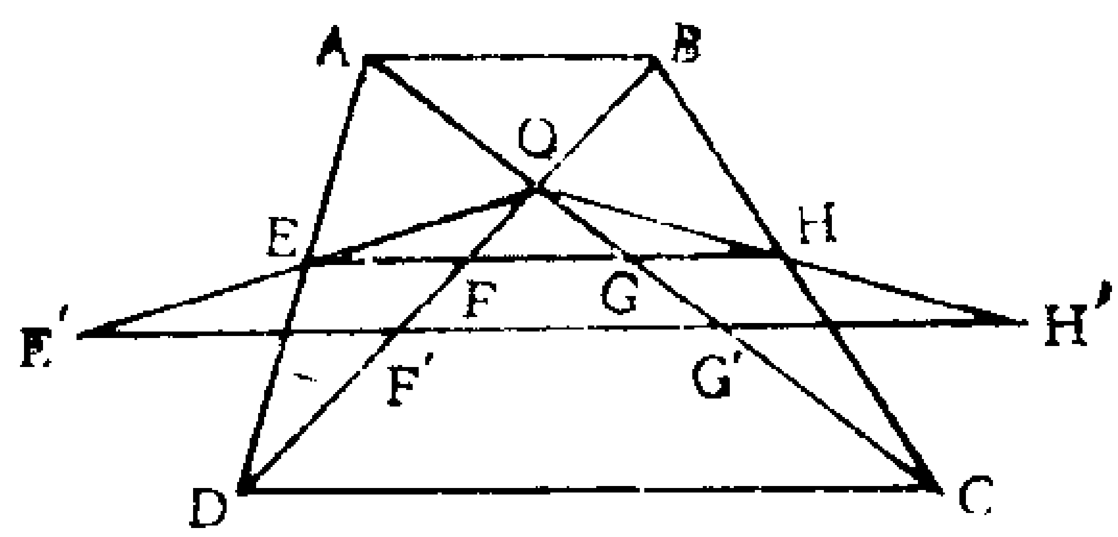


图28—20

21. 求作一三角形，使三边分别平行于一已知三角形的三边，并使三顶点分别落在另一已知三角形三边所在的直线上。

解：$\triangle D'E'F'$、$\triangle ABC$ 为已知的，任作一直线 $E_1F_1 \parallel E'F'$ 而交 AC、AB 于 E_1、F_1。作 $F_1D_1 \parallel F'D'$、$E_1D_1 \parallel E'D'$ 连 AD_1 交 BC 于 D，作 $DF \parallel D'F'$ 而交 AB 于 F，$DE \parallel D'E'$ 而交 AC 于 E，则 $\triangle DEF$ 为所求。

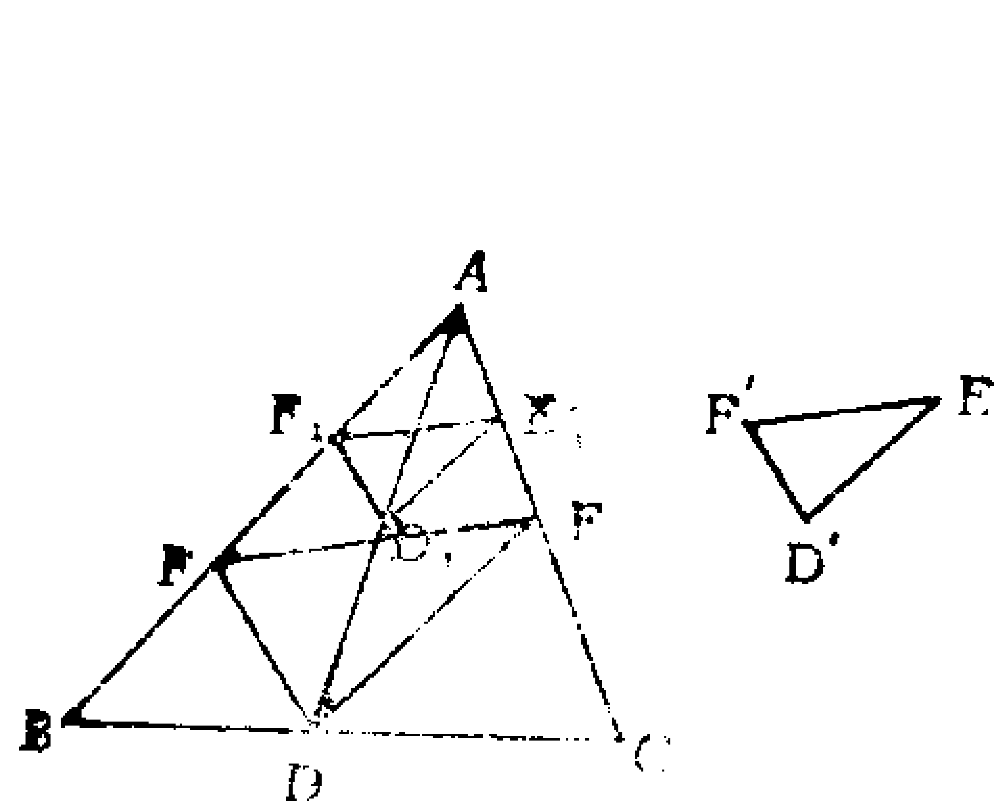


图28—21

22. 已知一边、这边的一邻角、这角的对边与其中线的交角，求作三角形。

解：设定长a、定角β、θ。取线段$BC=a$，作射线BX，使$\angle XBC=\beta$，过BC中点M作$l \parallel BX$，以BC为弦，θ为张角作弓形弧交l于N，连CN交BX于A，则$\triangle ABC$为所求。

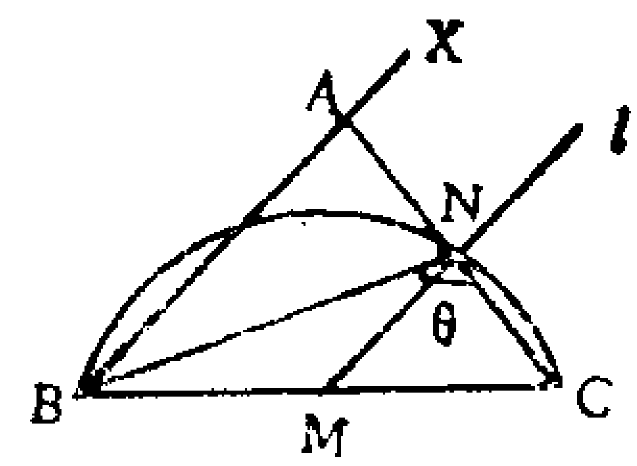


图28—22

23. 已知一角及两夹边的中线，求作三角形。

解：设定角α，及定长m_2、m_3，取$BG=2m_2/3$，在BG上取点D使$BD=m_2/2$，以BD为弦，α为张角作弓形弧交$\odot G(m_3/3)$于N，延长NG至C使$GC=2NG$，延长BG至M使$GM=BG/2$。设BN、CM交于A，则$\triangle ABC$为所求。

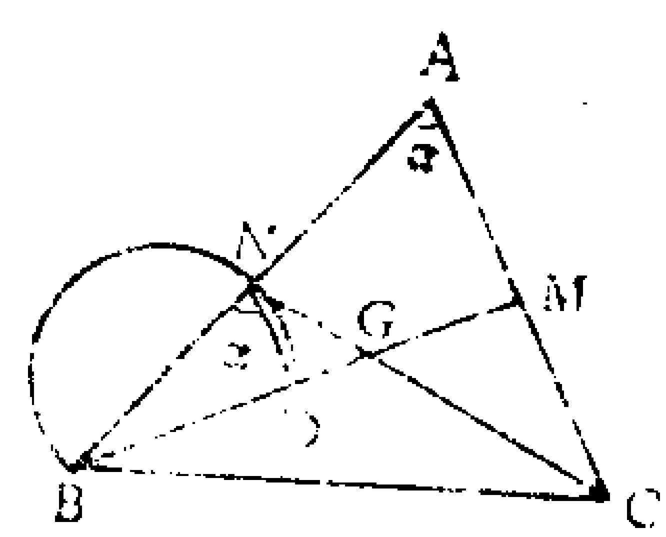


图28—23

24. 已知一边与其中线的交角及其他两中线的长，求作三角形。

解：设定角θ，定长m_2、m_3。取线段$CD=4m_3/3$，设G

为CD中点，以CD为弦，θ 为张角作弓形弧交$\odot G(2m_2/3)$于B，设BC中点为L，延长LG至A使$GA=2LG$，则$\triangle ABC$为所求。

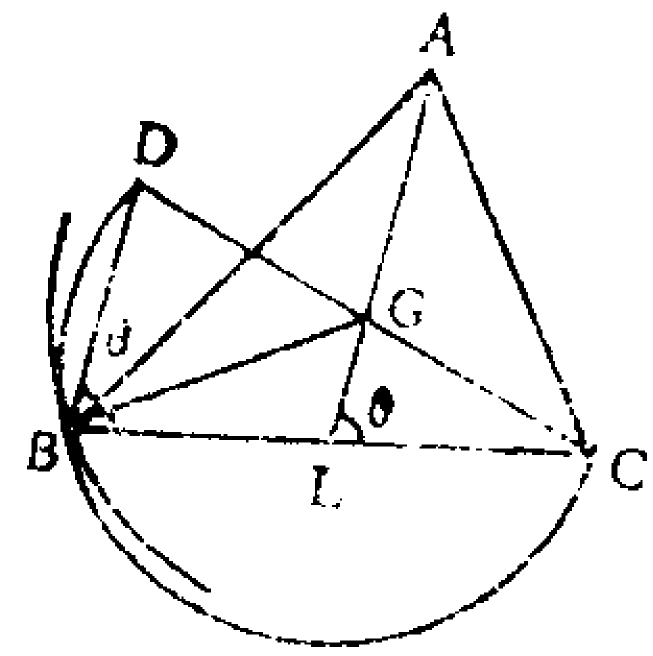


图28—24

25. 已知一双底角及两对角线，求作梯形。

解：设定角α、β，定长e、f。任作一$\triangle OA'B'$使$\angle OA'B'=\alpha$，$\angle OB'A'=\beta$，M为$A'B'$中点。按§57例题64，作$A'B'$两点之比为$f:e$的阿氏圆交OM于P'。延长$A'P'$交OB'于C'，在OP'上取点P使$OP=f\cdot OP'/A'D'$，过P作$AC \parallel A'P'$交OA'、OB'于A、C；过P作$BD \parallel B'P'$交OA'、OB'于D、B。则$ABCD$为所求。

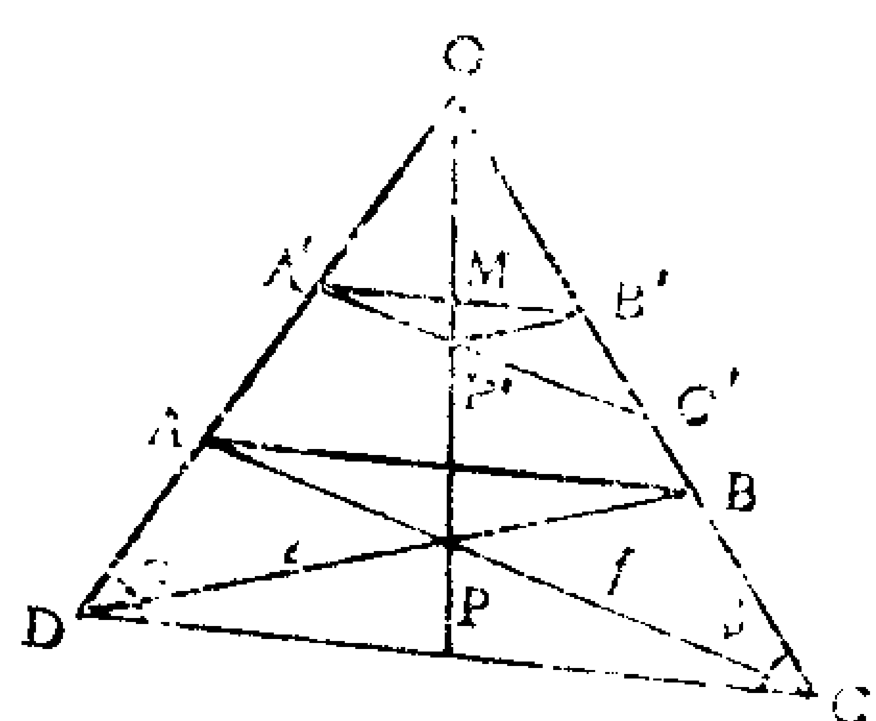


图28—25

26. 已知底与高的和及顶角的大小，求作等腰三角形。

解：设定长s及定角α，作$\angle XAY=\alpha$，在AX上任取一点B'，在AY上取一点C'使$AC'=AB'$。

如图作 $E'B' \perp B'C'$ 且 $E'B' = B'C'$，在$\angle XAY$平分线上取一点D使$AD = s$，作AD垂线DE交AE'于E。如图作$BE \perp ED$交AX于B，在AY上取一点C使$AC = AB$。则$\triangle ABC$为所求。

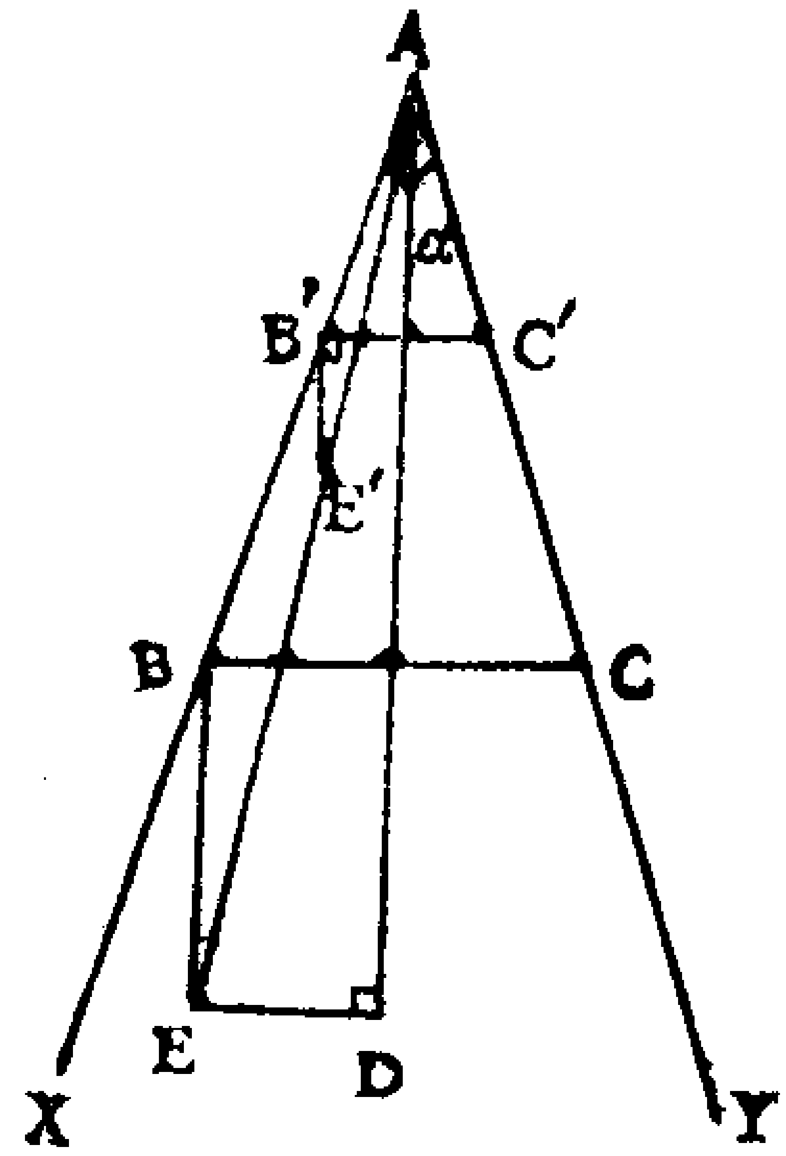


图28—26

27。在等腰三角形$\triangle ABC$底边BC的中垂线上求一点O，使合于$AO = OB + OC$。

解：在BC中垂线AM上任取一点O'，在AB上取一点B'使$O'B' = O'A/2$，作$BO \parallel B'O'$交AM于O，则O为所求。

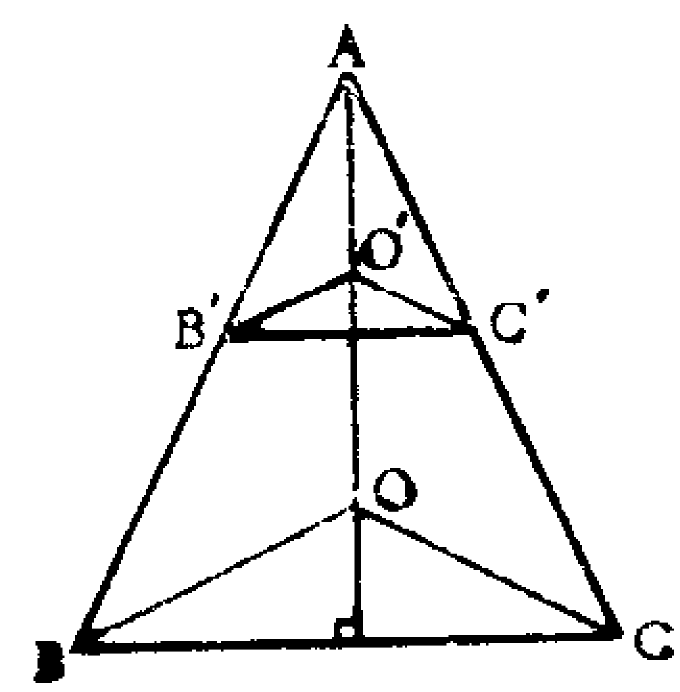


图 28—27

28。已知交于O的两直线a、b及线外一点P，求过P但不过O作直线l交a、b于A、B，使$OA + OB = 2AB$.（提示：作$\angle AOB$的平分线。）

解：作a、b夹角平分线l.在a上任取一点A'，在l上求一点T'，使$A'T' = A'O/2$。过P作平行于$A'T'$的直线l交a、b于A、B，则l为所求。

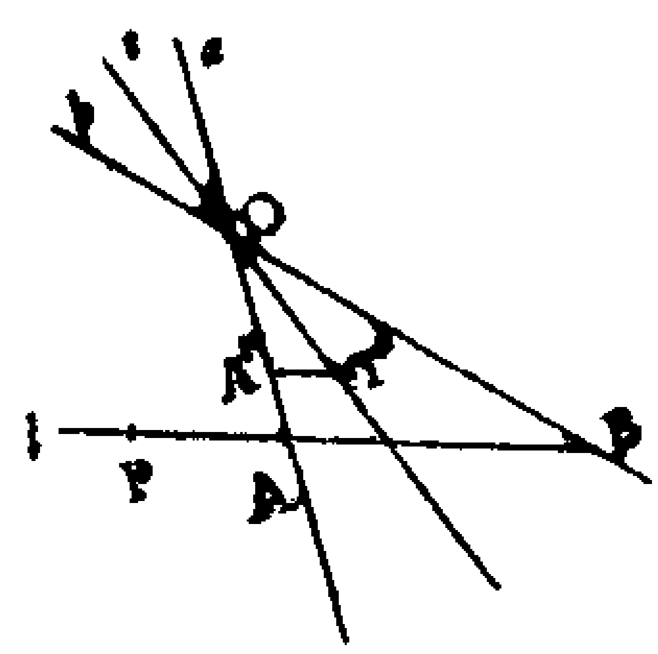


图 28—28

29. 在给定的半圆中，求作已知周长的内接矩形。（所谓半圆的内接矩形，是说后者有一边落在前者的直径上，其他两顶点落在弧上。）

解：设定长s，O为定半圆圆心，MN为直径。

在MN上取点E使$OE=s/4$，在MN上任取一点D'，作$D'L'\perp MN$且$D'L'=D'E$，延长$D'L'$至A'使$L'A'=D'L'$。连EA'交半圆于A，作$AB\parallel MN$交半圆于B，作$AD\perp MN$于D，$BC\perp MN$于C，则$ABCD$为所求。

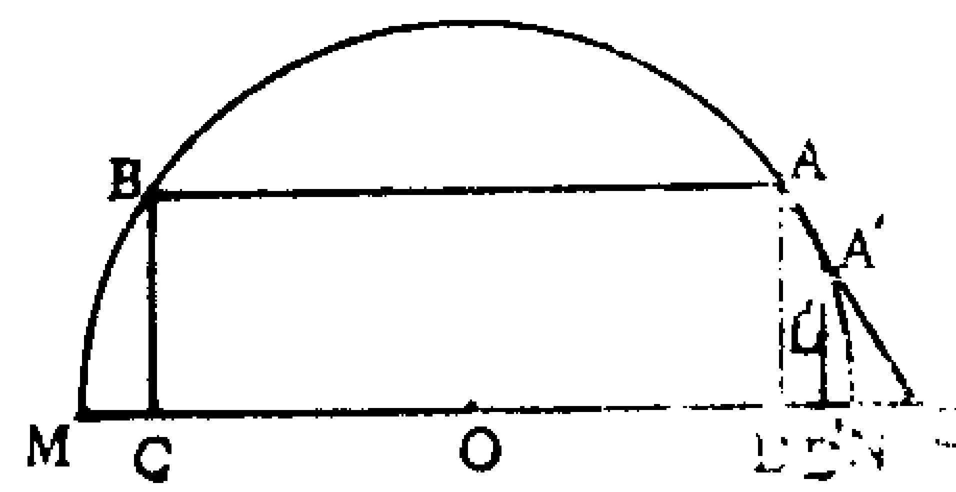


图28—29

30. 已知三角形两底角均非钝角，求作周长一定的矩形，使它有一边落在已知三角形的底边上，其他两顶点分别落在两腰上。

解：设定$\triangle ABC$（$\angle B\leqslant 90°$，$\angle C\leqslant 90°$）、定长s。作$AD\perp BC$于D，在BC上取点P使$DP=AD$，在BC上取点R使$BR=s/2$，过R作AB的平行线与过P的BC垂线交于Q，过Q作BC的平行线交AB、AC于E、F，作$EH\perp BC$于H，$FG\perp BC$于G。则$EFGH$为所求。

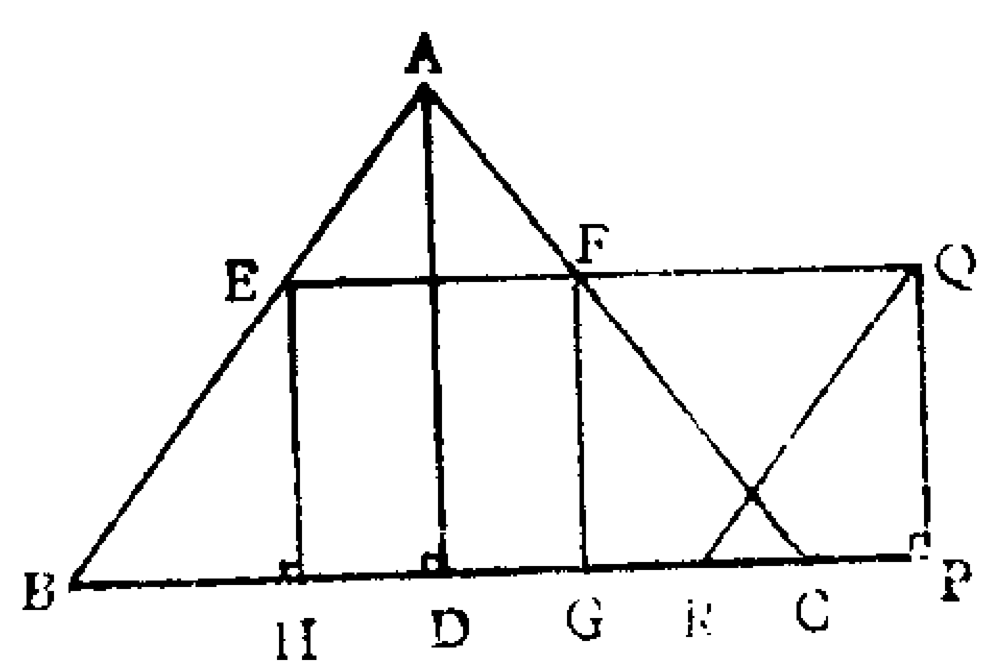


图28—30

31. 在$\triangle ABC$内，求作一平行于BC而两端各着于AB、AC两边的线段EF，并使适合下列条件之一：

(1) $EF^2 = AE \cdot BE$，

(2) $EF^2 = BE \cdot CF$；

(3) $EF^2 = BE^2 + CF^2$。

解：(1) 过B作直线l，使l与AB夹角等于$\angle C$。设l交AC于O，M为BC中点，连OM交AB于E，作$EF \parallel BC$交AC于F，则EF为所求。

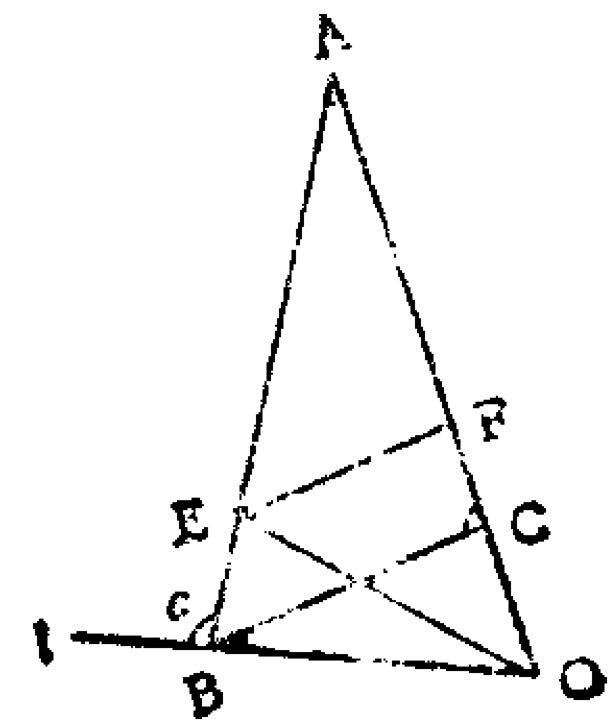


图28—31 (1)

(2) 在AB上任取一点E'，作$E'C' \parallel AC$交BC于C'，作$E'F' \parallel BC$且$E'F' = \sqrt{E'B \cdot E'C'}$。连$BF'$交$AC$于$F$，作$FE \parallel CB$交$AB$于$E$，则$EF$为所求。

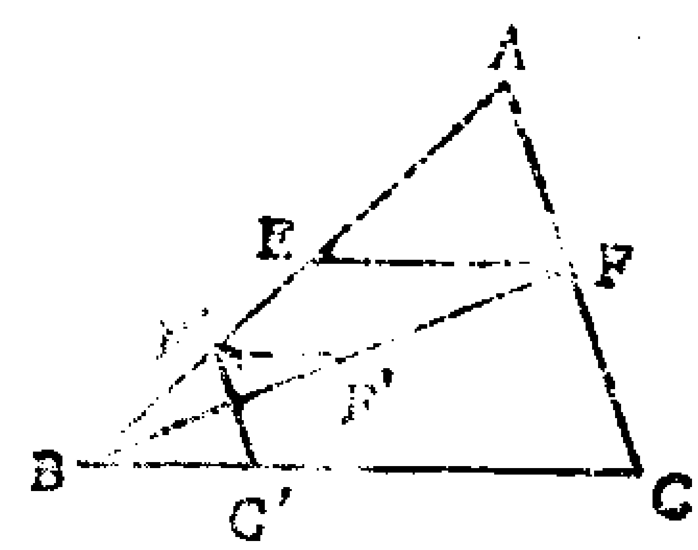


图28—31 (2)

(3) 在AB上取一点E'，作$E'C' \parallel AC$交BC于C'，作$E'F' \parallel BC$且$E'F' = \sqrt{E'B^2 + E'C'^2}$，连$BF'$交$AC$于$F$，作$FE \parallel CB$交$AB$于$E$，则$EF$为所求。

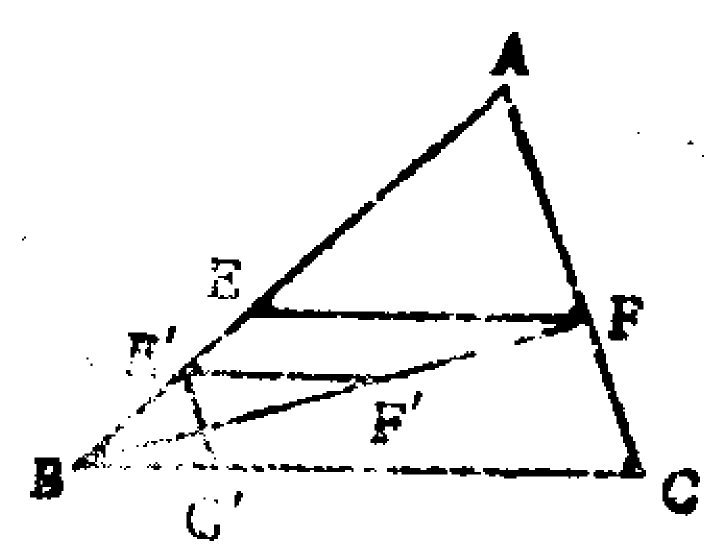


图28—31 (3)

习 题 二 十 九

22．求过两已知点作一圆，使正交于一已知圆。

解：已知两点A、B及$\odot O$．设A对$\odot O$的幂为p，在AB上作一点B'使$AB\cdot AB'=p$．作$AD\perp B'O$于D，作AB中垂线交AD于P，则$\odot P(PA)$为所求。

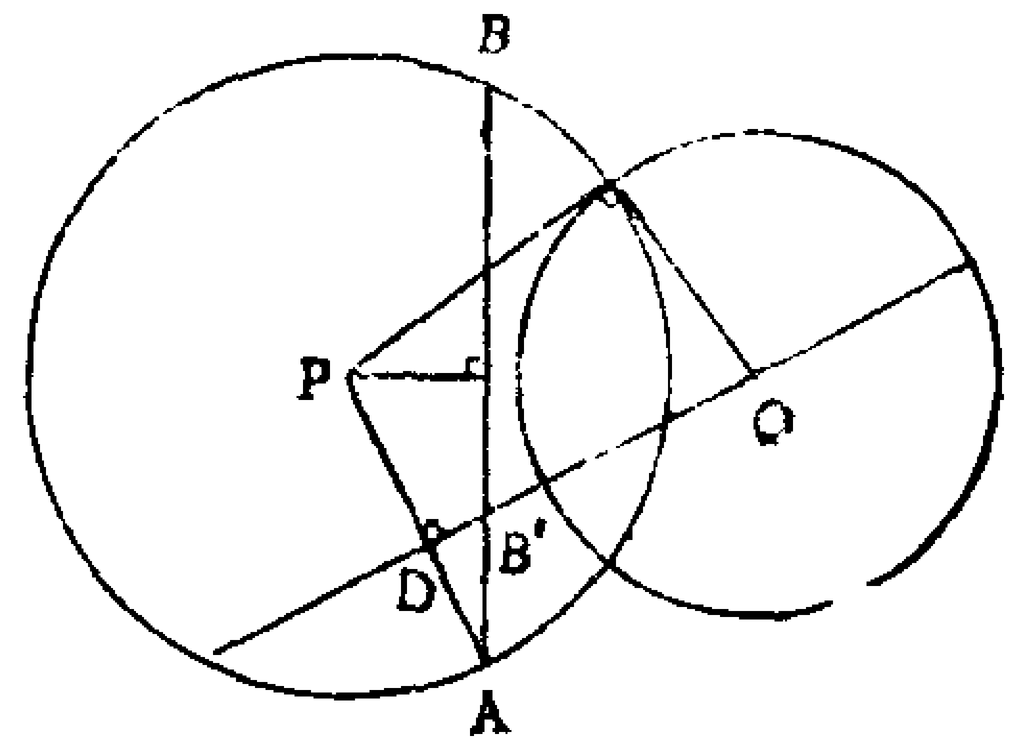


图29—22

23．求过一已知点作一圆，使同时正交于两个已知圆。

解：已知点A及$\odot O_1$、$\odot O_2$．设A对$\odot O_1$的幂为p，以A为中心，p为反演幂将$\odot O_2$施行反演变换Γ到$\odot O_2'$，连O_1O_2'．对O_1O_2'施行反演变换Γ使之变为$\odot O$，则$\odot O$为所求。

24．求过两已知点作一圆，使径割一已知圆。

解：已知点A、B及$\odot O(r)$．在AO上取点C使$\overline{OA}\cdot\overline{OC}=-r^2$．则$\odot ABC$为所求。

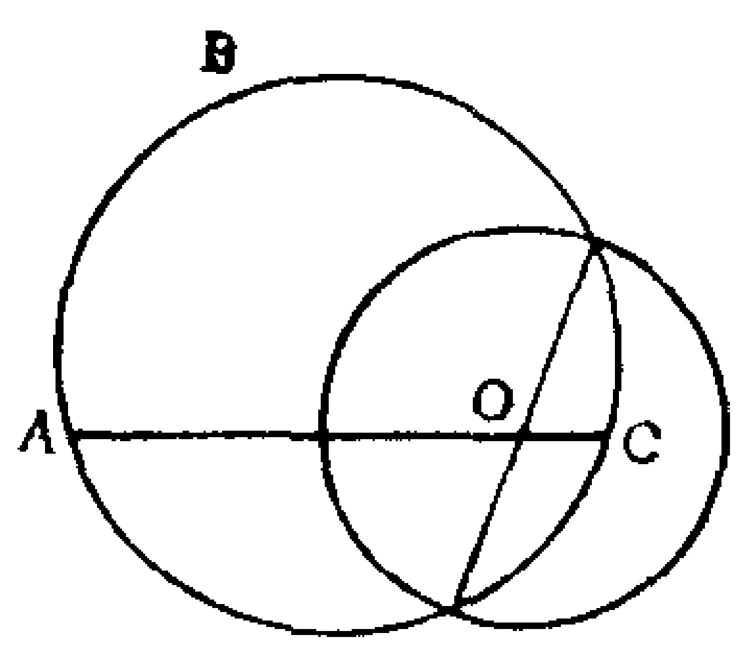


图29—24

25．求过一已知点作一圆，使同时径割两个已知圆。

解：已知点A及$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$．在AO_1、AO_2

上各取一点B、C使$\overline{O_1A}\cdot\overline{O_1B}=-r_1^2$，$\overline{O_2A}\cdot\overline{O_2C}=-r_2^2$。则$\odot ABC$为所求。

26. 求过一已知点作一圆，使正交于已知圆且径割另一已知圆。

解：已知点A及$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$。

在AO_2上取点B使$\overline{O_2A}\cdot\overline{O_2B}=-r_2^2$。利用22题作$\odot O$使过$A$、$B$且正交于$\odot O_1$。则$\odot O$为所求。

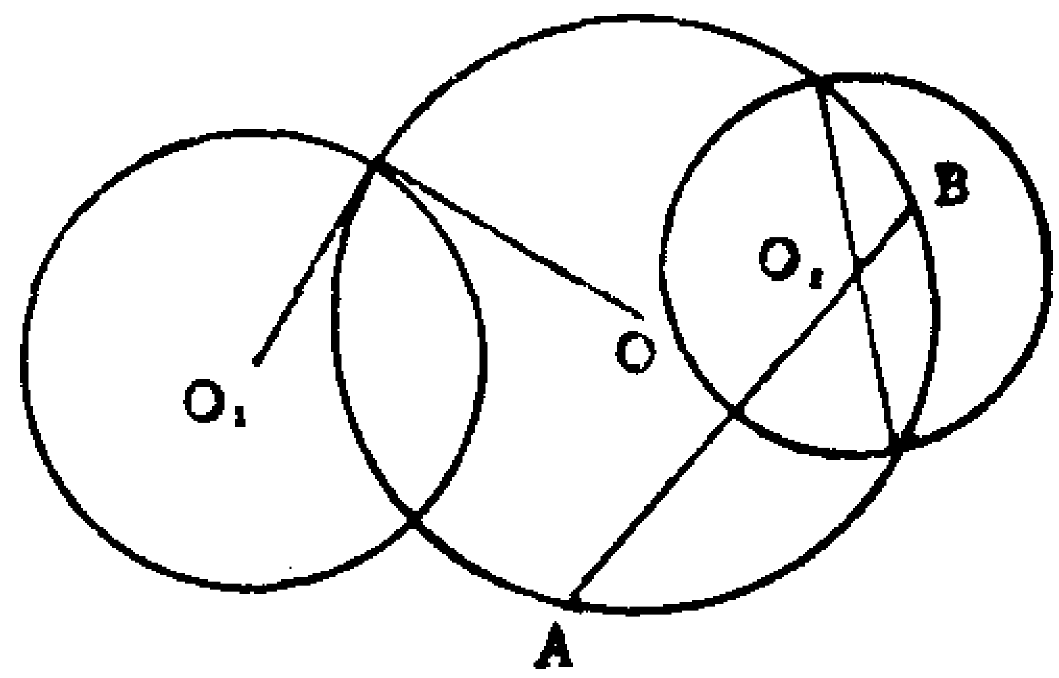


图29—26

27. 设三条定直线a、b、c会于一点O，A、P是a上异于O的两定点。求过O、P两点作一圆，这圆再交b、c于B、C，使得A、B、C三点共线。

解：以A为中心，$\overline{AP}\cdot\overline{AO}$为反演幂，将$c$变成$\odot S$，设$\odot S$交$b$于$B$，连$AB$交$c$于$C$。则$\odot POB$为所求。

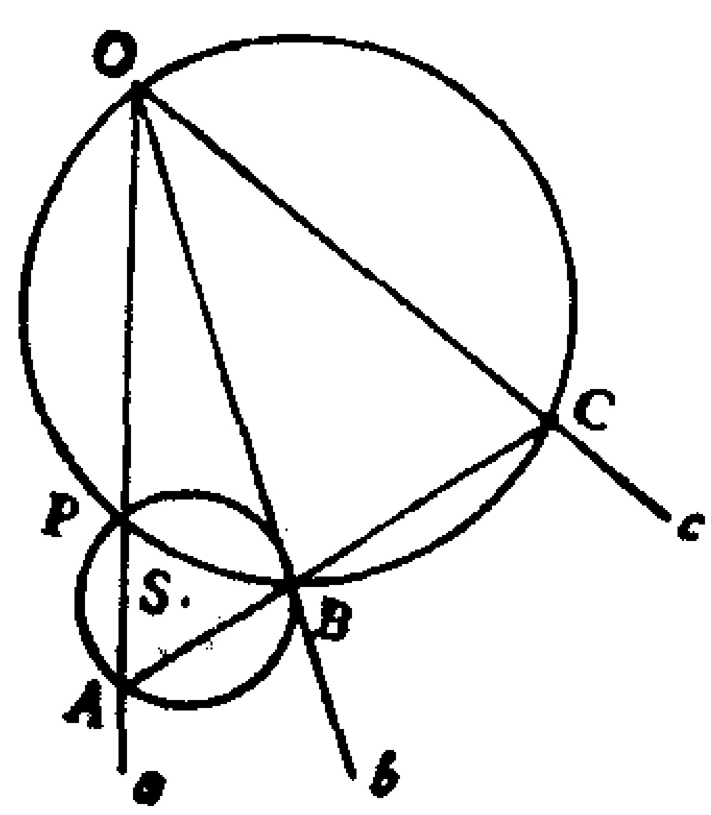


图29—27

28. 已知$\triangle ABC$及线段r，求作直线l过A且要它的垂线BM、CN满足$\overline{BM}\cdot\overline{CN}=-r^2$。

解：作$\overline{CD}=\overline{BA}$，在$AC$上求一点$G$使$\overline{CA}\cdot\overline{CG}=-r^2$，过$G$作直线$m\perp$

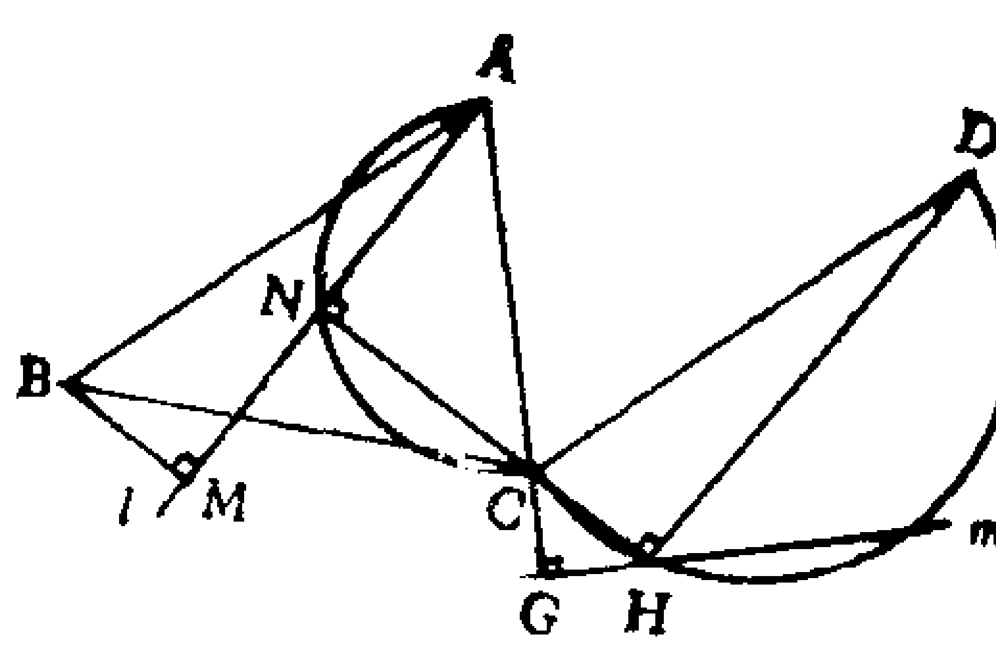


图29—28

AC，以CD为直径作圆交 m 于H，以AC为直径作圆交 HC于N，作 $BM\perp AN$于M。则直线AN为所求。

29. 设P是$\odot O$内的定点，求作弦AB，使$\angle APB=90°$，且面$PAB=a^2$，a是给定线段。

解：以P为中心，将$\odot O$旋转$90°$到$\odot O'$。以P为中心，a^2为反演幂，将$\odot O$反演变换到$\odot O''$，设$\odot O''$交$\odot O'$于B'。又以P为中心，将PB'旋转$-90°$到PB，设半线PB'交$\odot O$于A，则AB为所求。

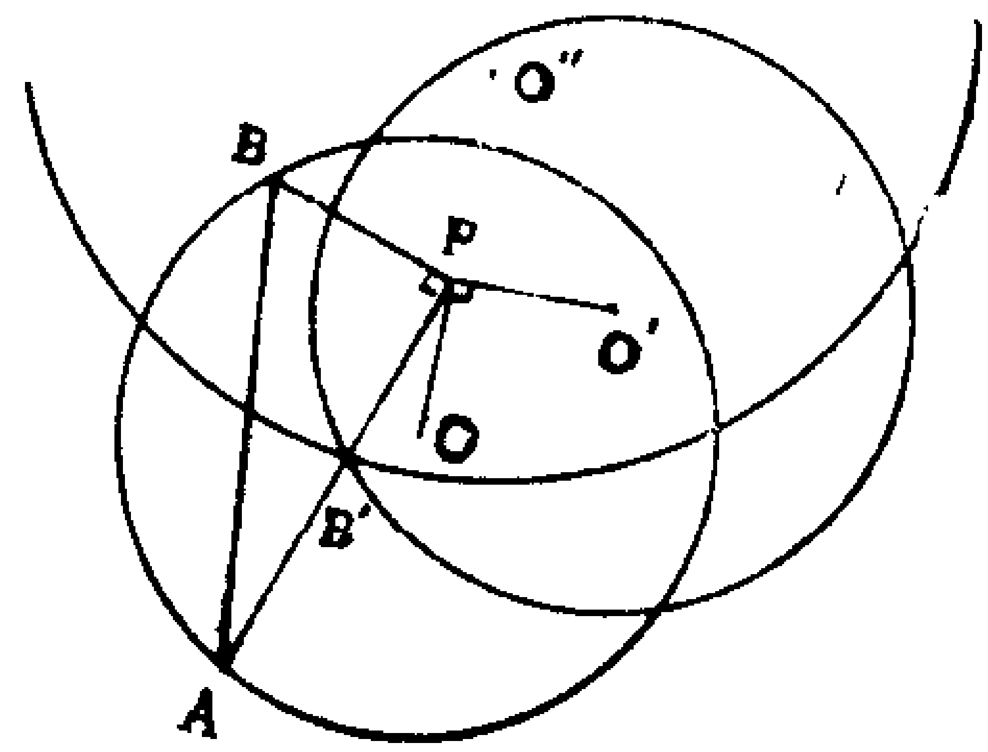


图29—29

30. 已知面积，求作一菱形，使它的顶点以次落在一已知平行四边形所在的直线上。

解：已知面积S，O是$\square ABCD$中心。以O为中心，将BC旋转$90°$到l。以O为中心，$S/2$为幂施行反演变换使AB变成$\odot P$，设交l于Q，连OQ交AB、CD于E、G，过O作EG的垂线交BC，DA于F、H。则$EFGH$为所求。

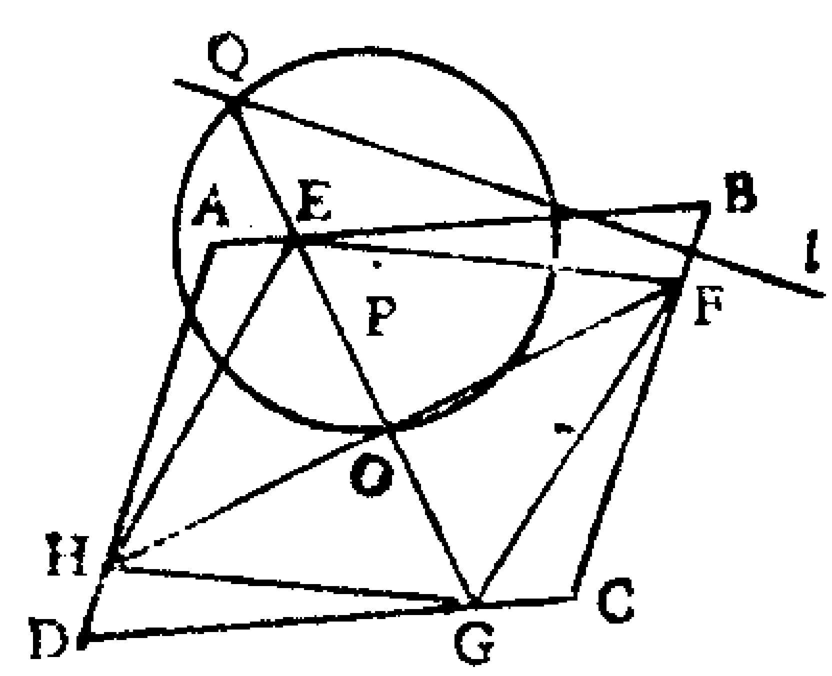


图29—30

31. 已知面积、一角及这角是顶点位置，求作三角形，使其他两顶点分别落在一个已知圆和一条已知直线上。

解：已知面积S、角α、点A、$\odot O$、直线l。

以A为中心将l旋转α到l'。

以A为中心，$2S/\sin\alpha$为幂施行反演，将$\odot O$变换到$\odot O'$。

令$\odot O'$交l'于B'。设B是AB'与$\odot O$的一交点($O'B' \nparallel OB$)。以A为中心，将AB'旋转$-\alpha$到AC。则$\triangle ABC$为所求。

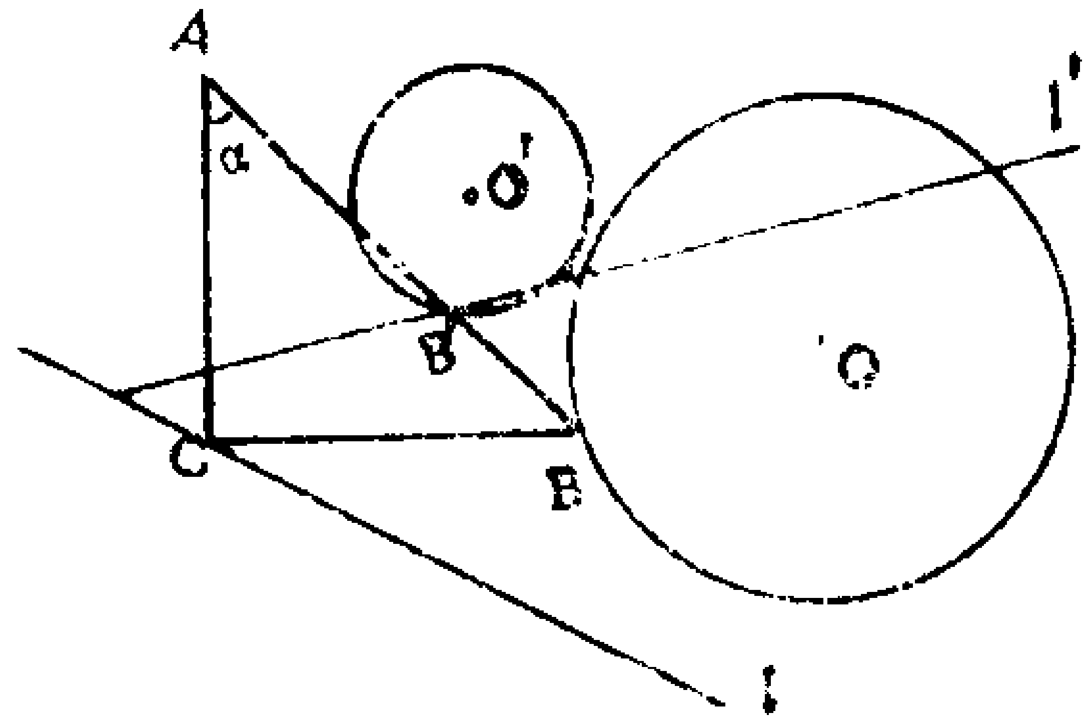


图29—31

32. 已知三圆$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$共点P，求作三圆的公切圆。

解：以P为中心，任取定一反演变换Γ。设在Γ下，$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$变成直线l_1、l_2、l_3。作l_1、l_2、l_3的公切圆$\odot O'$(一般有四个)。

再施行反演变换Γ，使$\odot O'$变成$\odot O$。则$\odot O$为所求。

33. 求过两已知点作一圆，使切于一已知圆。

解：已知定点A、B及定圆$\odot O$。

设A对$\odot O$的幂为p，在AB上取B'使$\overline{AB}\cdot\overline{AB'}=p$。过$B'$作直线$l$切$\odot O$。作$AD\perp l$于$D$，设$AB$中垂线交$AD$于$P$。则$\odot P(PA)$为所求。

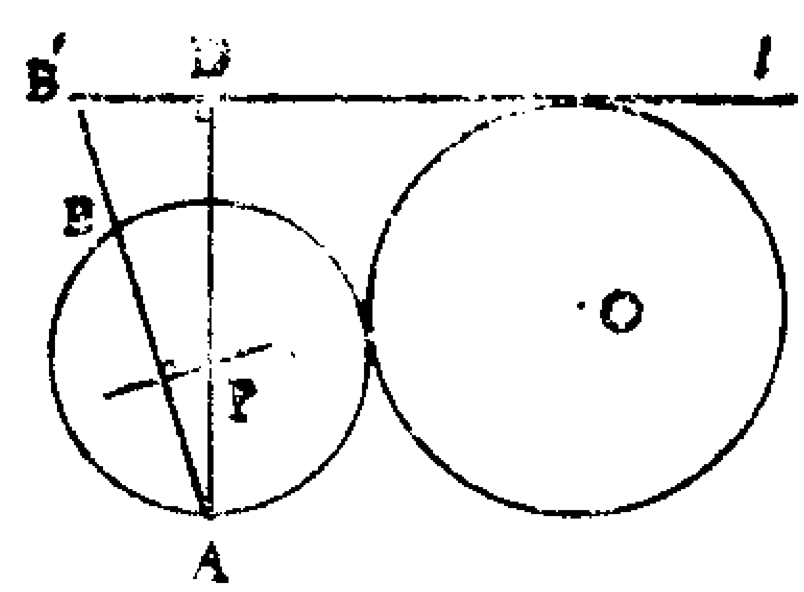


图29—33

34. 求过一已知点作一圆，使切于一已知圆和一已知直线。

解：已知点A、$\odot O$、直线l。设A对$\odot O$的幂为p。以A为中心，p为幂施行反演变换Γ，使l变成$\odot L$。

作$\odot O$、$\odot L$的公切线m，再施行Γ使m变换到$\odot M$。则$\odot M$为所求。

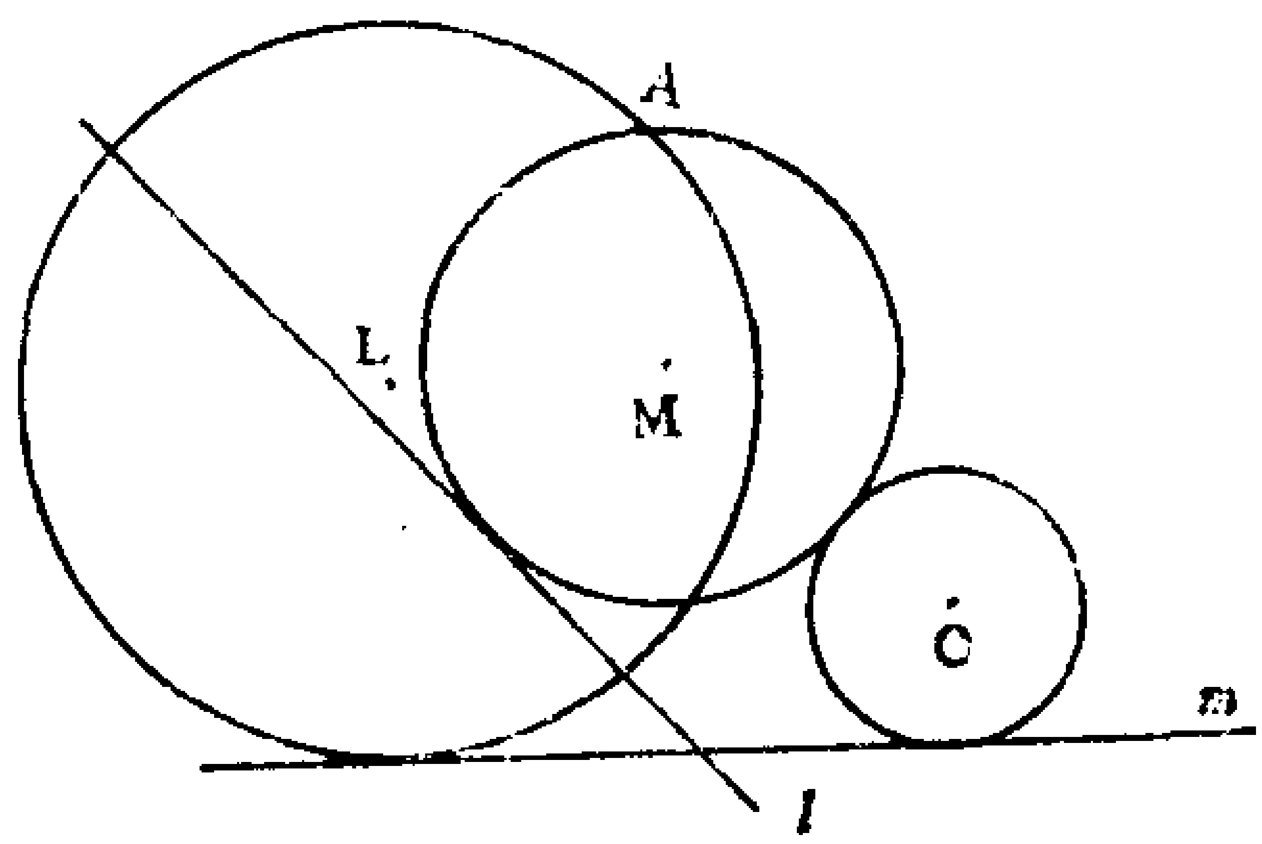


图29—34

35。求过一已知点作一圆，使切于一已知圆且正交于另一已知圆。

解：已知点A、$\odot O_1$、$\odot O_2$。设A对$\odot O_2$的幂为p。

以A为中心，p为反演幂施行反演Γ，使$\odot O_1$变换到$\odot O_1'$。过O_2作$\odot O_1'$的切线l。

再施行Γ把l变换到$\odot O$。则$\odot O$为所求。

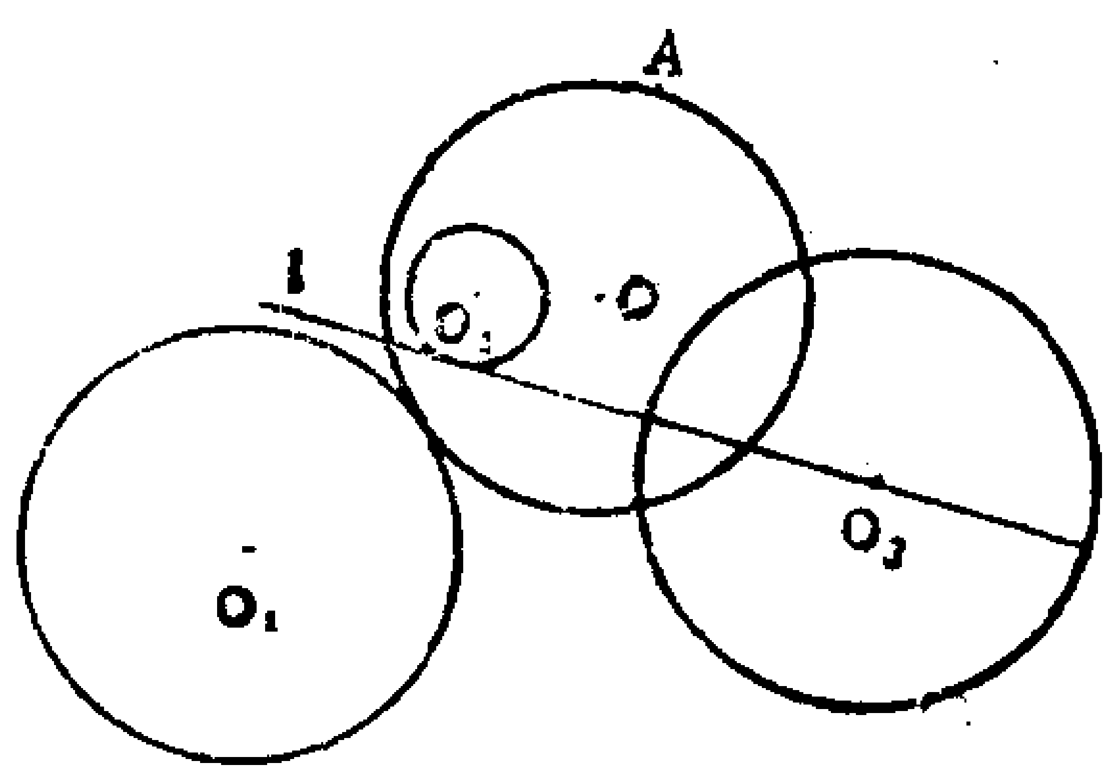


图29—35

36。求过一已知点作一圆，使切于一已知圆且径割另一已知圆。

解：已知点A、$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$。

在AO_2上取点B使$\overline{O_2A}\cdot\overline{O_2B}$

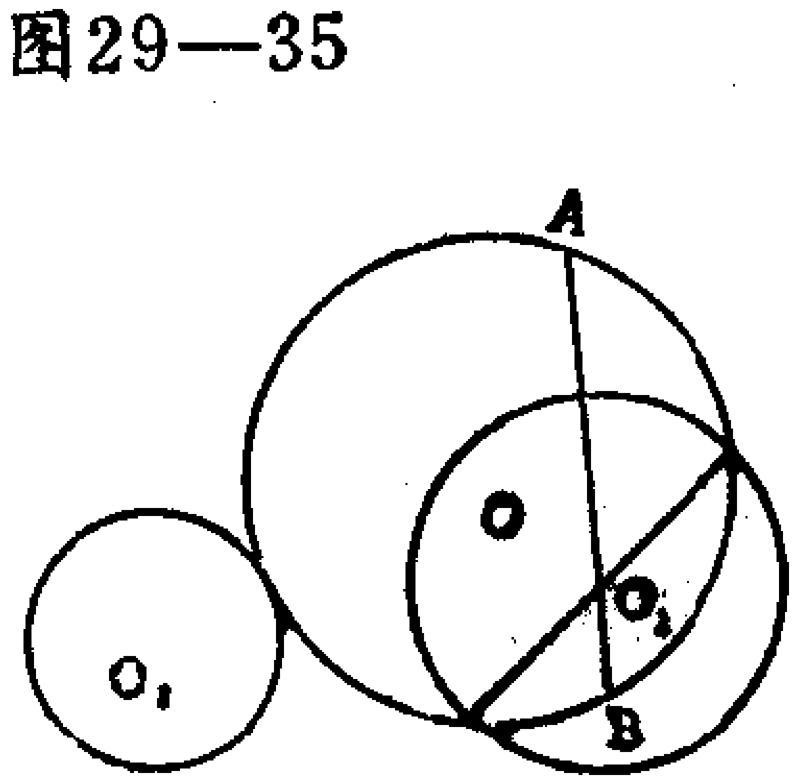


图29—36

$=-r_2{}^2$。

利用33题作⊙O使过A、B且切于⊙O_1．则⊙O为所求。

37．求作一圆，使切于一已知圆，且同时正交于另两已知圆。

解：已知⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3。

如果⊙O_2、⊙O_3共点P，以P为中心，P对⊙O_1的幂为反演幂施行反演变换Γ，将⊙O_2、⊙O_3变换到l_2、l_3．如图，若l_2、l_3相交于P'，作⊙P'切于⊙O_1。若l_2、l_3平行，作直线$p\perp l_2$且切于⊙O_1（图略）。

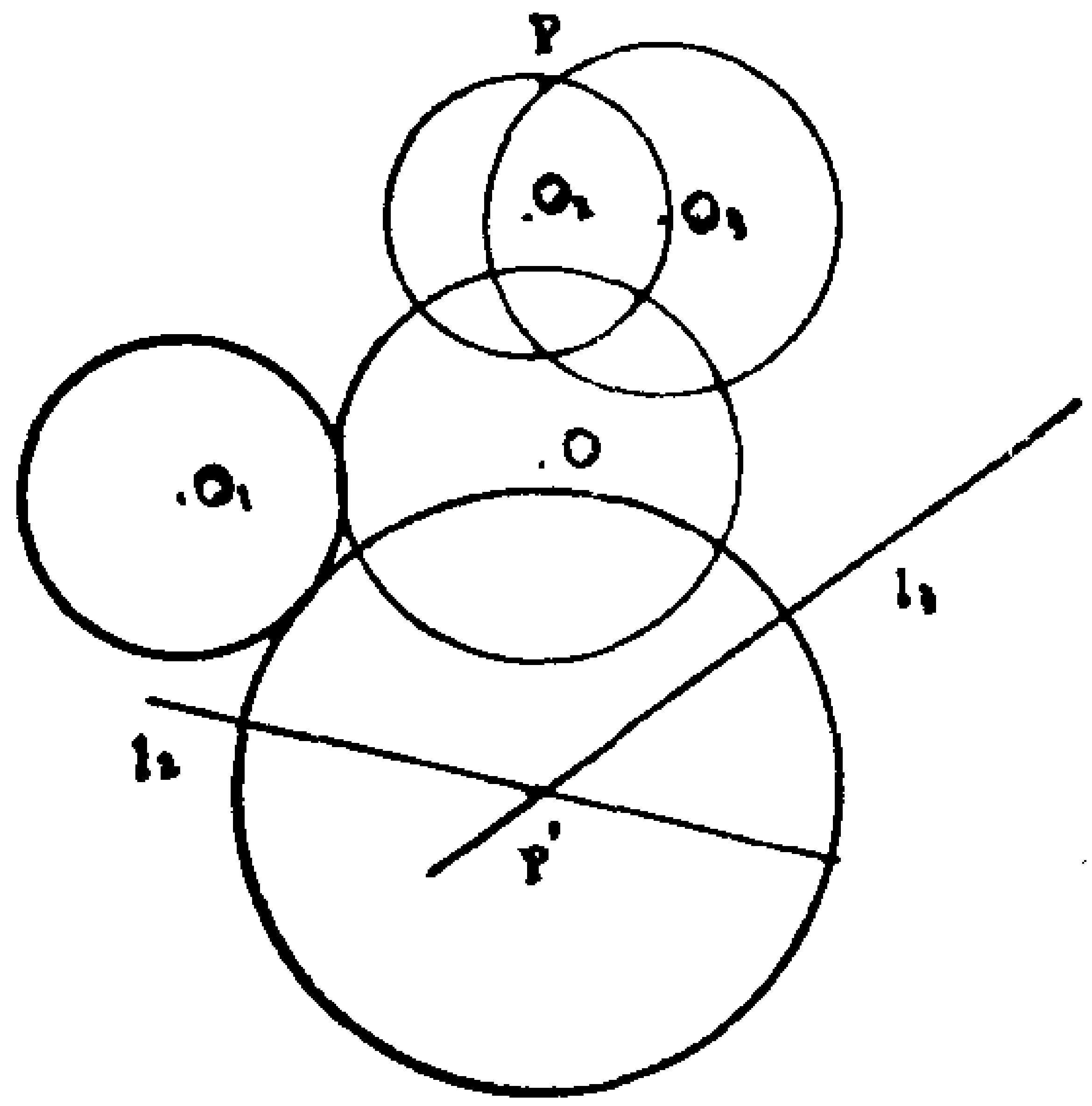


图29—37(a)

再施行反演变换Γ，将⊙P'（或P）变换到⊙O，则⊙O为所求。

如果⊙O_2、⊙O_3不共点，在O_2O_3连线上求一点Q，使Q对⊙O_2、⊙O_3等幂，设为q^2。作⊙$Q(q)$（实际上此圆正交于⊙O_1、⊙O_2）交O_2O_3于E、F。

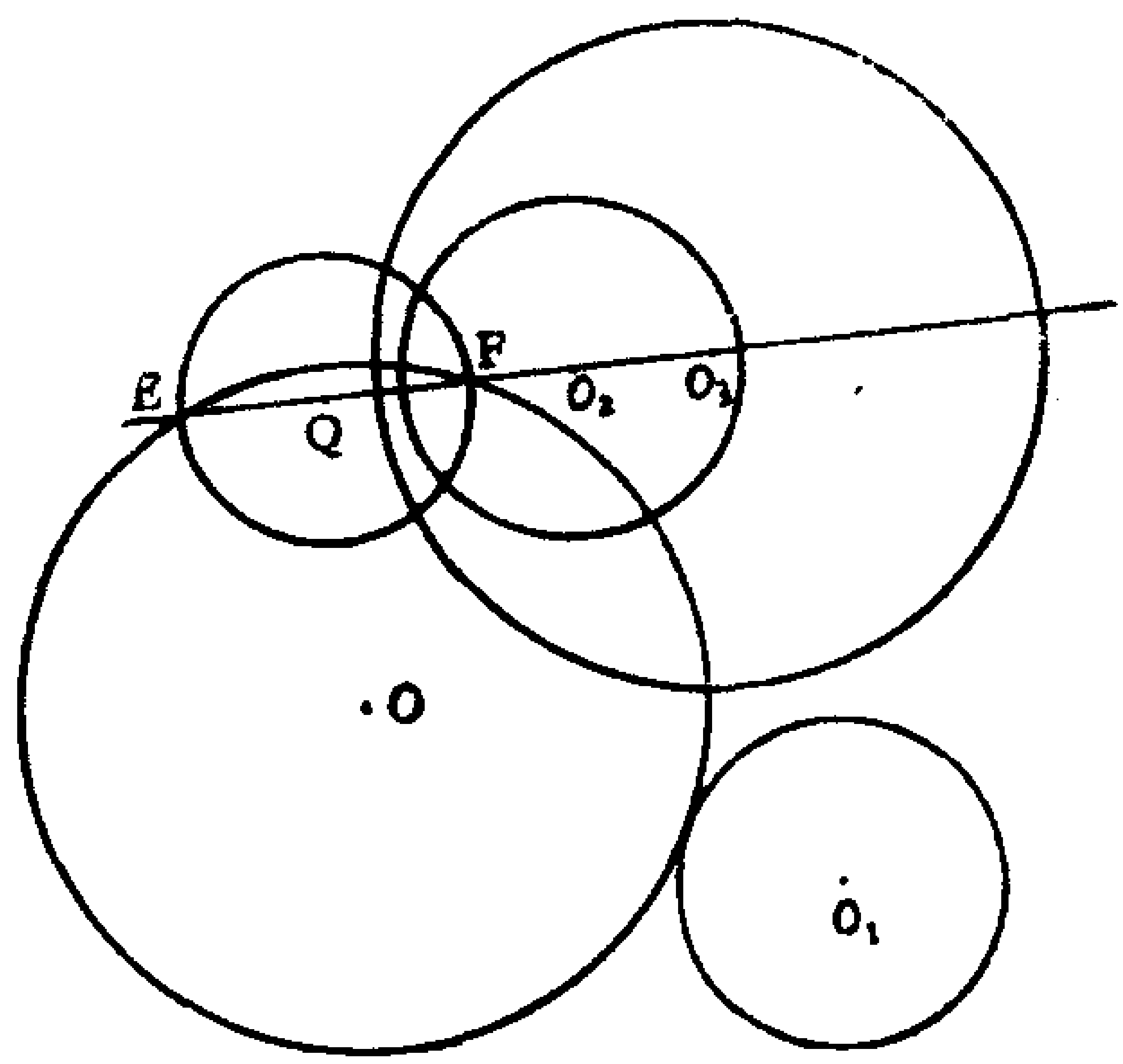


图29—37(b)

利用33题，过E、F作⊙O使之切于⊙O_1，则⊙O为所求。

38. 已知一圆及不与圆相切的四条直线，求作这圆的外切四边形，使它的顶点按一定次序落在该四条直线上。

解：已知⊙O及不与⊙O相切的四直线l_1、l_2、l_3、l_4。

作出l_1、l_2、l_3、l_4关于⊙O的极点L_1、L_2、L_3、L_4。

利用原书例题105过L_1、L_2、L_3、L_4作⊙O内接四边形$EFGH$使各边分别过L_1、L_2、L_3、L_4。过E、F、G、H作⊙O的切线交成四边形$ABCD$。则四边形$ABCD$为所求。

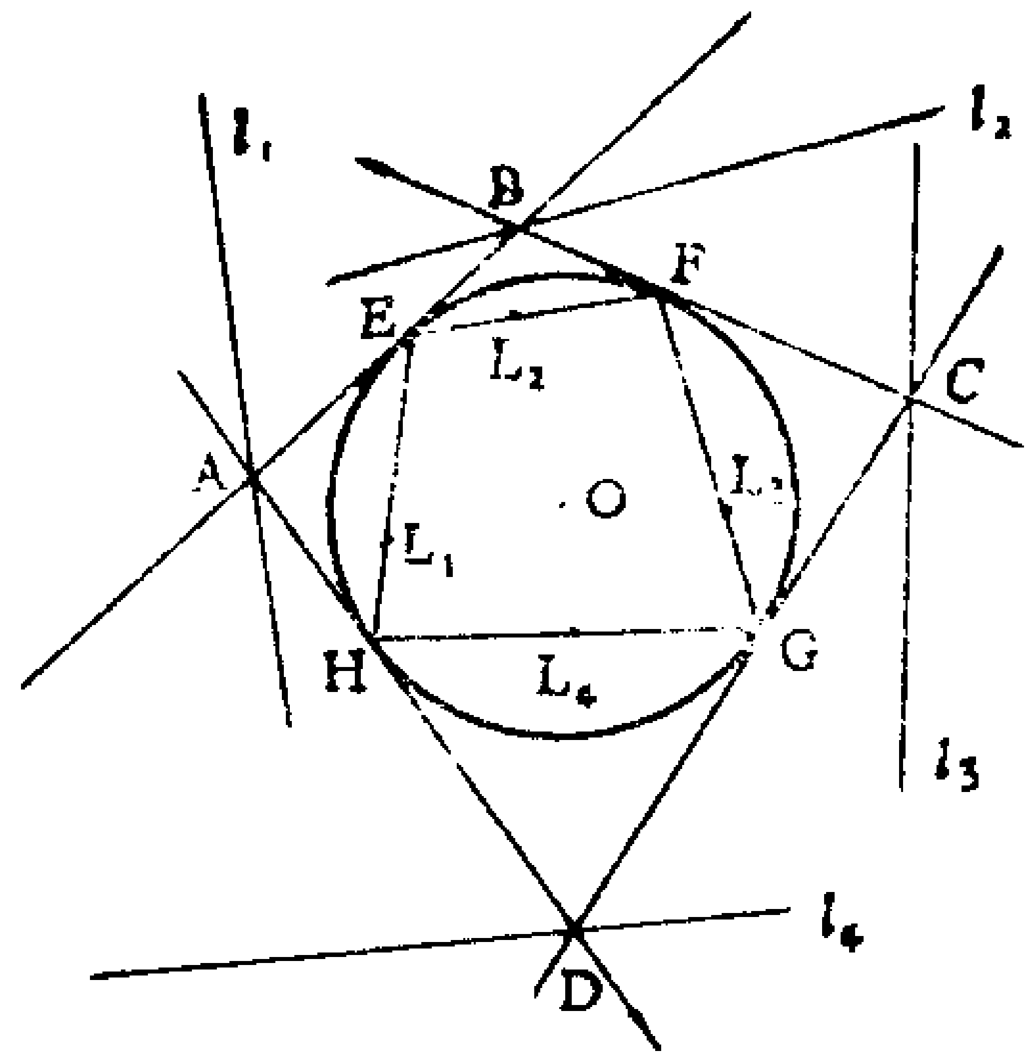


图29—38

习题三十

5. 已知一定圆及一定直线，求作一圆，令切定直线于定点，而且切于定圆。

解：已知⊙O(r)、直线l、点A(在l上)。

作直线$m\perp l$于A，在m上取一点A'，使$AA'=r$，作OA'的中垂线交m于P，则⊙P(PA)为所求。

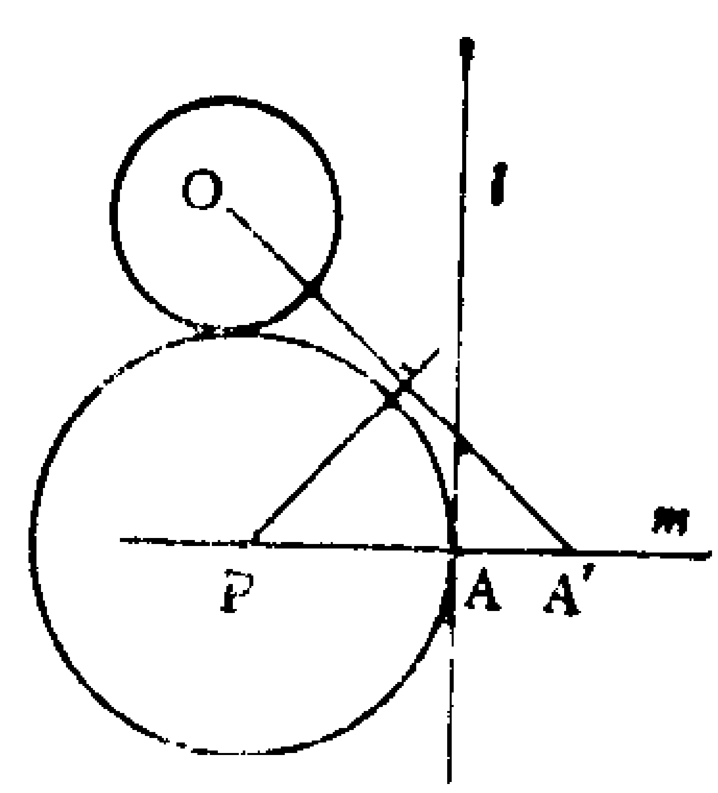


图30—5

6. 已知两定圆，求作一圆，令切其中一定圆于定点，而且切于他定圆。

解： 已知$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$、点A〔在$\odot O_2(r_2)$上〕。

在直线O_2A上取点A'，使$AA'=r_1$，作$A'O_1$中垂线交O_2A于O，则$\odot O(OA)$为所求。

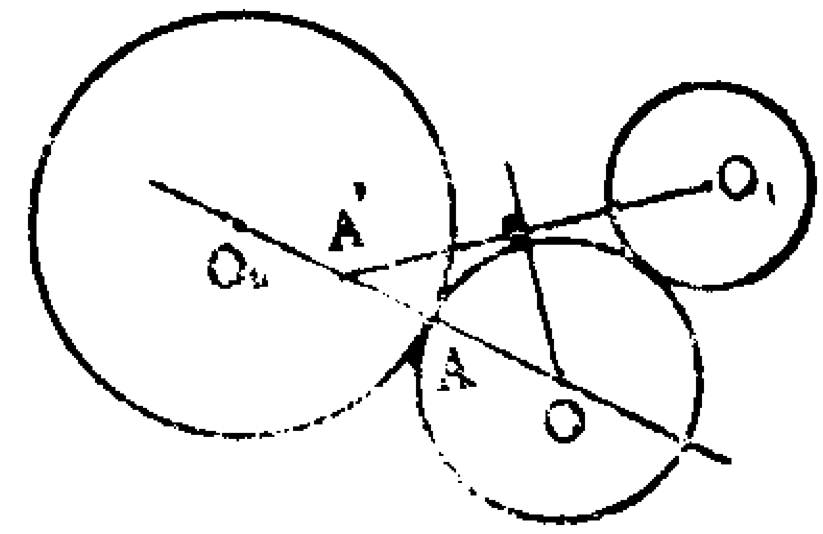


图30—6

7. 求过两已知点作一圆，使切于一已知直线。

解： 已知点A、B，直线l。

若$AB\parallel l$，易作。

若AB交l于P，在l上求作一点T，使$PT^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$，则$\odot ABT$为所求。

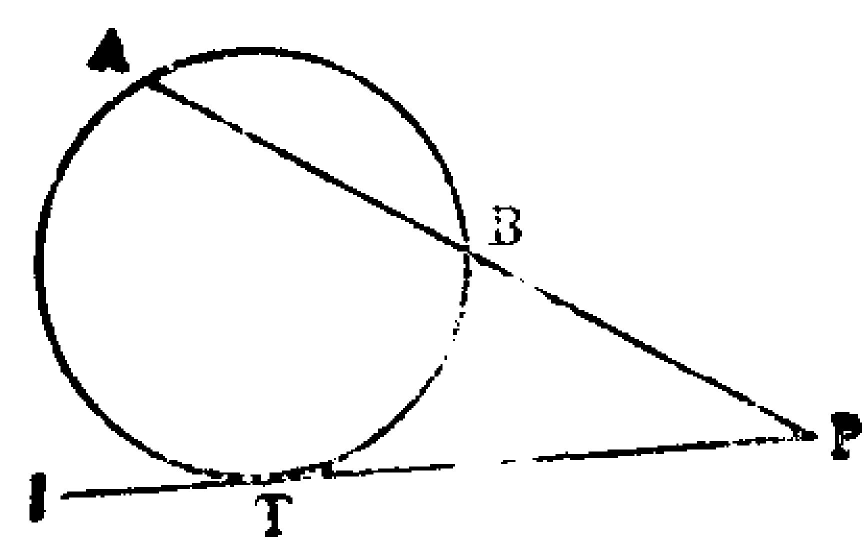


图30—7

8. 求作一圆，使切于一已知圆和一已知直线，且圆心落在另一已知直线上 .

解： 已知$\odot O$、直线l、m。

作直线$l'\parallel l$且相距为r，仿习题二十九第35题作一圆$\odot P(R)$使过点O且正交m，切于l'.

作$PA\perp l$于A，则$\odot P(PA)$为所求。

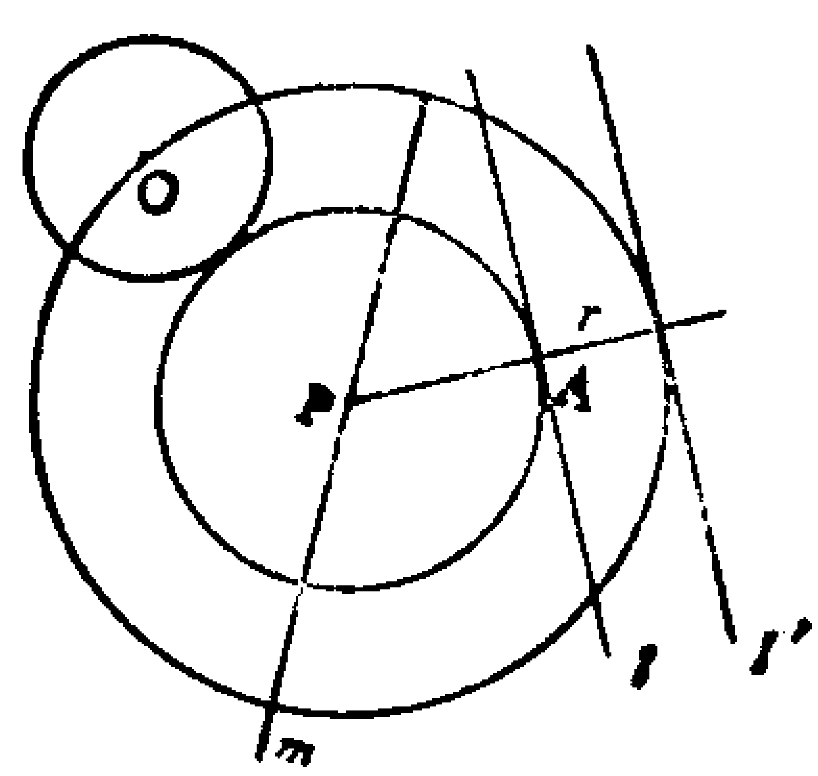


图30—8

9. 求过一已知点作一圆，使切于一已知圆，且圆心落在一已知直线上。

类似习题二十九第35题解法。

10. 求作一圆，使切于两已知圆，且圆心落在一已知直线上。

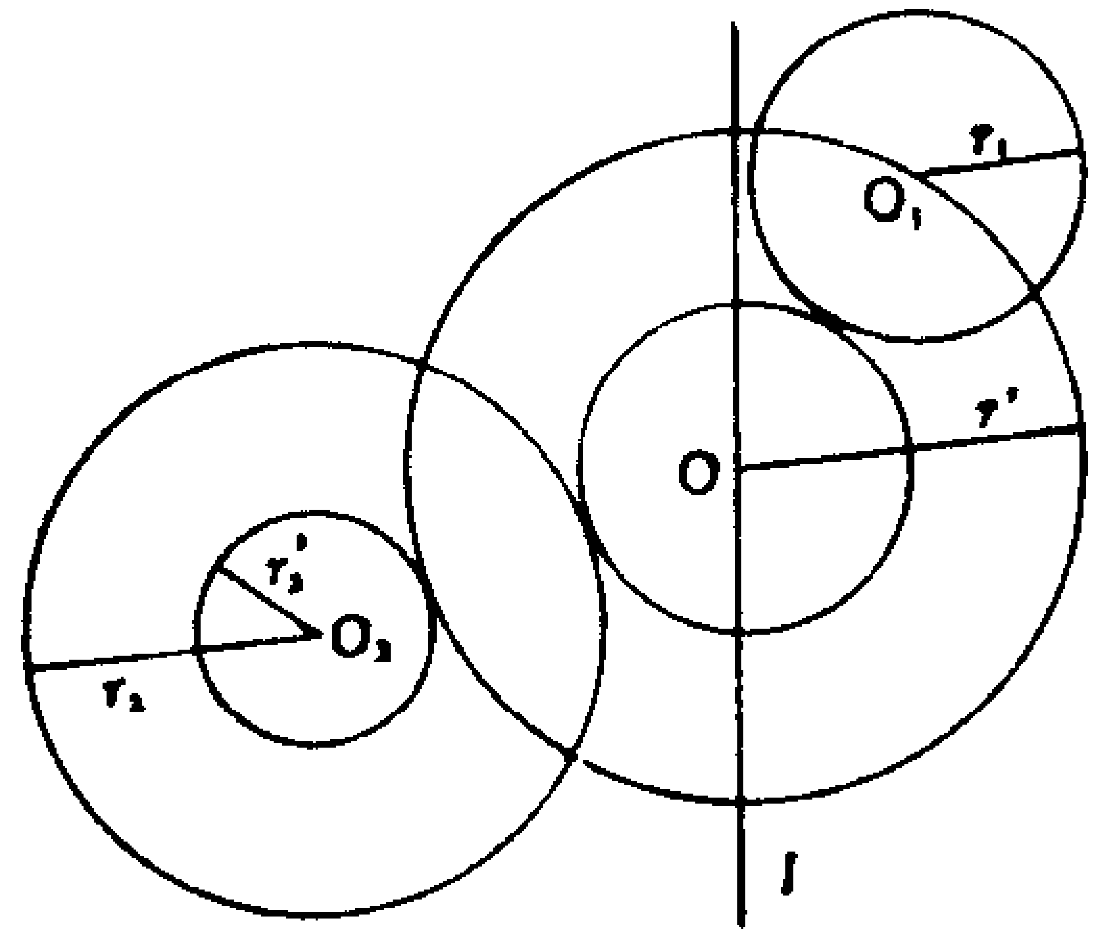


图30—10

解：已知$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$、直线l。

作圆$\odot O_2(r_2')$，$r_2'=|r_2\pm r_1|$

利用上题作$\odot O(r')$，过点O_1且切于$\odot O_2(r_2')$和O在l上。

则$\odot O(OO_2\pm r_2)$为所求。

11. 求作一圆，使切于两已知圆和一直线。

解：已知$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$、直线l。

作直线$l' /\!/ l$且相距为r_2，作$\odot O_1(r_1')$，$r_1'=|r_1\pm r_2|$。利用习题二十九第34题，过点O_2作一圆$\odot O(r')$切于$\odot O_1(r_1')$及l'。

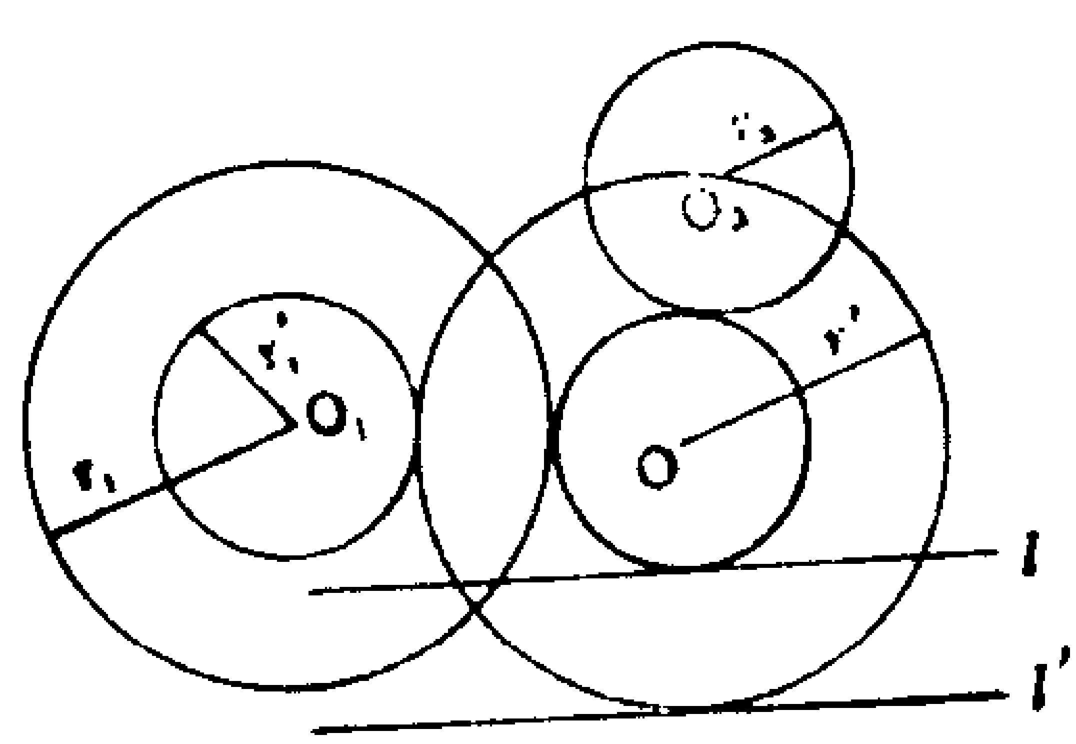


图30—11

则$\odot O(OO_1\pm r_1)$为所求。

12. 设a、b、c是共点O的三条已知直线，求作一直线l交a、b、c于A、B、C，使B介于A、C之间，且令AB、BC各等于定长。

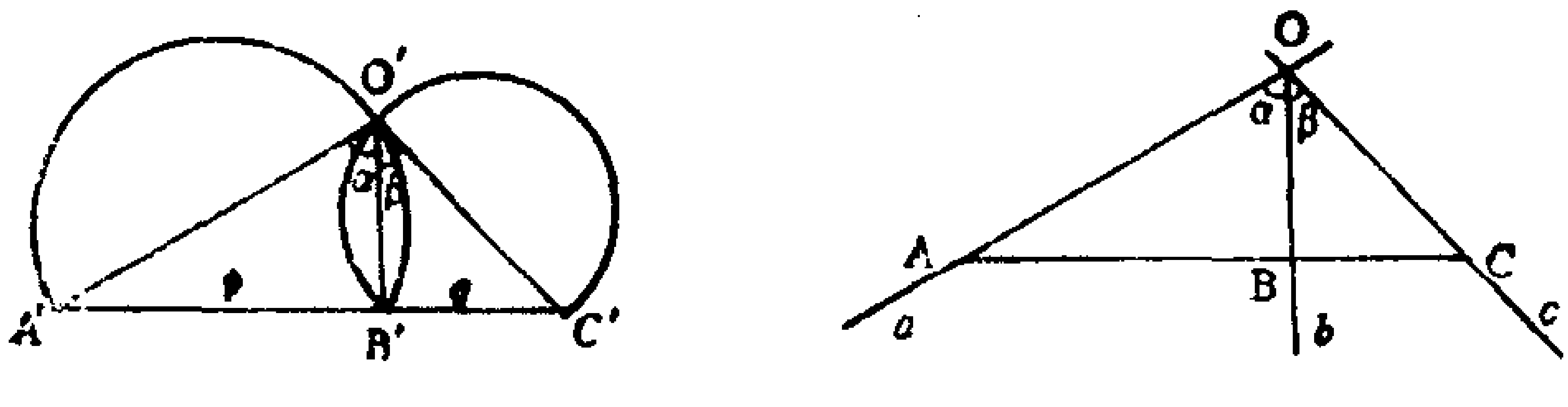


图30—12

解： 已知线段p、q。

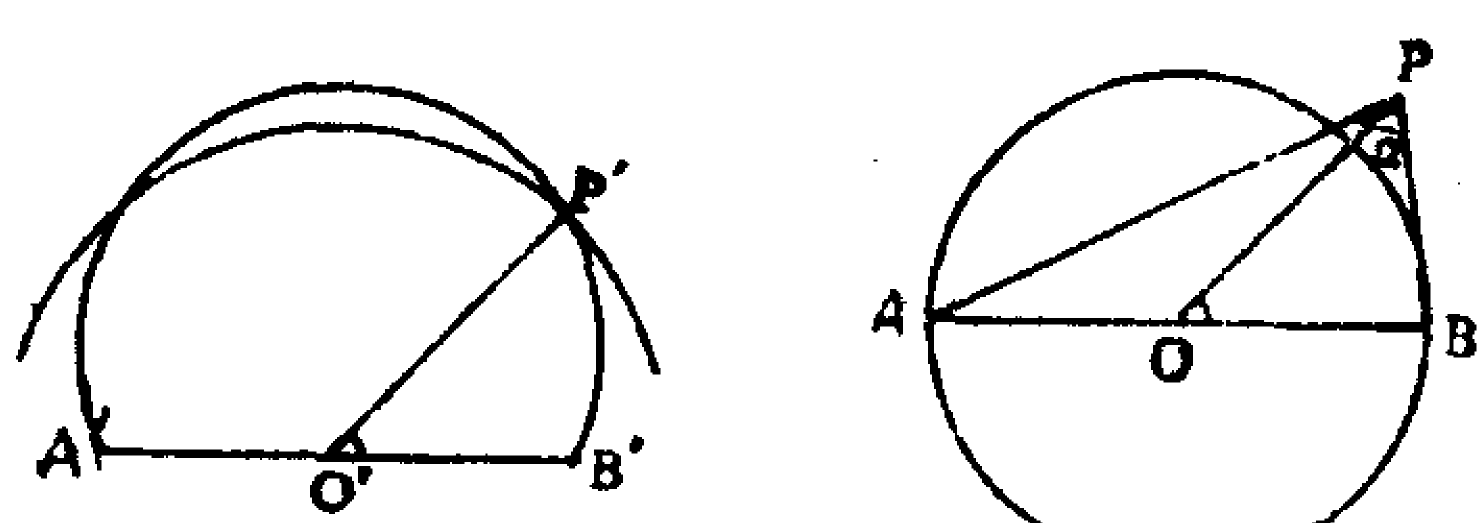
作线段$A'C'=p+q$，在A'、C'之间取点B'，使$A'B'=p$，$B'C'=q$。令a、b夹角为α，b、c交角为β。

以$A'B'$为弦，α为张角作弓形弧；以$B'C'$为弦，β为张角作弓形弧，设它们交于另一点O'。

如图在a、b、c上各取一点A、B、C，使$OA=O'A'$、$OB=O'B'$、$OC=O'C'$。

则直线AB为所求l。

13. 在定圆中求作一直径，使它对一已知点张开的角等于已知角。



（a）　　（b）

图30—13

解：已知$\odot O(r)$，点P、定角α。

取线段$A'B'=2r$，设O'为其中点。以$A'B'$为弦，α为张角作弓形弧交$\odot O'(OP)$于P'。

作B使$\angle POB=\angle P'O'B'$，连BO交$\odot O(r)$于A，则AB为所求。

14．设OA、OB是$\odot O$的两条定半径，求作$\odot O$的切线t，使被$\angle AOB$的两边截下定长线段。

解：作线段$A_2B_2=t$，作直线$l\parallel A_2B_2$且相距为OA。以A_2B_2为弦，$\angle AOB$为张角作弓形弧交l于O'。在OA、OB上各取一点A_1、B_1，使$OA_1=O'A_2$，$OB_1=O'B_2$，则$A'B'$为所求。

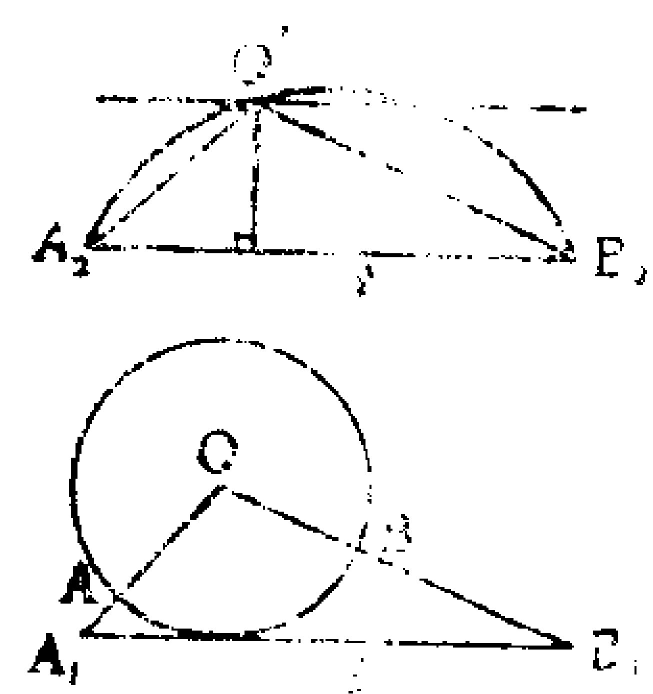


图30—14

15．求作一直线l交两条定半线OX、OY于A、B，使AB及$OA+OB$各等于定长。

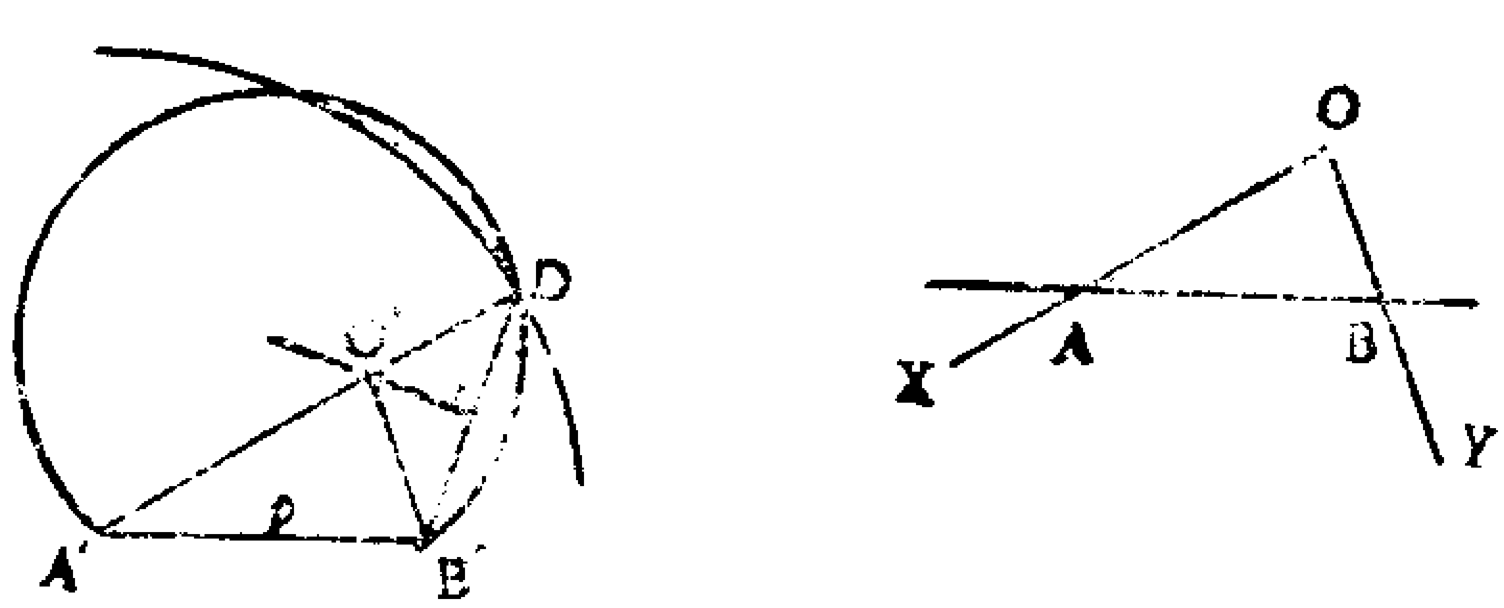


图30—15

解：已知线段p、s。作线段$A'B'=p$。以$A'B'$为弦，

$\angle XOY/2$为张角作弓形弧交$\odot A'$（s）于D。作DB'中垂线交$A'D$于O'．在OX、OY上各取点A、B，使$OA=O'A'$，$OB=O'B'$．则AB为所求。

16．设A、B是$\odot O$上两定点，在$\odot O$中求作弦XY，使其平行于一定直线，且令$AX+BY$等于定长。

解：已知定直线是l、定长p，作$\odot O$的弦$AA'\parallel l$。

以$A'B$为弦，$\angle A'OB/4$为张角作弓形弧交$\odot B(p)$于D。

作$A'D$中垂线交$\odot O$于Y，作$YX\parallel l$交$\odot O$于X，则XY为所求。

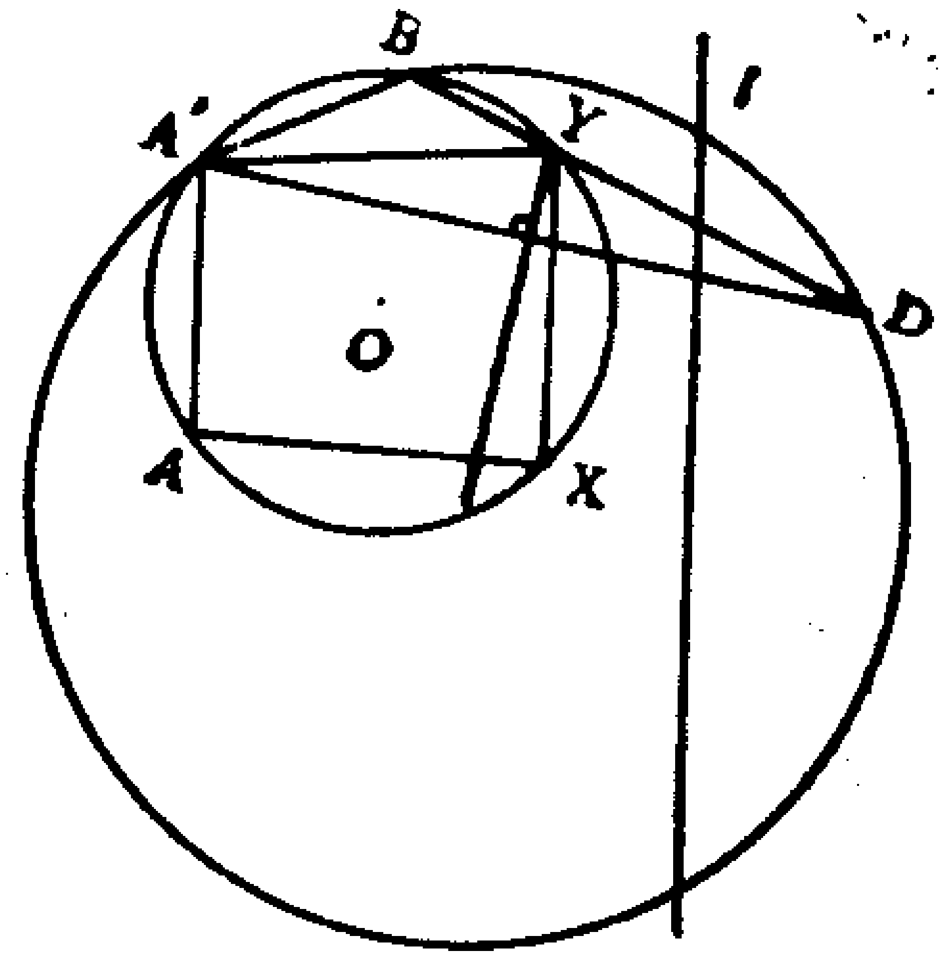


图30—16

17．在已知直线上求一点，使至两已知点的距离和等于定长。

解：定直线l及定长s，定点A、B．以B为中心，s为半径作圆k；过A作圆c，使内切k于T且圆心G在l上，则G就是所要求作的点（圆c的作法及本题解数参看第9题）。

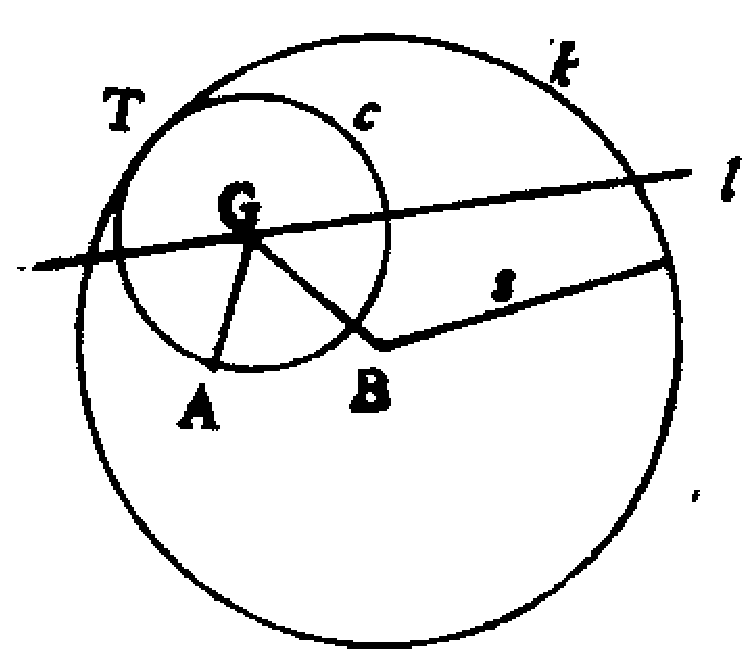


图30—17

18．在已知直线上求一点，使至两已知点的距离差（绝对值）等于定长。

解：定直线l，定长d，定点A、B。

假定G为所求，如图作圆G（GA），应有$|GB-GA|=d$。

$\therefore \odot G$与$\odot B$（d）相切。

利用第9题$\odot G$（GA）可以作出。

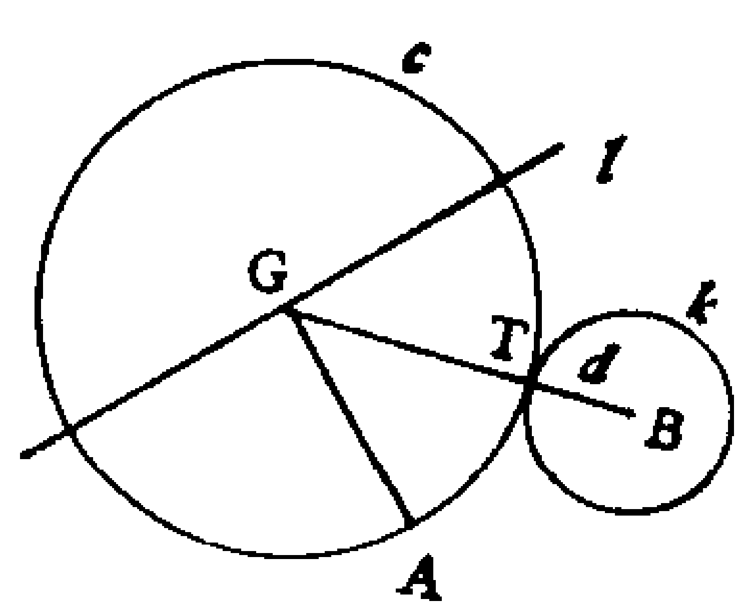


图30—18

19. 给定一角β，两线段a、d，求作$\triangle ABC$，使$\angle ABC=\beta$，$BC=a$，$AC-AD=d$，AD是BC边的高。

解：作半线BX，使$\angle XBC=\angle\beta$，作$\odot C(d)$，利用第8题作$\odot A$，使$\odot A$外切$\odot C(d)$于E，切CB于D，A在BX上。连A、C。则得$\triangle ABC$。

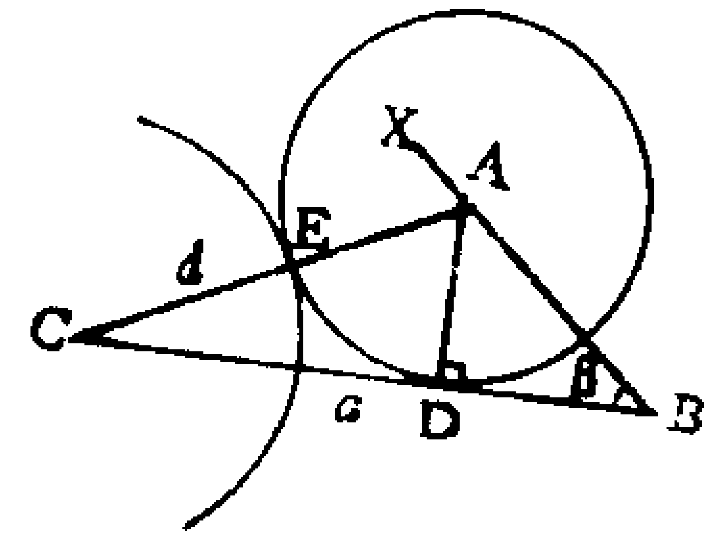


图30—19

20. 求作$\triangle ABC$，使$\angle A$等于已知角，$AB+BC$及$AC+BC$各等于已知长。

解：已知定角α，定长s_1、s_2，作$\angle C'AB'=\alpha, AC'=s_1$，$AB'=s_2$；利用§76例题102，作线段$BC$，使$B$、$C$在$AC'$、$AB'$上，且$C'B=BC=CB'$，则得$\triangle ABC$。

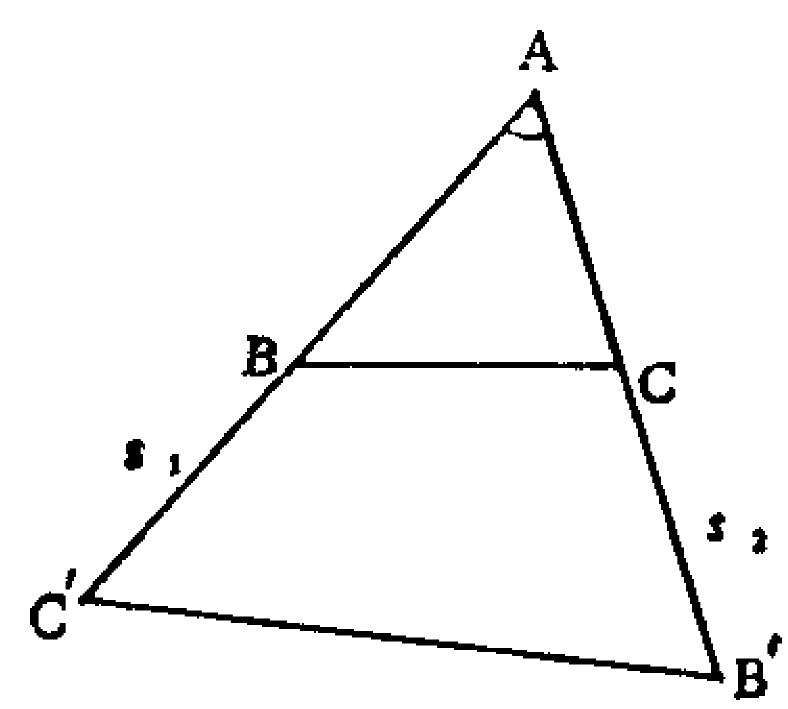


图30—20

21. 已知一边、此边的高、对角的外角平分线，求作三角形。

解：假定$\triangle ABC$已作成。

$\because AT=t_a$，$AD=h_a$，

$\angle ADT=90°$，

$\therefore$直角$\triangle ADT$可以确定。

过A作$\odot ABC$切线，设交CB所在直线于P，则$\angle PAT=|90°-\angle A/2-\angle C|=|(\angle B-\angle C)/2|$，

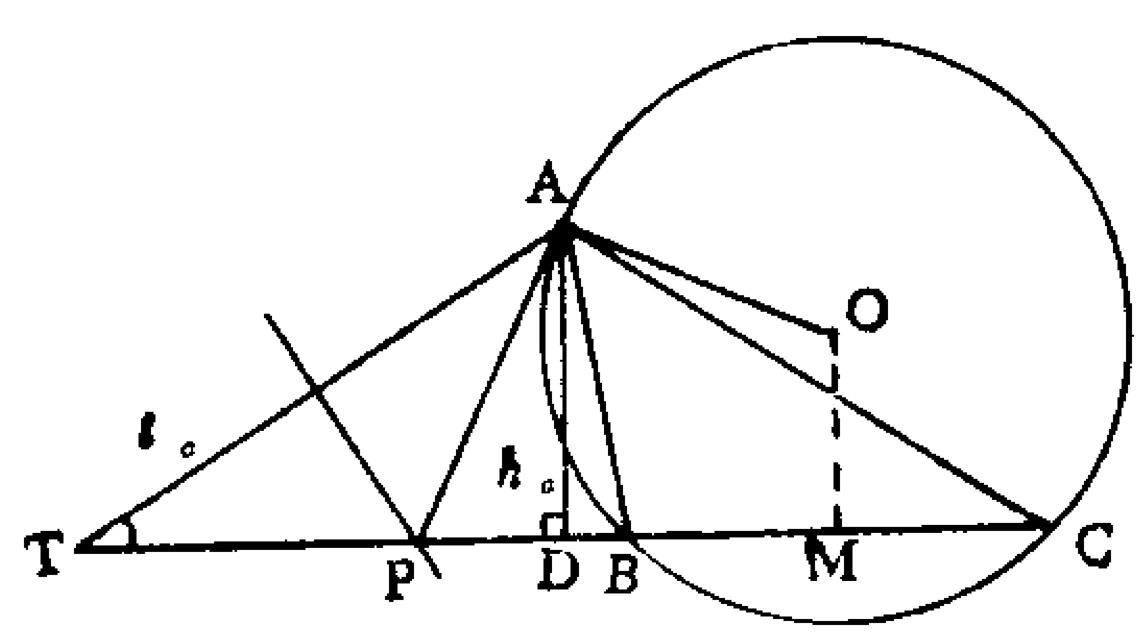


图30—21

$\angle ATP=|\angle ABC-\angle TAB|=|\angle B-90°-\angle A/2|$

$=|\angle B-\angle C|/2$

$\therefore \angle PAT=\angle ATP$，于是$P$必在$AT$的中垂线上。利用§71，例题98即可在$TP$上确定$B$、$C$，且使$BC=a$。

注：因为一角的内外角互相垂直，所以此题中的$\angle A$内角平分线可求出长来。因此，本题可转化为已知的§86例题111。

22。已知一边及对角的内外平分线，求作三角形。

解：设$\triangle ABC$为所求。因为$\triangle ATT'$中，$AT=t_a$，$AT'=t_a'$，而在TT'上确定BC，可如上题分析利用§71例题98得到。

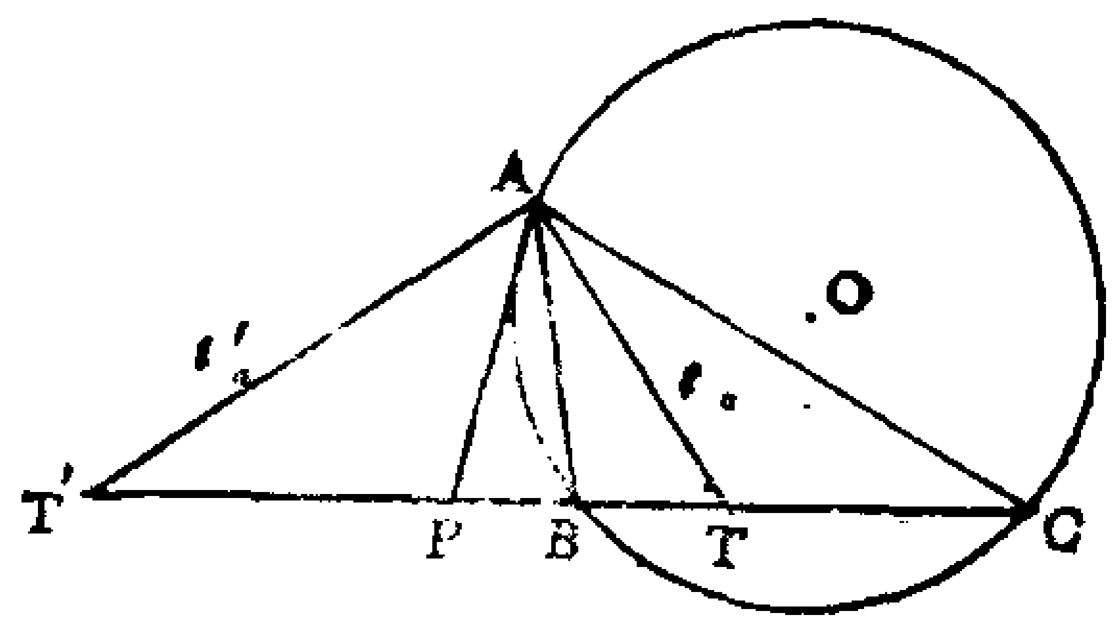


图30—22

23。已知一边、两邻角的差，对角的平分线，求作三角形。

解：假定$\triangle ABC$已作成，作BC边高AD，并设$\angle B-\angle C=\theta$。

$\because \angle TAD=\angle A/2-(90°-\angle B)=\theta/2$。

$\angle ADT=90°$，$AT=t_a$。

$\therefore$直角$\triangle ADT$可定，于是问题便化为§86，例题111。故$\triangle ABC$可作出。

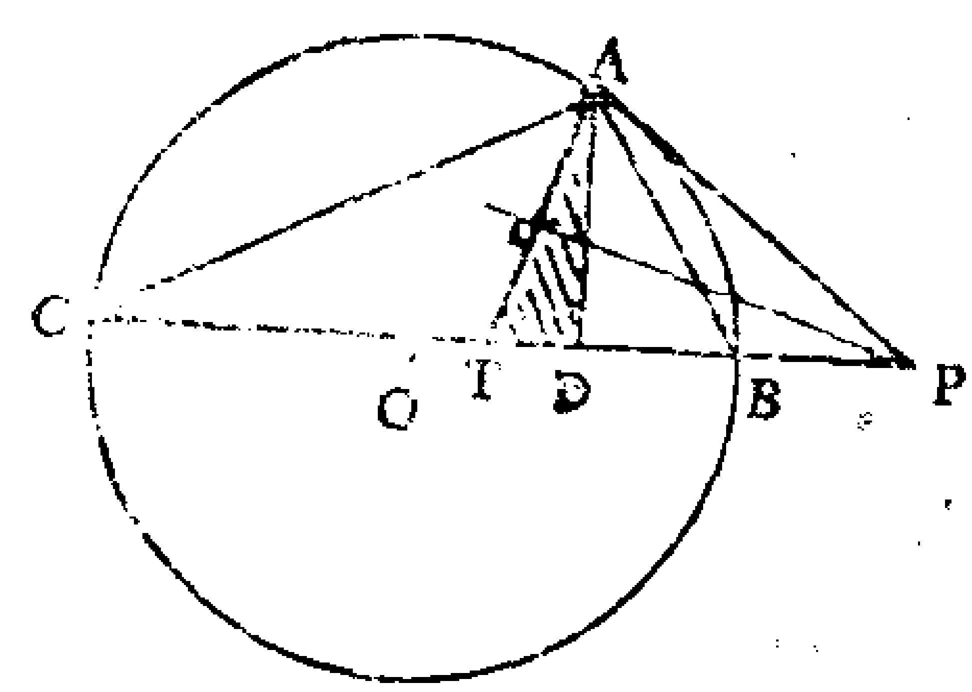


图30—23

24。已知一边，两邻角的差，对角的外角平分线，求作三角形。

解：假定$\triangle ABC$已作成，作BC边高AD，并设$\angle B-\angle C=\theta$。

$\because \angle TAC=90°+\angle A/2$，

$\angle DAC=90°-\angle C$，

$\therefore \angle TAD=\angle A/2+\angle C$

$=90°-(\angle B-\angle C)/2$

$=90°-\theta/2$。

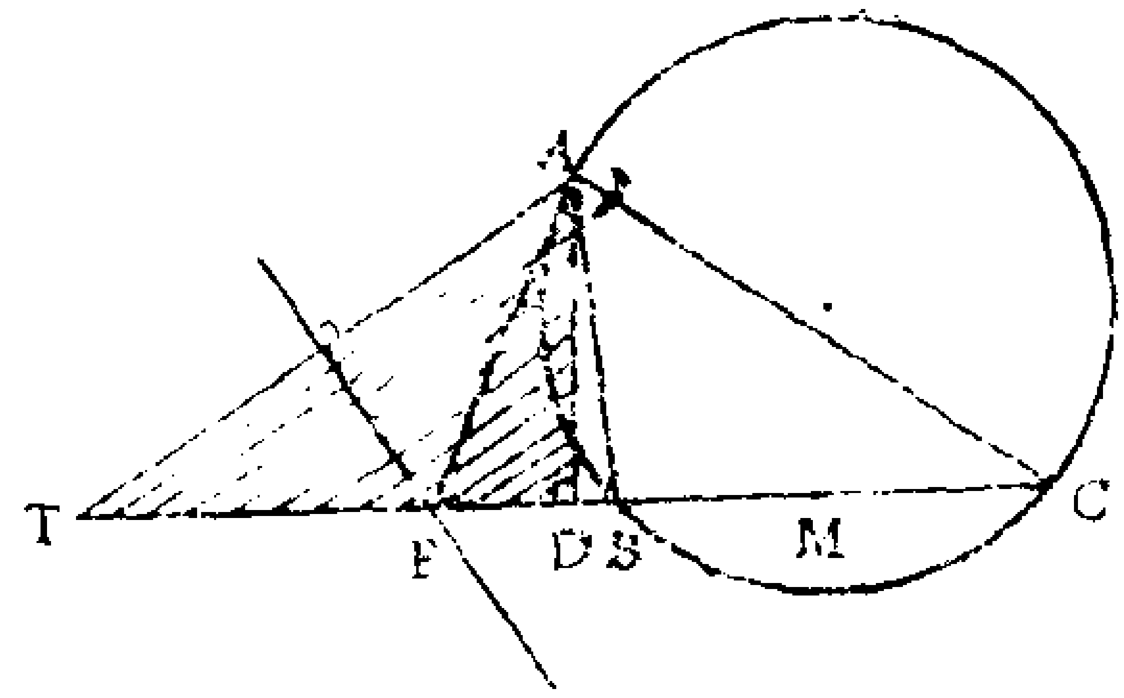


图30—21

又$AT=t_a'$，$\angle ADT=90°$

$\therefore$直角$\triangle TAD$可确定，于是转化为第21题。

故$\triangle ABC$可作出。

25．以一固定线段为一边求作三角形，使两邻角的差（绝对值）等于已知角，对顶点落在一已知直线上。

解：假定$\triangle ABC$已作成，BC固定，$|\angle B-\angle C|=\theta$，作$BC$中垂线$m$交$AB$于$M$，则：

$\angle MCA=|\angle B-\angle C|=\theta$

作l关于m的对称线l'，延长CM交l'于A'，于是

$AA' \parallel BC$，

l、l'、C、θ为已知，

$\therefore$此题便转化为习题二十八第17题。

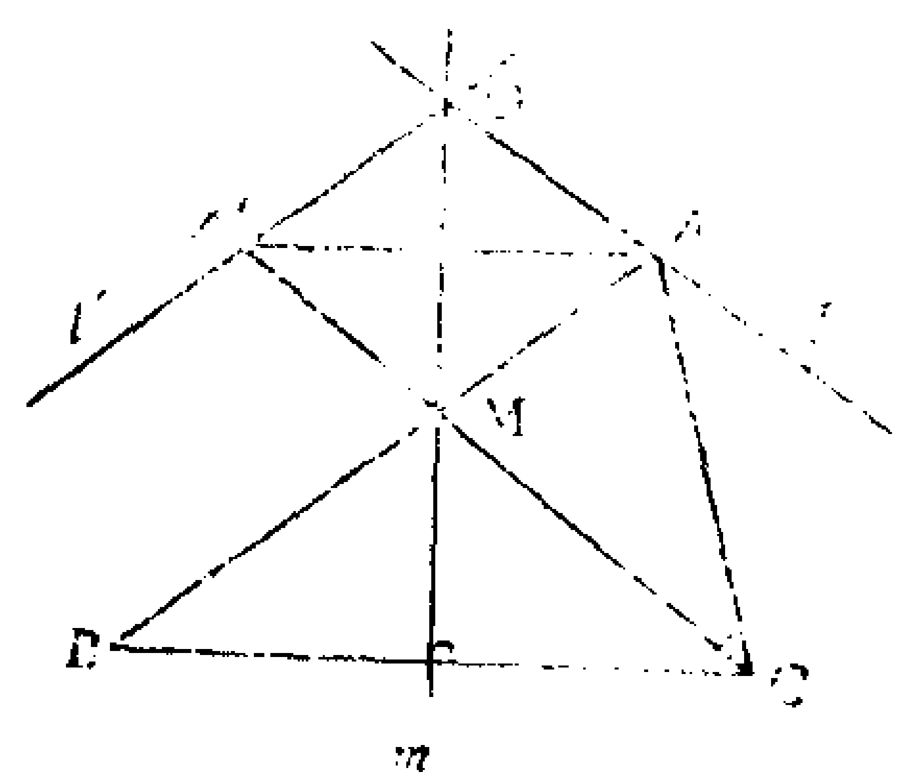


图30—25

26．在已知圆中，求作内接等腰三角形，使它的底与高之差（绝对值）等于定长。

解：假定$\triangle ABC$已作出，不妨令$AL>BC$。

因AL为直径，故为已知，而$AM=$定长，亦可确定，于是，本题转化为"求作等腰三角形，顶点在M，另二顶点在已知$\odot O$上，且底等于高"。

此题极易用放大法作出。

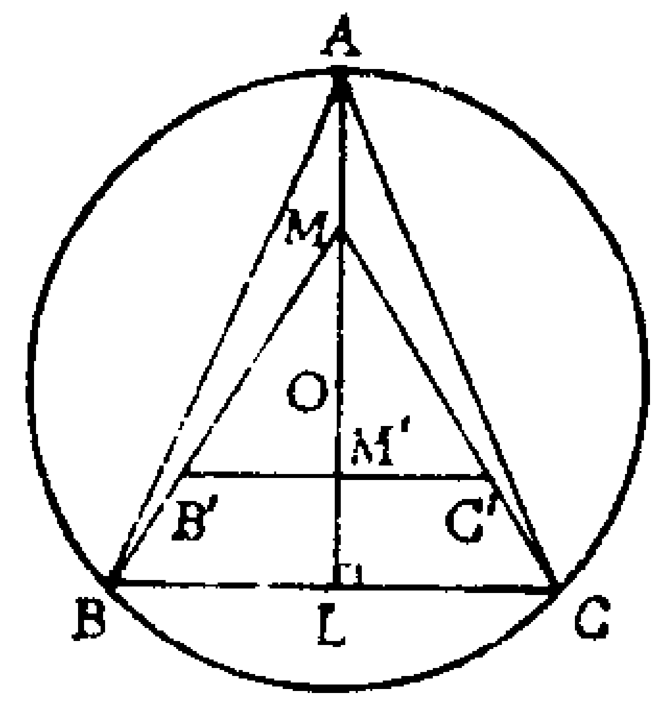


图30—26

习题三十一

5．已知线段AB及a、b，求内分AB于P，使适合下列条件之一：

(1) $PA/PB=a^2/b^2$；　　(2) $PA/PB=a^3/b^3$；

(3) $PA/PB=\sqrt{a}/\sqrt{b}$；　　(4) $PA/PB=\sqrt[4]{a}/\sqrt[4]{b}$。

提要：(1) $x=AB\cdot a^2/(a^2+b^2)$

(2) $x=AB\cdot a^3/(a^3+b^3)$

(3) $x=AB\cdot\sqrt{a}/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

(4) $x=AB\cdot\sqrt[4]{a}/(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})$

于是，反复应用§88（1）～（7）各式作图法即可完成作图。

6．已知线段a、b、c……，求作下列各式所表的线段。

(1) $abc/d^2+e^2/f$；　　(2) $\sqrt{ab}+cd^2/ef$；

(3) $a^4/b^3+\sqrt{c^2-d^2}$；　　(4) $\sqrt{a^2+bc}$；

(5) $(a^3+b^3)/(cd+ef)$；(6) $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})/(\sqrt{e}+\sqrt{f})$；

(7) $(ab\sqrt{c}+ac\sqrt{b})/\sqrt{abc}$； (8) $\sqrt[4]{abcd}$；

(9) $\sqrt[4]{a^4-b^4}$；　　　　(10) $\sqrt[4]{a^4+b^4}$；

(11) $\sqrt{a^2\sqrt{2}-b^2\sqrt{3}}$； (12) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$。

提要：可将各式改成适于用§88(1)～(7)式的形式。

(1)原式 $=(c/b)\times(ab/d)+e^2/f$；

(2)原式 $=\sqrt{ab}+(c/e)\times(d^2/f)$；

(3)原式 $=(1/b)\times(a^2/b)\times(a^2/b)+\sqrt{c^2-d^2}$；

(4)原式 $=\sqrt{a(a+bc/a)}$；

(5)原式 $=[a(a+b^3/a^2)]/(cd/a+ef/a)$；

(6)原式 $=(ab+c\sqrt{bd})/(\sqrt{be}+\sqrt{bf})$；

(7)原式 $=(a/c)\times(bc+c\sqrt{bc})/\sqrt{ab}$；

(8)原式 $=\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$；

(9)原式 $=\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}}$；

(10)原式 $=\sqrt{a\sqrt{a(a+b^4/a^3)}}$；

(11)原式 $=\sqrt{a\sqrt{2a^2}-b\sqrt{3b^2}}=\sqrt{a\sqrt{2a\cdot a}-b\sqrt{3b\cdot b}}$；

(12)原式 $=\sqrt{(a+b)\sqrt{ab}+2ab}$

$$=\sqrt{\sqrt{(a+b)\sqrt{ab}}^2+\sqrt{2ab}^2}。$$

7．设A、B是已知直线l上的两定点。在l上求一点P，使合于$AP^2=2BP^2$。

解：令$\overline{AB}=a$，$\overline{AP}=x$，则$\overline{PB}=a-x$。

由$AP^2=2PB^2$得　　$x^2=2(a-x)^2$

解之，得　　$x=(2\pm\sqrt{2})a$，故可作出。

8．已知两直线a、b及线外一点P，求过P作一直线交a、b于A、B，使得$AP^2=AB\cdot BP$。

解：令P在A、B之间，则由

$$AP^2=AB\cdot BP=(AP+BP)BP$$

$$\Rightarrow AP/BP=(1+\sqrt{5})/2 \quad [(1-\sqrt{5})/2\text{舍去}]$$

这时可利用习题二十八第11题作图。

若P在A、B之外，由

$$AP^2=AB\cdot BP=(AP-BP)BP$$

得 $AP^2-AP\cdot BP+BP^2=0$

方程无解，故P不能在A、B外。

9．已知⊙O及不在这圆上的一点P，求过P作一直线交⊙O于A、B，使得$AP^2=AB\cdot BP$（视P在⊙O的内外而分别研究）。

解：当P在⊙O外时，由$AP^2=AB\cdot BP$

$$=AB(AP+AB)$$

$\Rightarrow AP/AB=(1+\sqrt{5})/2$〔$(1-\sqrt{5})/2$舍去〕。

故可利用习题二十八第14题作图。

当P在⊙O内时，仿在⊙O外时类似处理，这时$AP/AB=(\sqrt{5}-1)/2$。

10．已知一直角扇形OAB及⊙A（AO）．求作一圆，使切于⊙A及直角扇形的半径OB，并且圆心落在直角扇形的$\overset{\frown}{AB}$上。

解：设$AO=R$，所求圆为⊙$I(x)$，则

$$(R+x)^2=(R-x)^2+(R^2-x^2),$$

$\therefore x=(\sqrt{5}-2)R$（负的舍去）

故可作图。

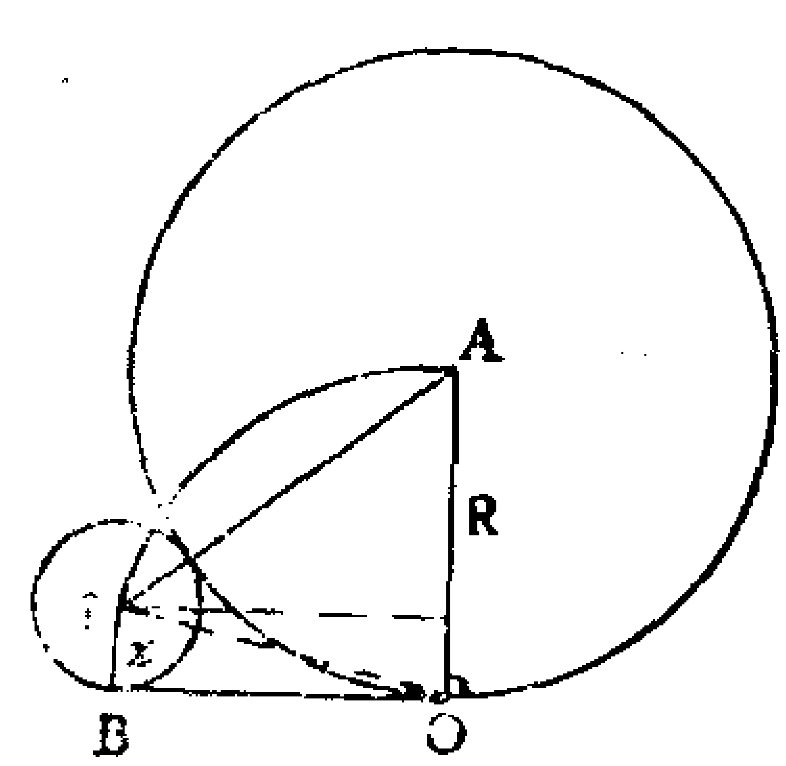


图31—10

11. 已知$\odot O(r)$及不在这圆上的一点P，求过P作一直线l，使合于$PA^2+PB^2=2r^2$，其中A、B是直线l与$\odot O$的公共点。

解：令P对于$\odot O$的幂为k，则

$PA^2+(k/PA)^2=2r^2 \Rightarrow PA^4-2r^2PA^2+k^2=0$

$\Rightarrow PA^2=(2r^2\pm\sqrt{4r^4-4k^2})/2$

$\Rightarrow PA=\sqrt{2r^2\pm\sqrt{4r^4-4k^2}}/2$

故可作图。

12. 已知一圆$\odot O$、一直线l、一点P，在$\odot O$中求作一弦AB，使$AB \parallel l$且$\angle APB=90°$。

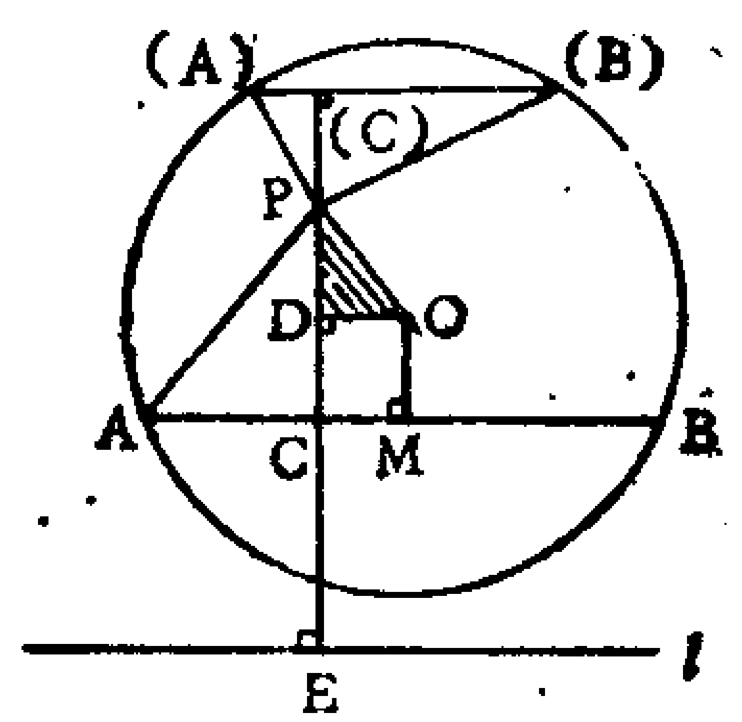


图31—12

解：连PO(如图)，作$\text{Rt}\triangle POD$且使$PO\perp l$，则$\text{Rt}\triangle DOP$可确定。

作弦心距OM，设$OM=x$，

$\therefore PC^2=AC\cdot CB$

$=(AB/2)^2-MC^2$

$\Rightarrow(x\pm PD)=R^2-x^2-OD^2$

$\Rightarrow 2x^2\pm 2PDx+OP^2-R^2=0$

$\Rightarrow x=(\pm PD+\sqrt{PD^2-2OP^2+2R^2})/2$（舍去了不合题意的根）。

故可作图。

注：当P和O分居AB两侧时，类似处理。

13. 过定圆内一已知点求作互相垂直的两弦，使四端点连成的凸四边形有一定的面积。

解：假定所求弦AB、CD已作成，交于定点P，设已知⊙$O(R)$到AB、CD的距离为x、y，定面积为a^2，则由

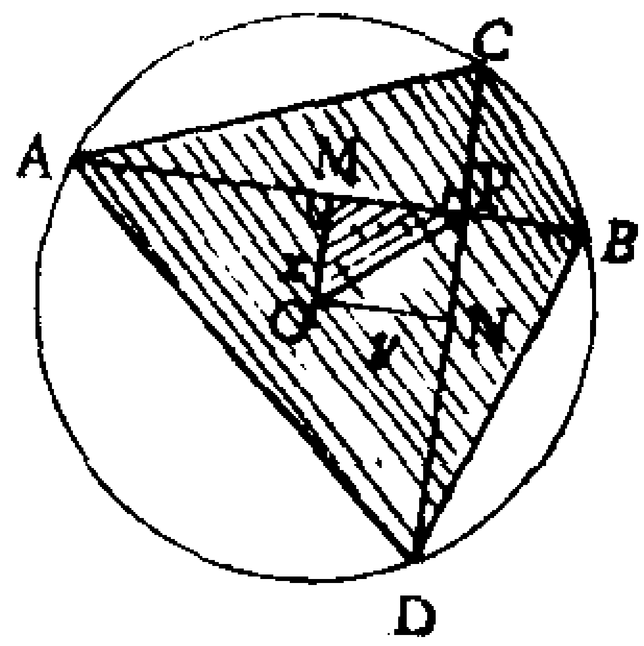


图31—13

$$(AB\times CD)/2=a^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{R^2-x^2}\times\sqrt{R^2-y^2}=a$$

$x^2+y^2=OP^2$代入解之，得

$$x=\sqrt{[OP^2\pm\sqrt{(2R^2-OP^2)^2-a^2}]/2},$$

故可作图。

注意：取根号内“+”号时，则y为取“-”号的值，故本题有解时，仅有一解。

14. 已知对角线的长，求在定半圆形中作内接矩形。

解：若图已成，设垂直于已知半圆直径的矩形之边为x，矩形对角线为定长l，半圆半径为R，则

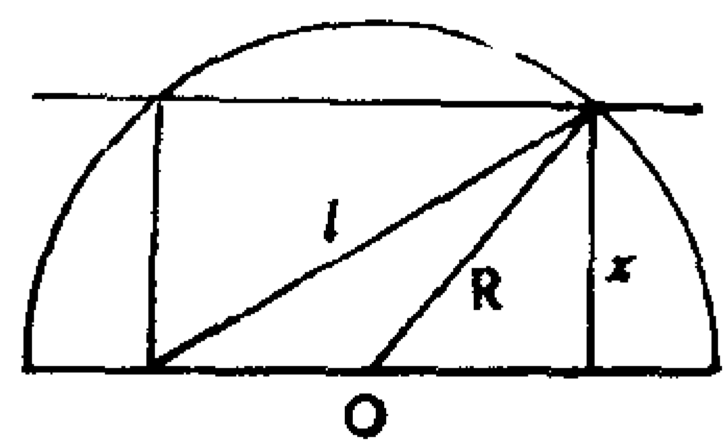


图31—14

$$l^2=(2\sqrt{R^2-x^2})^2+x^2,$$

解之，得

$$x=\sqrt{(4R^2-l^2)/3}\text{（负的舍去）}$$

故可作图。

15. 已知矩形$ABCD$，求作一直线平行于AB而交AD、BC两边于E、F，使分得的两个矩形$ABFE$与$FCDE$彼此相似（它们顶点按着所写的顺序对应）。

解：设所作直线为 l，如图，

令 $AB=a$，$BC=b$，$BF=x$，

则 $x/a=a/(b-x)$

$\Rightarrow x=(b\pm\sqrt{b^2-4a^2})/2$，

故可作图。

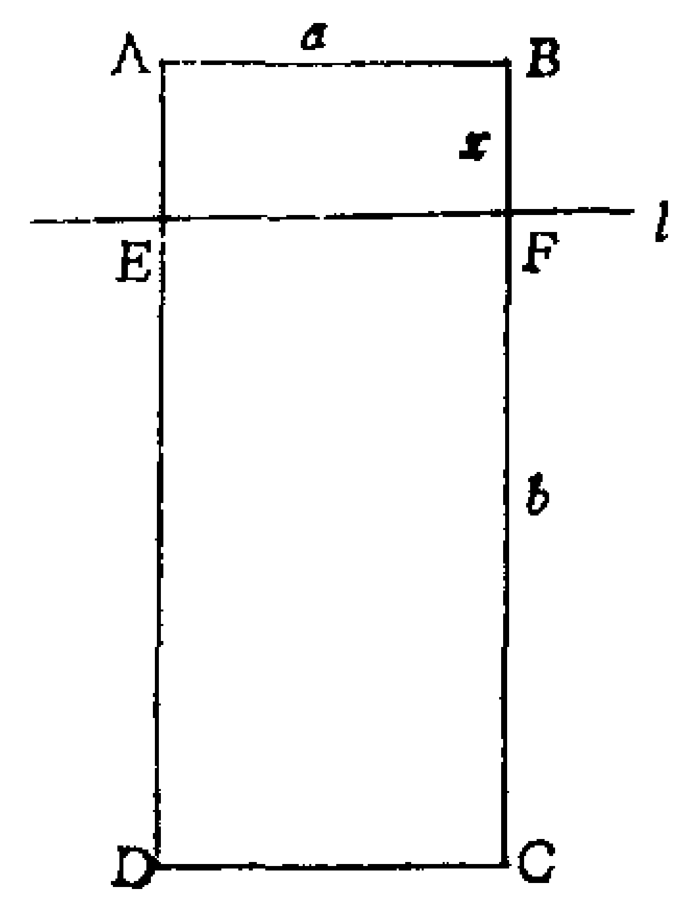


图31—15

16. 已知三角形两底角均非钝角，求作面积一定的矩形，使它有一边落在已知三角形的底边上，其他两顶点分别落在两腰上。

解：设 $\triangle ABC$ 为已知，所作矩形一边落在 BC 上，令 $BC=a$，$AD=h_a$，$PS=x$，矩形面积为 r^2，则

$$(r^2/x)/a=(h_a-x)/h_a$$

$$\Rightarrow x=[h_a\pm\sqrt{h_a^2-(4r^2h_a)/a}]/2$$

故可作图。

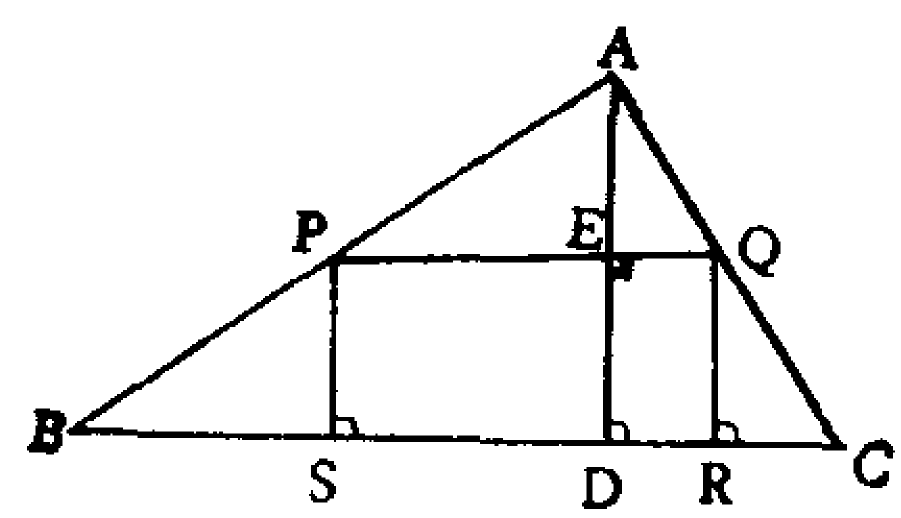


图31—16

17. 已知三角形 $\triangle ABC$，求作一直线交于 AB、AC 两边，而把 $\triangle ABC$ 的面积及周长同时平分。

解：令 $a+b+c=2p$，$AM=x$，$AN=y$

则 $\begin{cases} x+y=p \\ xy/bc=1/2 \end{cases} \Rightarrow x=(p\pm\sqrt{p^2-2bc})/2$，

故可作图。

18. 求作一三角形，使与一已知三角形相似，且与另一已知三角形等积。

解： 如图，设所作三角形为$\triangle AEF$，已知$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，令

$EF=x$，$AG=y$，则

$$\begin{cases} xy=a'h' \\ x/a=y/h \end{cases} \Rightarrow y=\sqrt{a'hh'/a},$$

故可作图。

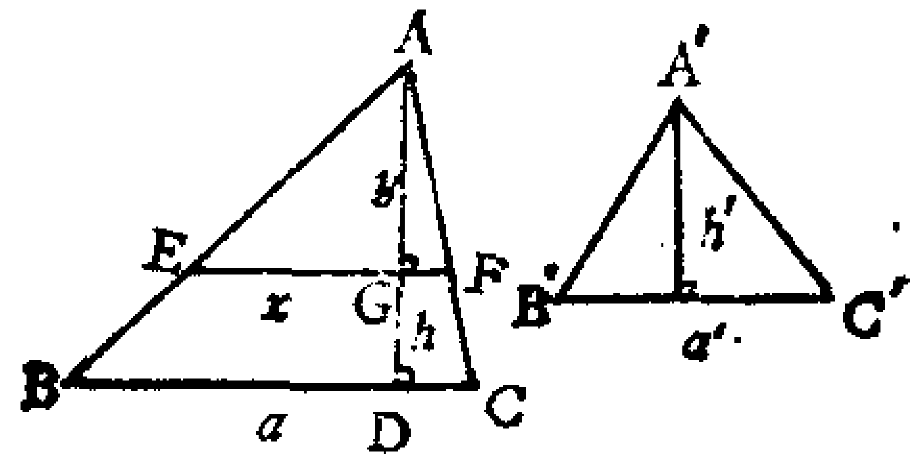


图31—18

19. 已知两相交直线及线外一点，求过此点作一直线，使与两已知直线交成的三角形有一定的面积。

解： 设已知二直线b、c交于A，在b、c上任作$\triangle ADE$且使其面积为已知面积r^2，令P到b、c距离各为h_1、h_2，$AD=e$，$AE=d$，并设$\triangle ABC$已作成，$AB=x$，$AC=y$，则

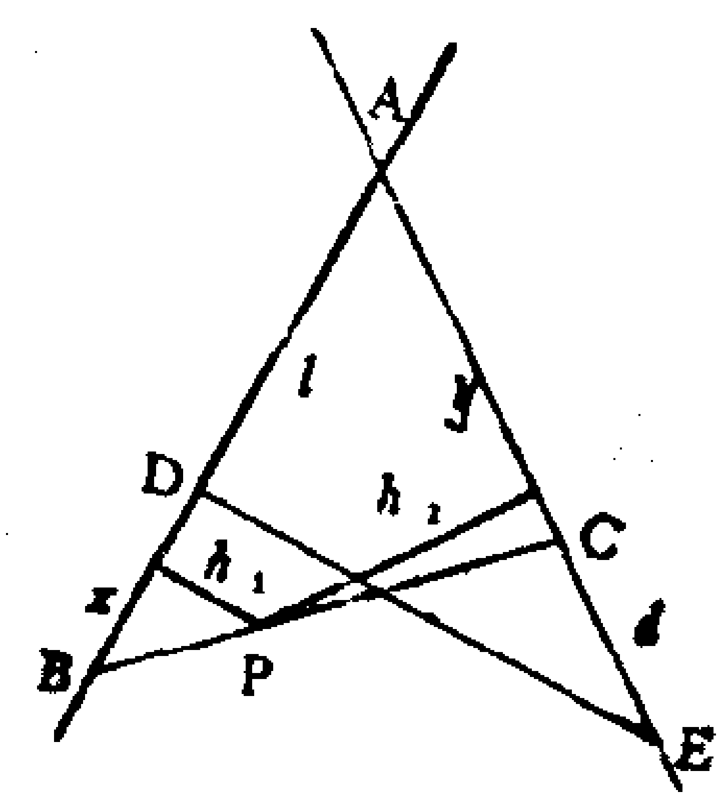


图31—19

$$\begin{cases} xy=de\text{（因顶角}A\text{相同，且面积相等）} \\ xh_1+yh_2=r^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_1x^2-r^2x+h_2de=0$$

$$\Rightarrow x=(r^2\pm\sqrt{r^4-4h_1h_2de})/2h_1$$

$$=r^2/2h_1\pm\sqrt{(r^2/2h_1)^2-(\sqrt{h_2de/h_1})^2}$$

故可作图。

20. 给定一梯形，求作两直线同平行于梯形的底边，且三等分梯形的面积。

解：仅作EF，使$ABFE$的面积等于$ABCD$面积的三分之一，令$AB=a'$，$CD=a$，梯形$ABCD$和$ABFE$高各为h、y，$EF=x$，作$AH\parallel BC$，则

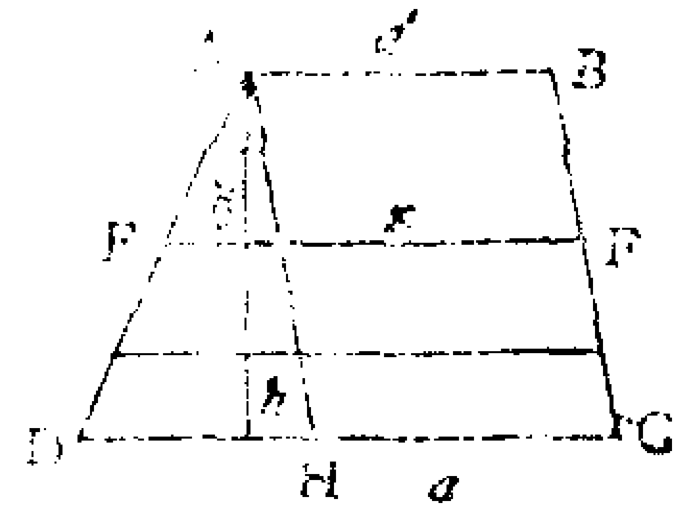


图31—20

$$\begin{cases}(a'+x)y/2=(a'+a)h/6\\ y/h=(x-a')/(a-a')\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{a^2/3+2a'^2/3}$$

故可作图。另一直线仿此可作。

21. 已知勾股的和及勾弦的和，求作直角三角形。

解：设勾、股、弦各为a、b、c，定长为m、n，则

$$\begin{cases}a+b=m\\ a+c=n\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}\Rightarrow a=\sqrt{2n(n-m)}+m-n\text{（负的已舍去）}$$

故a、b、c均可作出。

22. 已知勾股的和及弦的高，求作直角三角形。

解：设勾、股、弦为a、b、c，弦上高为h，定长为m。

则 $$\begin{cases}a+b=m\\ ch=ab\end{cases}\Rightarrow c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=m^2-2ch$$

$$\Rightarrow c^2+2hc-m^2=0\Rightarrow c=\sqrt{h^2+m^2}-h\text{（负的已舍去）}$$

$\therefore c$可作出。

再由$\begin{cases}a+b=m\\ ab=ch\end{cases}$即可作出$a$、$b$。

23。已知勾股的差以及弦与弦高的和，求作直角三角形。

解：设勾、股、弦为a、b、c，弦上高为h，定长为m、n，则

$$\begin{cases}b-a=n\\ c+h=m\\ a^2+b^2=c^2\Rightarrow c^2=(b-a)^2+2ab=n^2+2ch\\ ab=ch \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =n^2+2c(m-c)\end{cases}$$

$\Rightarrow 3c^2-2mc-n^2=0$

$\Rightarrow c=(m+\sqrt{m^2+3n^2})/3$（负的已舍去）

故c可作出，h可由$h=m-c$作出。a、b可由

$\begin{cases}b-a=n\\ a\cdot b=ch\end{cases}$作出。

24。各已知半径，求作两圆，使它们的外公切线长恰等于内公切线长的二倍。

解：假定$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$已作成，则外公切线长$t=\sqrt{O_1O_2{}^2-(r_1-r_2)^2}$，内公切线长：

$t'=\sqrt{O_1O_2{}^2-(r_1+r_2)^2}$

由$\sqrt{O_1O_2{}^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{O_1O_2{}^2-(r_1+r_2)^2}$

$\Rightarrow O_1O_2=\sqrt{(3r_1+r_2)(r_1+3r_2)/3}$，

故可作图。

25。以共线三点各为心作圆，使两两均相切，但不是同

切于一点。

解：如图可得：

$$\begin{cases} r_1+r_3=O_1O_3 \\ r_2-r_1=O_1O_2 \\ r_2-r_3=O_2O_3 \end{cases}$$

易得 r_1、r_2、r_3，故可作图。

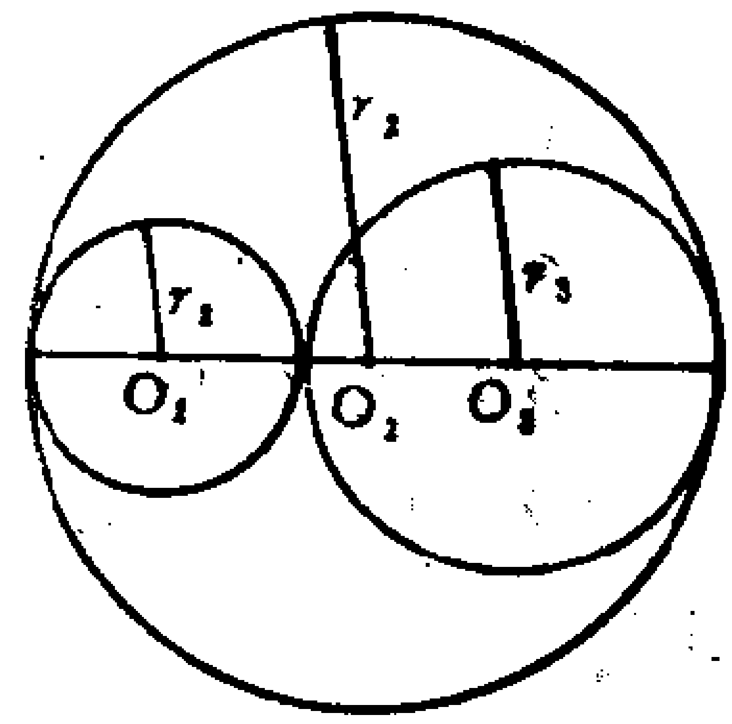


图31—25

26．在已知三角形内求作共点的三条等长线段，使它们分别平行于三角形的三边，且端点分别落在各边上（提示：应用复习题三第94题）。

解：如图，令 $BC=a$、$CA=b$、$AB=c$，$XX'=YY'=ZZ'=m$。据复习题三第94题，

$m/BC+m/CA+m/AB=2$

$\Rightarrow m=2abc/(bc+ca+ab)$

故可作图。

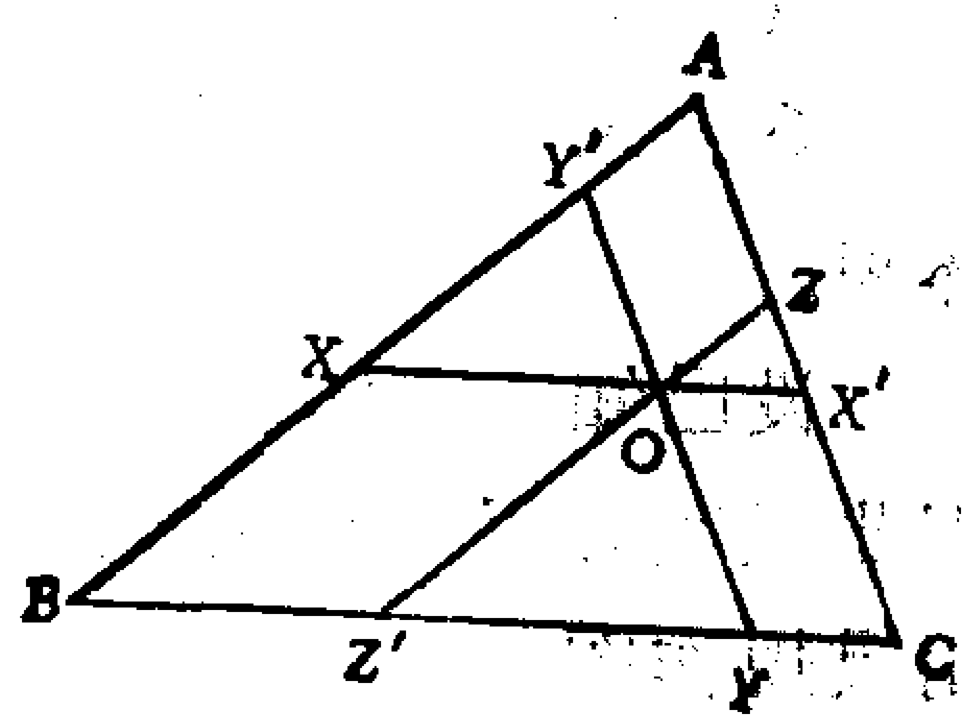


图31—26

27．已知边长，求作正十边形（不用放大法）。

解：由 $a_{10}=(\sqrt{5}-1)R/2$，得

$R=2a_{10}/(\sqrt{5}-1)=(\sqrt{5}+1)a_{10}/2$

故可作出正十边形的外接圆，于是可得作法。

28．求作下列边数的正多边形：

（1）51边；　（2）85边；　（3）255边。

（提示：圆心角 $n\pi/17$，$n\pi/5$，$n\pi/3$ 可由正十边形、正五边

形及正三边形的作图得出，于是由

（1）$2\pi/51=\pi/3-5\pi/17$

（2）$2\pi/85=\pi/5-3\pi/17$

（3）$2\pi/255=2\pi/5-\pi/3-\pi/17$

可得正51边形，正85边形和正255边形的圆心角，故可作图。

习题三十二

1—5略

6．求作一立方体，使它的体积三倍于一已知正方体的体积。

设已知正方体棱长为a,所求立方体棱长为x,则$x^3=3a^3$，但此三次方程一般无有理根，据定理193的推论，本题不能用尺规作图。

7．求作一立方体，使它的体积等于一已知立方体的体积之一半。

解：设已知立方体棱长为a，所求立方体棱长为x，

则$x^3=a^3/2$，于是$2x^3-a^3=0$，它一般没有有理根，故一般不能用尺规作图。

8．已知勾股的立方比及弦长，求作直角三角形。

解：设勾、股和弦分别为a、b和c，则$a^3/b^3=k$（k为常数），即$a^3-kb^3=0$。若k为完全立方数，则易作出直角三角形，若k不是完全立方数，则此题不能用尺规作出。

9. 已知线段a、b，求作线段x、y，使合于$a/x=x/y=y/b$。（Hippocrates 问题）

解：由$a/x=x/y=y/b$ 得

$x^3-a^2b=0$ 和 $y^3-ab^2=0$

∴当$a=b$时，x、y易作出，

当$a\neq b$时，不能用尺规作出。

10. 已知直角$\angle BAC$，在直线AC、AB上各求一点X、Y，使得$BX\parallel CY$且$BX\perp XY$（提示：应用上题）。

解：如图，可得：

$AB/AX=AX/AY=AY/AC$。

令$AB=a$，$AC=b$，$AX=x$，$AY=y$，则得

$a/x=x/y=y/b$，

故可应用上题。

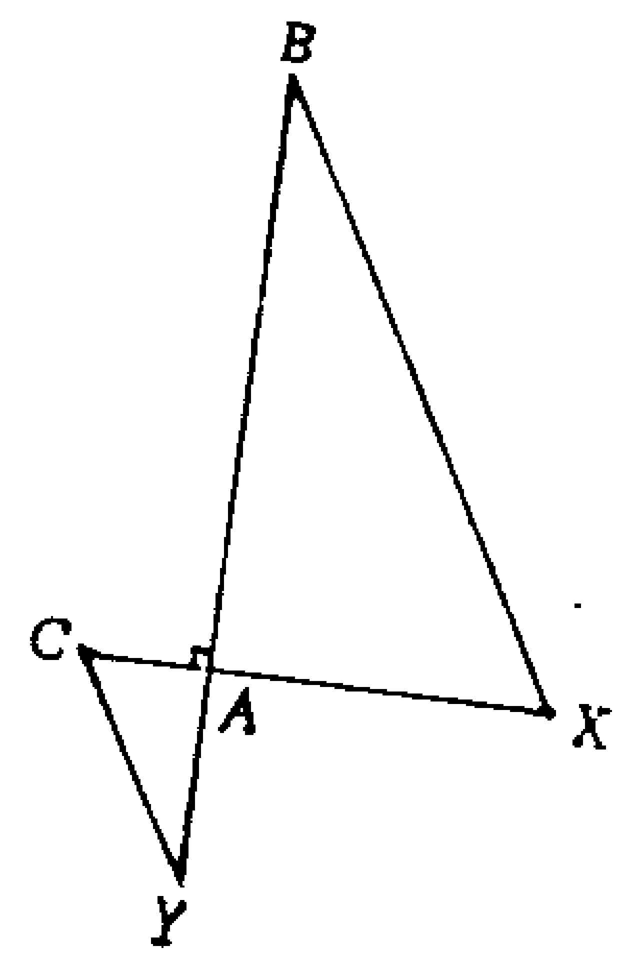


图32—10

11. 设a是通过⊙O的中心的定直线，b是⊙O的定切线，求作直线c切⊙O于C，交a、b于A、B，使C恰是AB的中点。

解：设定切线切⊙O于D，则有$\angle DOB=\angle BOC=\angle COA$，本题即三等分已知角问题，故不能用尺规完成。

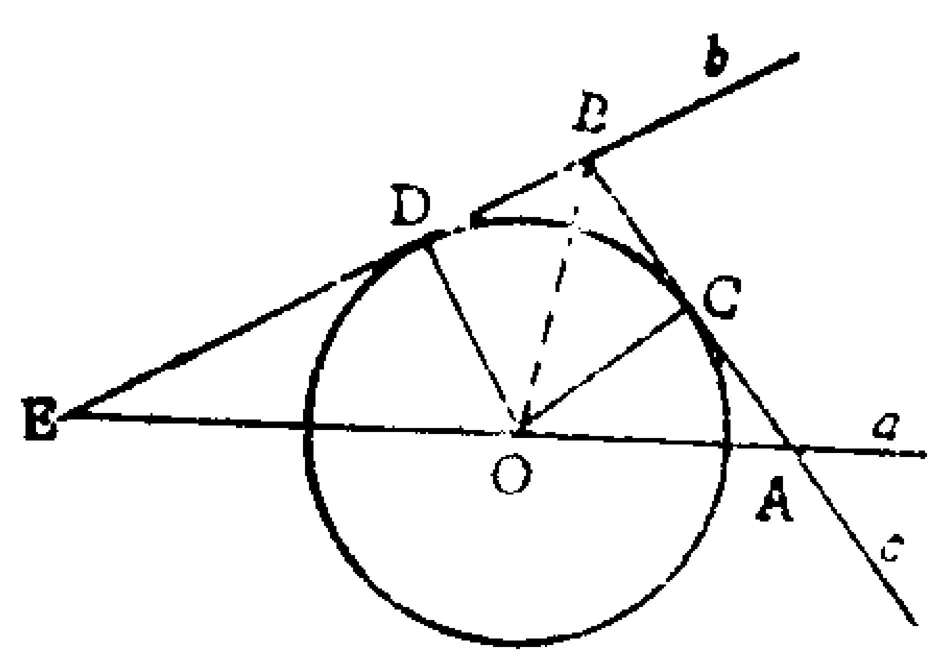


图32—11

12. 已知一圆及两直线，求作一直线切于已知圆而与两

已知直线相交，使切点是两交点间线段的中点。

解：显然，上题是本题的特例，故本题一般不能用尺规完成。

13. 设AB是半圆形的直径，E是半圆上一定点，求过E作一直线交直线AB于C，交半圆于D，使$CD=AB/2$。

解：如图，令圆心为O，
则$\angle 2=\angle 1=2\angle\alpha$，
$\therefore\angle BOE=3\angle\alpha$，
即$\angle\alpha=\angle BOE/3$（定角），
故本题一般不能用尺规作出。

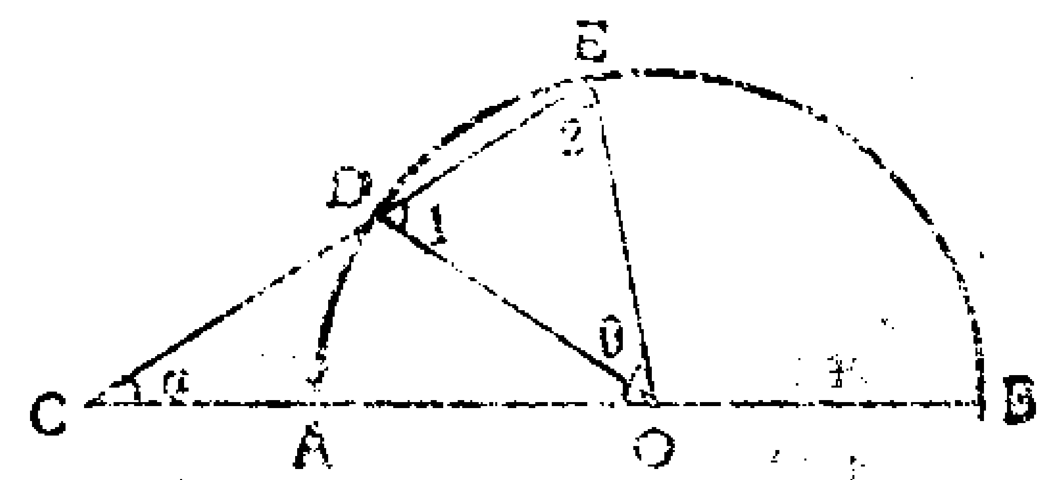


图32—13

14. 设AB是$\odot O$的定直径，E是$\odot O$上一定点，求作一非直径的弦ED，使交直径AB于C，而有$CD=OA$。

解：如图，令$\angle EOA=\angle\theta$（定角），则

$2\angle\alpha+\angle AOD+\angle\theta=180°$

$\therefore CD=OA$，

$\therefore 3\angle\alpha/2+90°+\angle\theta=180°$，

即$\angle\alpha=(180°-2\angle\theta)/3$（定角），故本题一般不能用尺规作出。

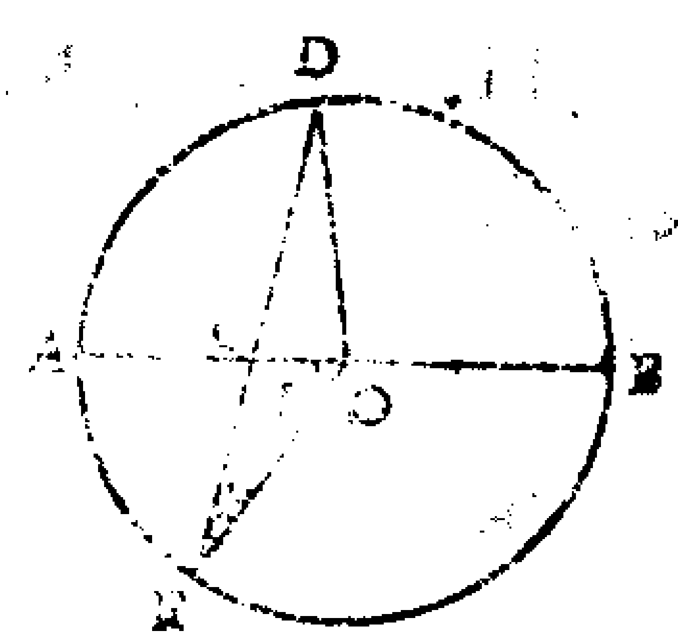


图32—14

15. 已知一圆及一直线，求过圆上一定点作一直线与已知直线相交，使两交点间的线段等于定长。

解：上题为本题特例，故本题一般亦不能用尺规作出。

16. 已知两条相交的直线及线外一点，求过此点作一直线使被两已知直线截下定长的线段。

解：研究特例：二已知直线 $a\perp b$，a、b交于P，定点为O，设定长为 $m=2OP$，若所作直线交 a、b 于 A、B，则 $AB=2OP$，取AB的中点为 M，且作 $OC\parallel a$（定直线）

$\because PM=AB/2=OP$，

$\therefore \angle 1=\angle 3=2\angle 2=2\angle AOC$，

即$\angle AOC=\angle POC/3$（定角）

故本题一般不能用尺规完成。

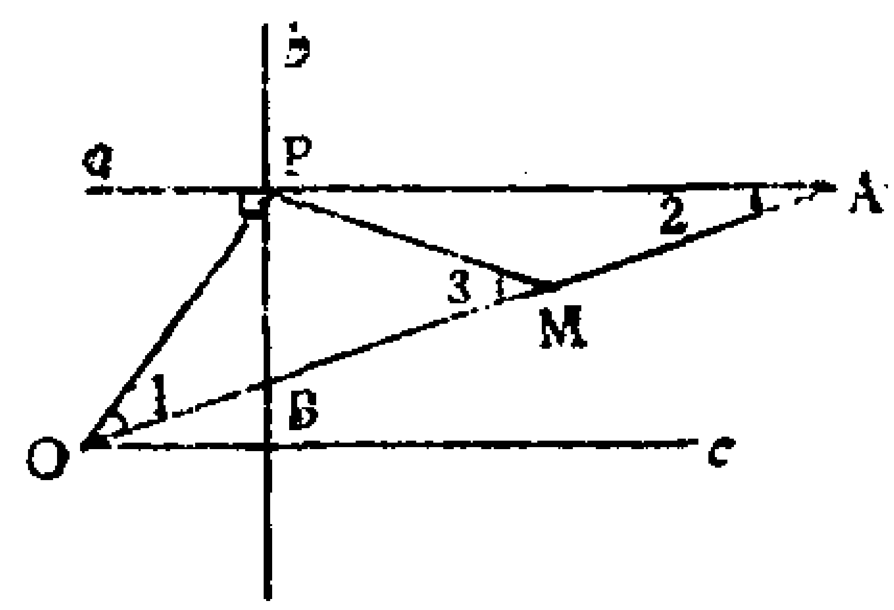


图32—16

17. 求内分已知线段AB于C、D两点，使合于$\overline{AC}/\overline{CD}=\overline{CD}/\overline{DB}=\overline{DB}/\overline{AB}$。

解：$\because \overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DC}=AC$，

$\therefore (\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DC})/\overline{CD}=\overline{CD}/\overline{DB}=\overline{DB}/\overline{AB}$，

不妨令$\overline{AB}=1$，则可得 $1-\overline{DB}-\overline{DB}^2=\overline{DB}^3$，设$DB=x$，则得 $x^3+x^2+x-1=0$，显然这方程无有理根，故本题一般不能用尺规完成。

18. 已知三边，求作有外接圆的凸四边形，而使第四边恰为外接圆的直径。（Newton 问题）

解：设四边形三边为已知长 a、b、c，第四边为其外接圆直径 x，由托列迷定理得：

$ac+xb=\sqrt{x^2-c^2}\cdot\sqrt{x^2-a^2}$

即 $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$，此方程一般无有理根，故本题一般不能用尺规作图。

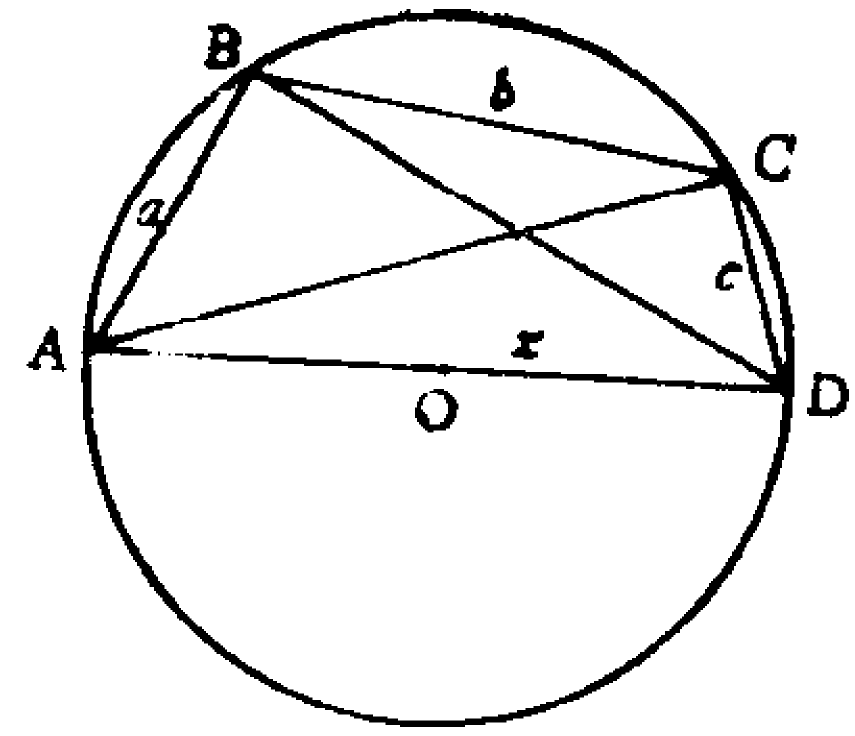


图32—18

19。已知外心至三边的距离，求作三角形。（提示：取外接圆半径为未知量）

解：如能作出外接圆，则本题易作出。如图，设外心为O，它至三边BC、CA、AB的距离为$OL=l$，$OM=m$，$ON=n$，设$\odot ABC$半径为x，则

$x^2-l^2=BL^2=MN^2=m^2+n^2+2mnl/x$（$\angle A$为锐角情形）

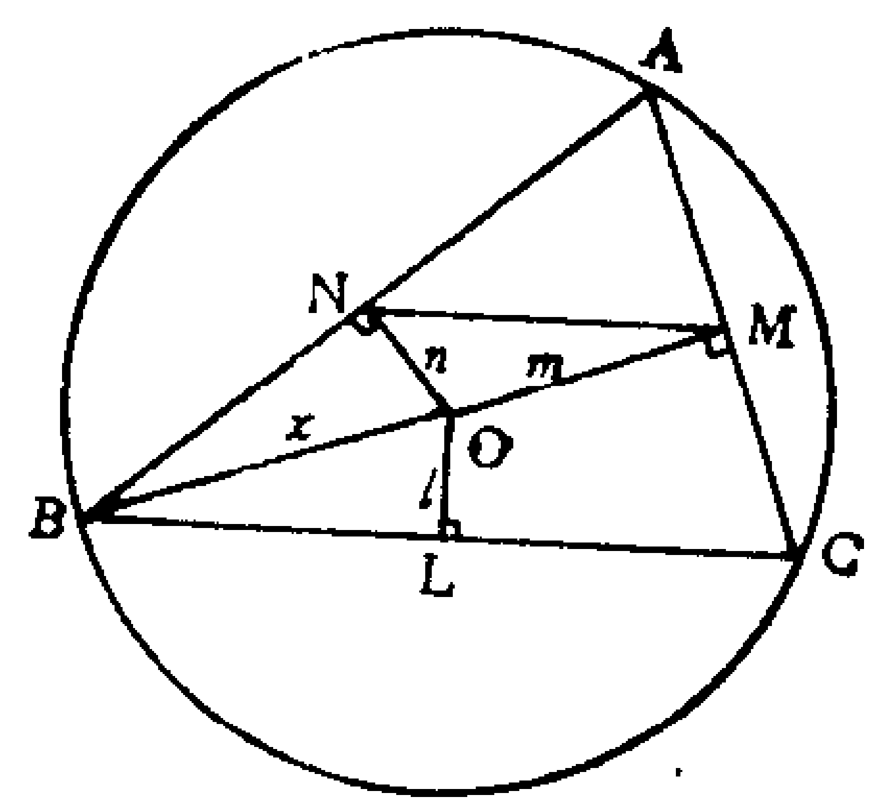


图32—19

即 $x^3-(m^2+n^2+l^2)x-2mnl=0$，此方程一般无有理根，故本题一般不能用尺规作出。

20。已知垂心至三顶点的距离，求作三角形。

解：据§37例题19，本题转化为上题，故一般不能用尺规作图。

21。已知垂心至三边的距离，求作三角形。

解：由习题十八第22题(2)知，若HD、HE、HF为定值，则HA、HB、HC也为定值，故本题可转化为上题，一般也不能用尺规作图。

22。已知内心至三顶点的距离，求作三角形。

解：由习题二第25题，本题可化为上题，故一般不能用尺规完成。

23。已知内心至三旁心的距离，求作三角形。

解：由习题二第25题，本题可化为第20题，故一般不能用尺规完成。

24。已知腰的高及外接圆半径，求作等腰三角形。（提示：取顶角的半角的正弦为未知量）

解：如图，取顶角 A 的半角 α 的正弦 $\sin\alpha=x$，设腰高为 h，外接圆半径为 R，则 $h=2R\mathrm{con}\alpha\sin2\alpha$ $\Rightarrow x^3-x+h/2R=0$，取 $h<2R$ 的 h、R 的值，此方程一般将没有有理根，故本题一般不能用尺规作出。

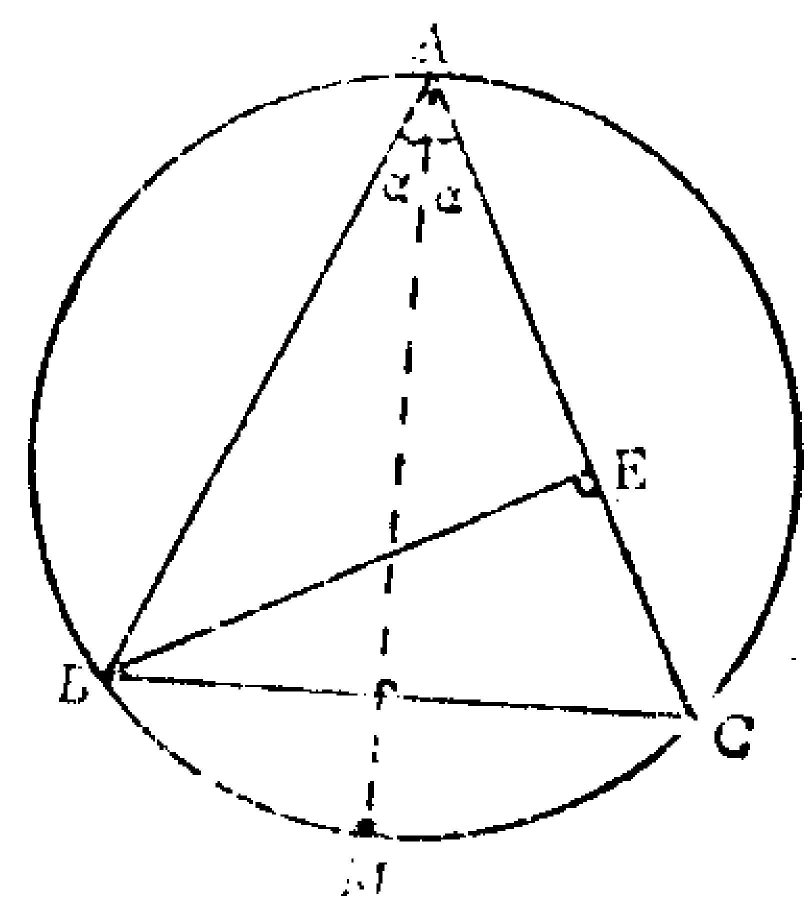


图32—24

25。已知周长，内切圆半径，外接圆半径，求作三角形。

解：按三角形的一般假设，则有

$$\begin{cases} s=(a+b+c)/2 \\ rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ R=abc/4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{cases}$$

化简得：

$$\begin{cases} a+b+c=2s \\ ab+bc+ca=r^2+s^2+4r\cdot R \\ abc=4rRs \end{cases}$$

即 a、b、c 分别为 $x^3-2sx^2+(r^2+s^2+4rR)x-4rRs=0$ 的三个根，但此三次方程一般没有有理根，故本题一般不能用尺规作出。

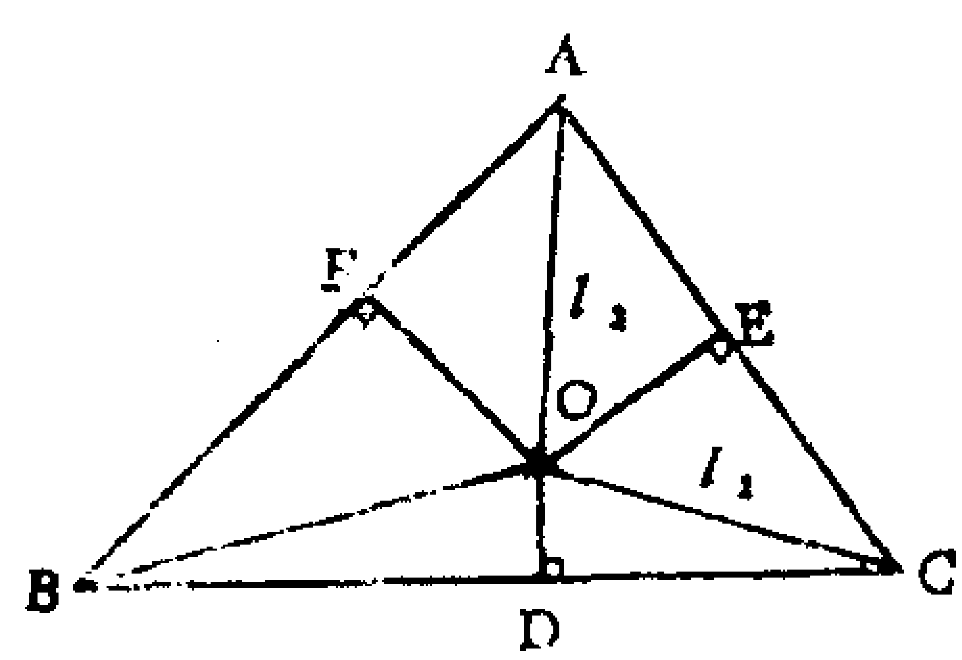
复 习 题 五

1. 在$\triangle ABC$内求一点O，使面OBC：面OCA：面$OAB=1:2:3$。

解：如图：作O至三边的距离OD、OE、OF，则由

$\triangle OBC:\triangle OCA=1:2$

可得 $OD:OE=AC:2BC$，于是O在"到BC、AC直线的距离之比为$AC:2BC$的动点轨迹l_1上"，同样，O也在"到AC、AB直线的距离之比为$2c:3b$的动点轨迹l_2上"。用轨迹交会法即得作法。



图复五—1

2. 设A、B是直角$\angle XOY$的OX边上两定点，试在OY边上求一点C，使合于$\angle OAC=3\angle OBC$。

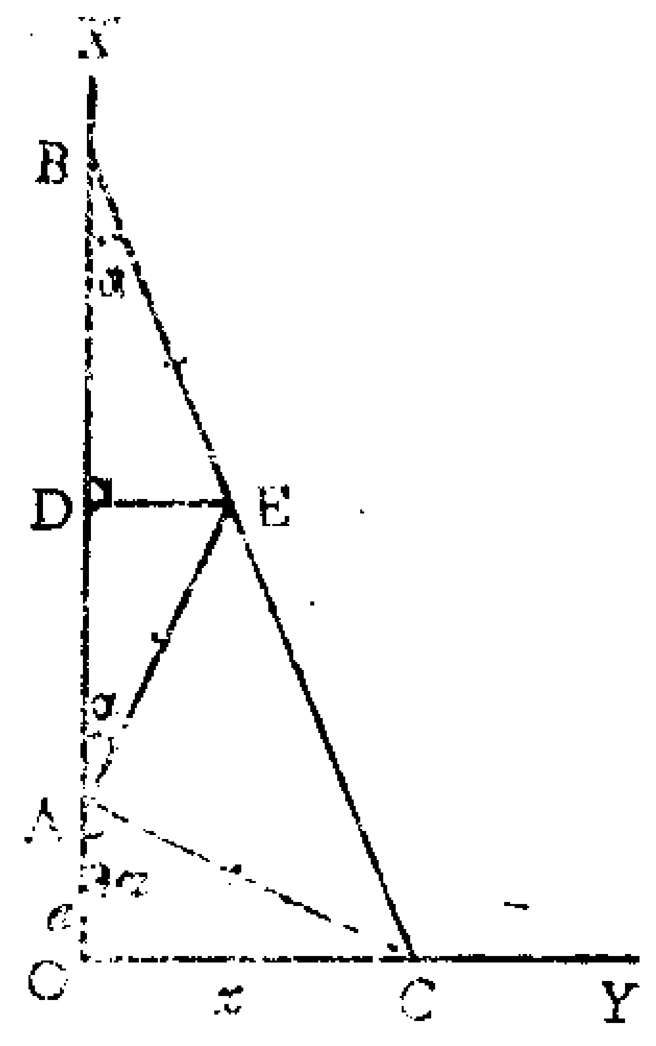
解：如图，令$OA=a$，$OB=b$，$OC=x$，则$DE/x=BD/b$

$\Rightarrow \{x^2+a^2-[(b-a)/2]^2\}/x^2$

$=[(b-a)/2]^2/b^2$

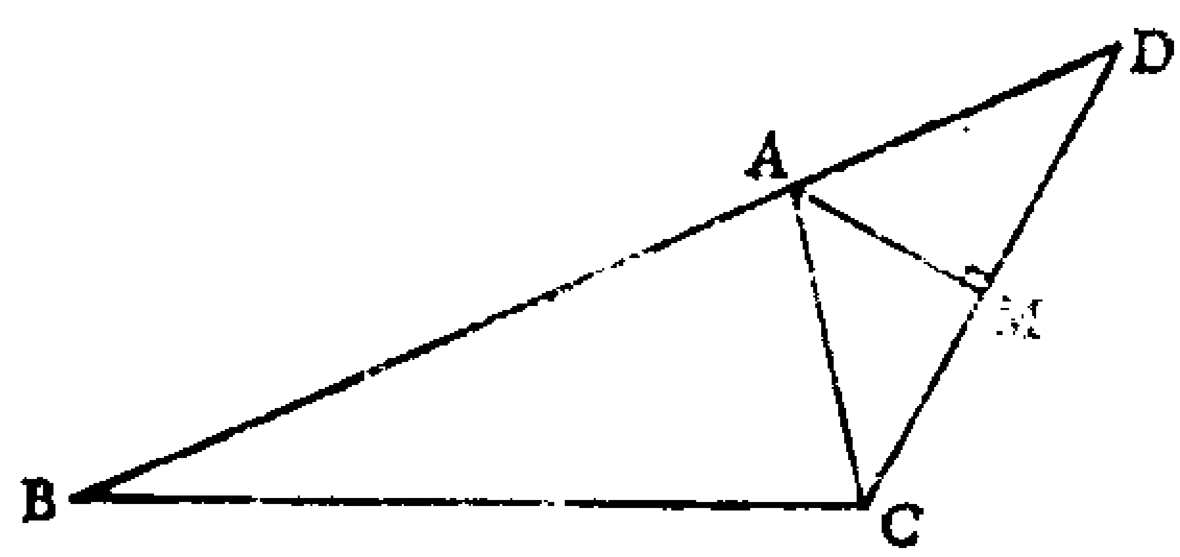
$\Rightarrow x=b\sqrt{(b-3a)/(3b-a)}$，

故可作图。



图复五—2

3．已知一角、一邻边、其它两边的和，求作三角形。



图复五—3

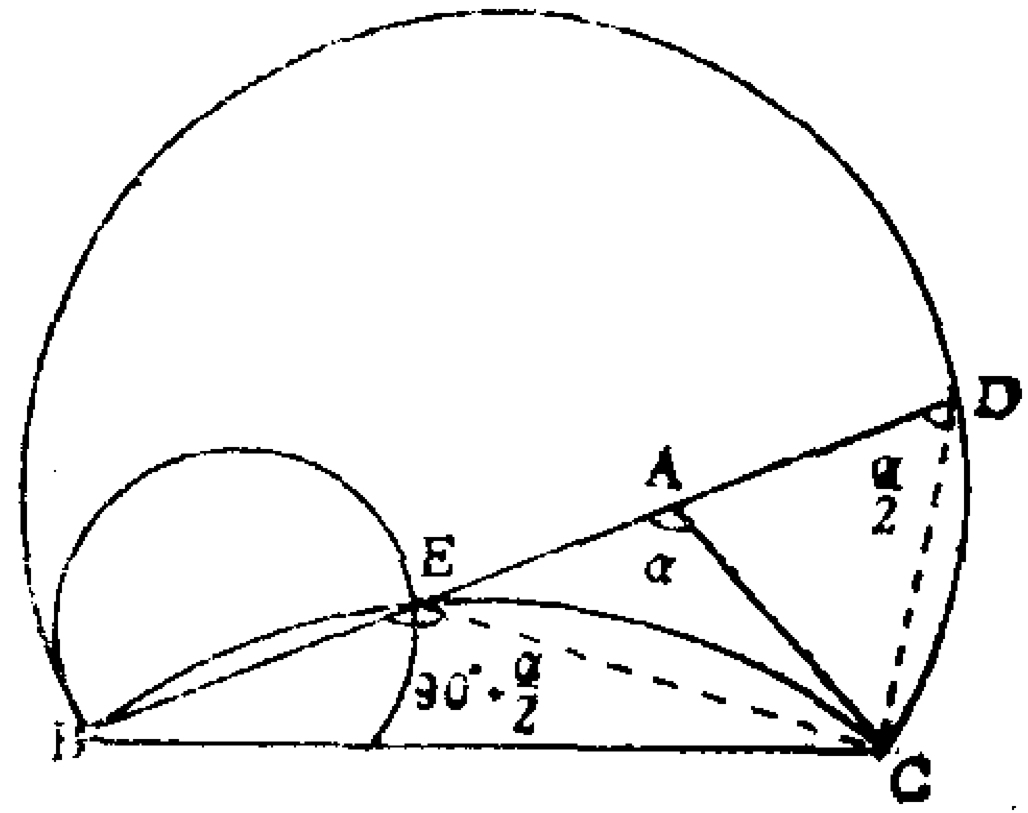
解：如图，作奠基三角形BCD，使$\angle B$、BC为已知，BD为它两边之和，作CD中垂线，则可在BD上定顶点A，则$\triangle ABC$为所求。

4．已知一角、对边、两夹边的和，求作三角形。

解：以1/2已知角为顶角，已知对边为对边，已知和为邻边作一奠基三角形，再如上题方法定顶点则得。

5．已知一角、对边、两夹边的和与差之比，求作三角形。

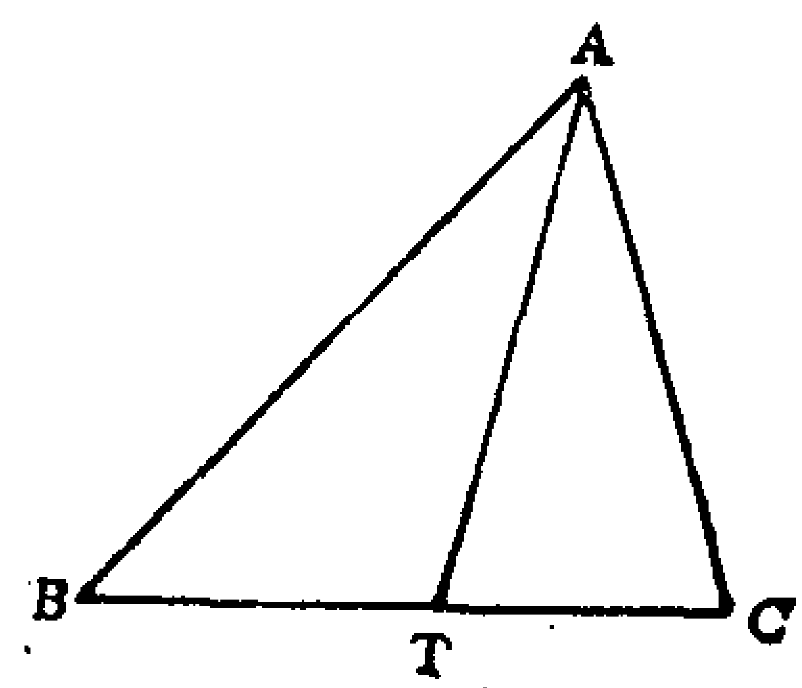
解：如图，设$\triangle ABC$为所求，$\angle A=\alpha$，BC为已知，在直线AB上，取$AD=AE=AC$，易见D、E分别在以BC为弦$\alpha/2$、$90°+\alpha/2$为弓形角的弓形弧上。于是，本题化为"在同弦上的二弓形弧上定D、E点，使BD/BE为已知。"只须以B为中心，已知比为相似比，作大弓形弧的位似圆，则所作圆与小弓形弧的交点即为D。D点已定，则E、A就能作出。



图复五—5

6．已知底边、顶角的平分线、两腰之比，求作三角形。

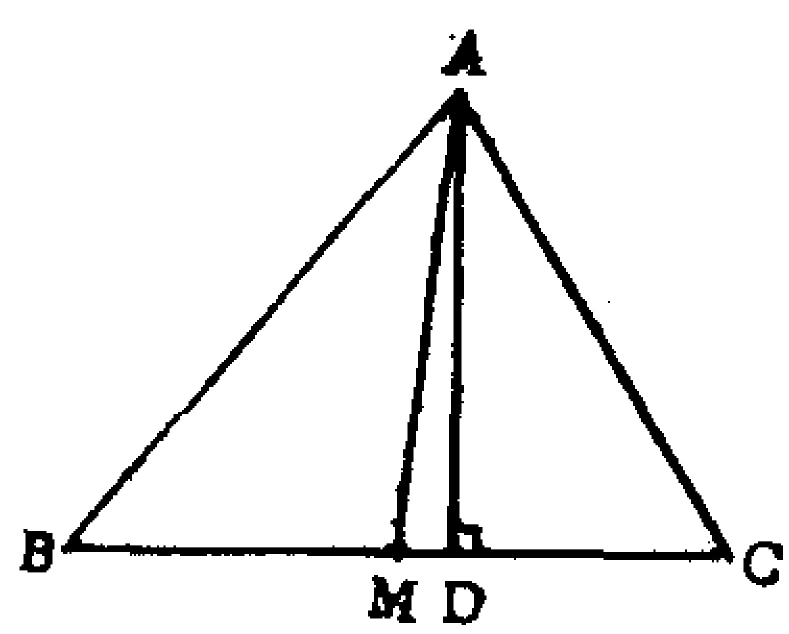
解：设$\triangle ABC$已得，AT为角平分线，因$BT/CT=AB/AC$为已知，所以T点易定，而A点可由以T为心，TA（已知）为半径的圆以及以B、C为定点，已知比为定比的阿氏圆交会而得到。



图复五—6

7．已知一边、这边的高、其它两边的平方和，求作三角形。

解：只须解决轨迹问题："到两定点距离的平方和为常数k^2的动点轨迹。"而由三角形中线定理（定理132）这是以已知底边BC的中点为心，$\sqrt{2k^2-BC^2}/2$



图复五—7

为半径的圆，而BC边上的高已知，故能作图。

8．已知一边、这边的中线、其它两边的平方差，求作三角形。

解： 只要定出顶点，它既在以底边中点为心，已知中线长为半径的圆上，又在例题65所决定的轨迹直线上，故能作图。

9．已知一角、对边的中线、外接圆半径，求作三角形.

解： 本题可化为“已知顶角、底边和底边上中线，求作三角形”即可用已知角为弓形角在外接圆上定一弓形，再由中线长求得顶点。

10．已知一角、周长、外接圆半径，求作三角形。

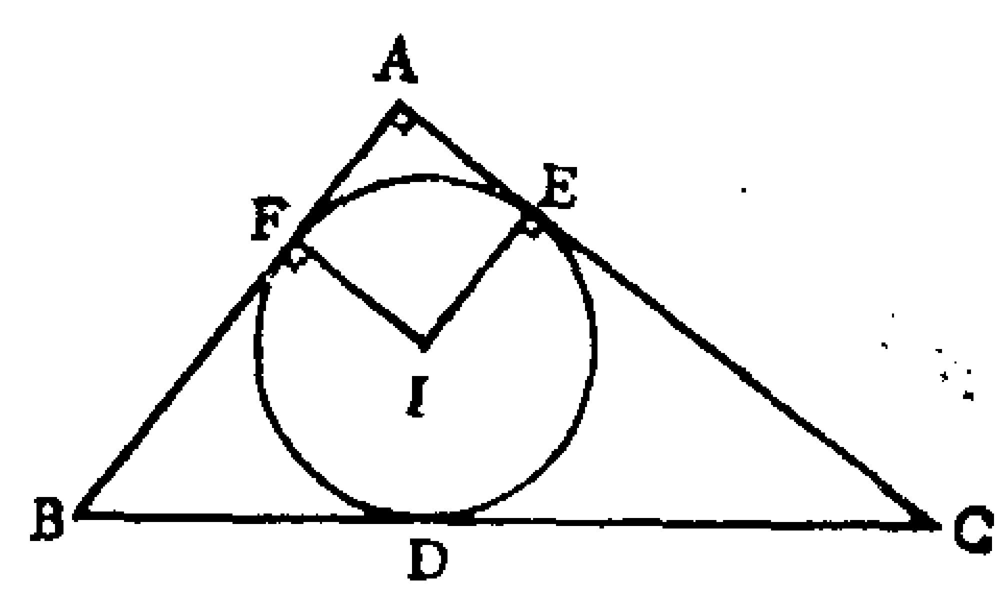
解： 仿上题，本题可化为第 4 题“已知一角、对边、两夹边的和，求作三角形。”

11．已知勾股的和及内切圆半径，求作直角三角形。

解： 如图，易见$AB+AC=2r+BC$，

$\therefore BC=AB+AC-2r$为已知

而顶角A为90°，故本题亦可化为第 4 题。



图复五—11

12．已知周长及两邻边的平方和　求作矩形。

解： 由两邻边的平方和可得对角线为已知，又两邻边的

和为周长的一半亦为已知，故可化为第4题，因此矩形可以作出。

13．在已知圆中，求作内接矩形，使合下列条件之一：

（1）周长一定；

（2）面积一定；

解：（1）因圆已知，则直径（即矩形对角线）已知，而周长已知，此问即为上题。

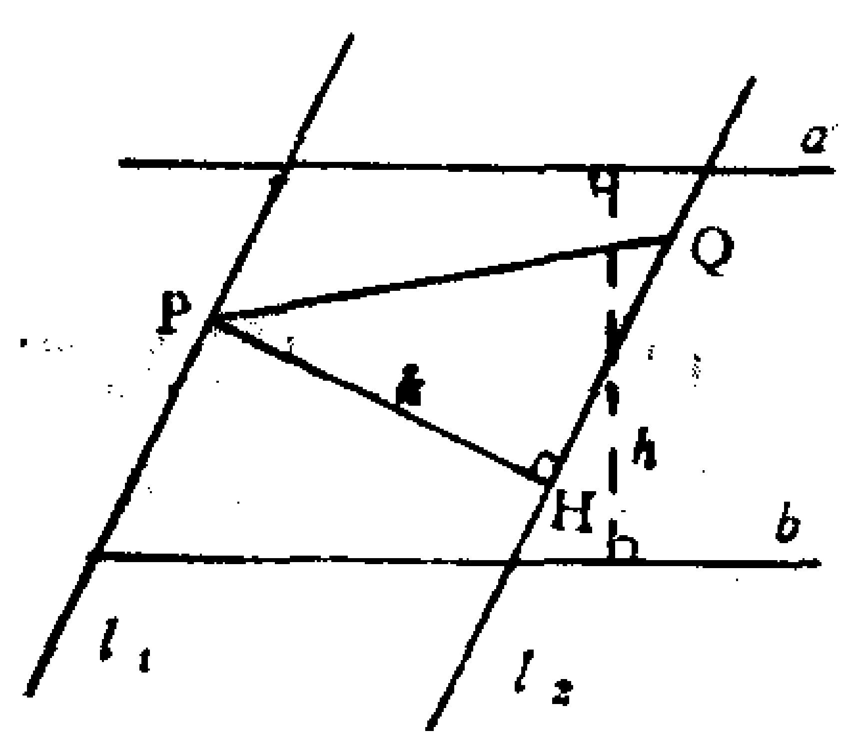
（2）设直径为d，两邻边为x，y，面积为c^2，则

$$\begin{cases} x^2+y^2=d^2 \\ x\cdot y=c^2 \end{cases} \Rightarrow x+y=\sqrt{d^2+2c^2}$$

此问亦可化为上题。

14．已知两平行线及两定点，求各过这两定点作两平行直线使与已知两平行线交成一菱形。

解：设图已成，直线a、b为已知，其距离为h，P、Q为已知点。若l_1、l_2为所作的平行线，据菱形对边间的距离相等可得以PQ为斜边，$PH=h$为直角边的奠基三角形，故图可作出。

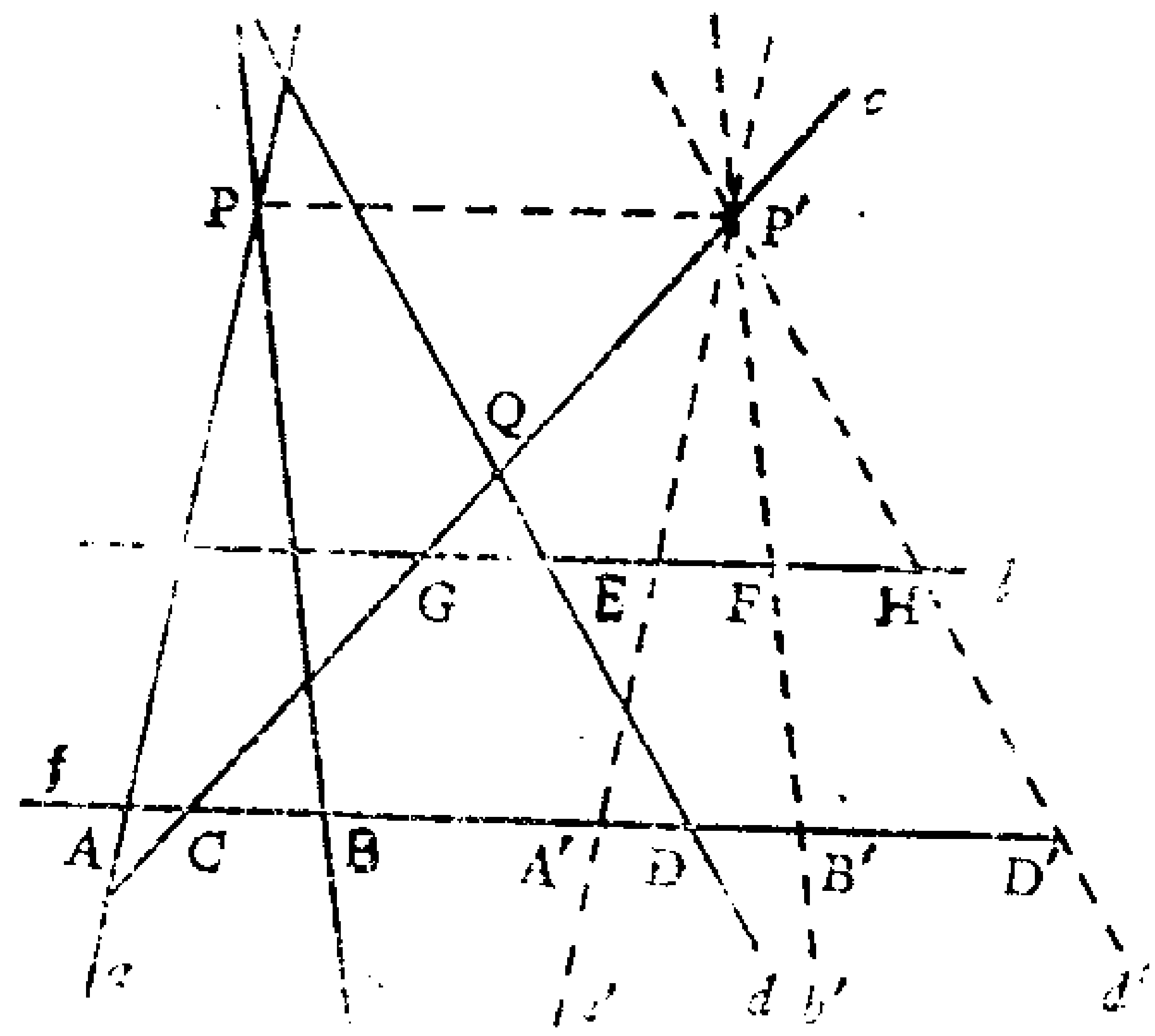


图复五—14

15．已知四直线a、b、c、d，求作定向直线l，交a、b、c、d于A、B、C、D，使$AB/CD=m/n$，m、n是给定的两线段。

解：若$a\parallel b$（或$c\parallel d$），则AB(或CD)为定长，从而

$CD=n\cdot AB/m$（或$AB=m\cdot CD/n$），作法甚易。如图。



图复五—15

设 a、b 交于 P，c、d 交于Q，按所给方向将P 平移至 c 上P' 点，并将直线 a、b、d 平移至 a'、b'、d' 且 a'、b'、c、d'共于点P'。按已知方向任作直线 l，设交 a'、b'、c、d'于E、F、G、H。并设图已作成，所求直线 f 与 a'、b'、d' 交于A'、B'、D'，则得$AB=A'B'$，于是

$$\left.\begin{array}{l}A'B'/CD'=EF/GH\\ CD/CD'=CQ/CP'=(CP'-P'Q)/CP'\end{array}\right\}\Rightarrow m/n$$

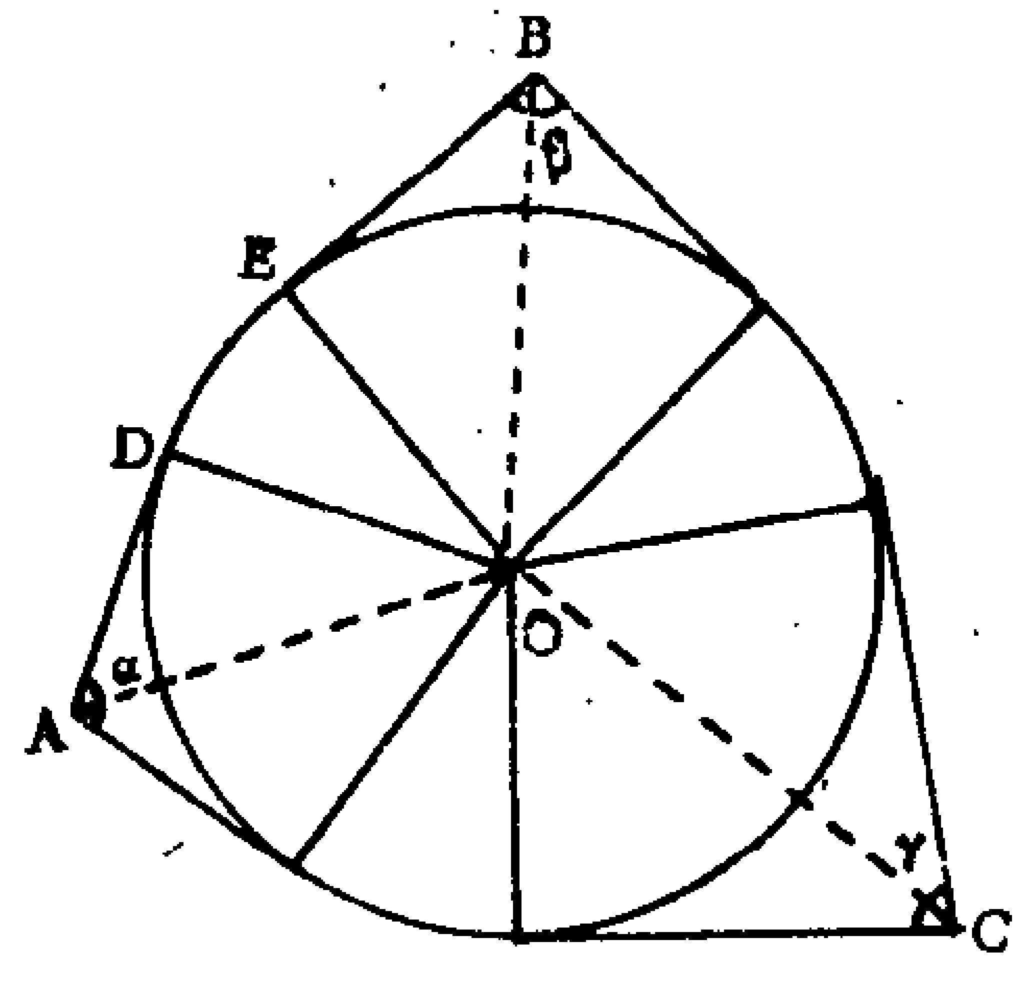
$=AB/CD=A'B'/CD=EF\cdot CP'/GH\cdot(CP'-P'Q)$

$\Rightarrow CP'=m\cdot GH\cdot P'Q/(m\cdot GH-n\cdot EF)$，而$m$、$n$、$GH$、$EF$、$P'Q$均为已知，所以$C$点可定，故可作图。

16．求作一圆，使三个定点对它的视角各等于已知角。

解： 如图，设$\odot O$为所求，A、B、C为已知点，α、β、γ为已知角，作$\odot O$切线AD、BE（D、E为切点），则$\angle OAD=\alpha/2$，$\angle OBE=\beta/2$均为已知，于是$Rt\triangle OAD$，

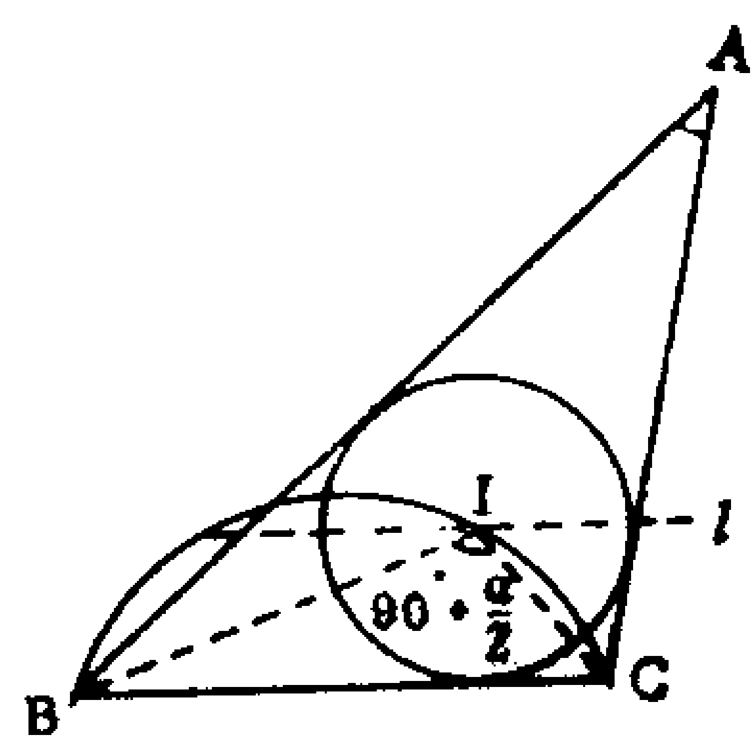
Rt△OBE形状确定，∴OA : OD，OB : OE一定，从而OA : OB为定值，因此，O在§57。例题64所定的轨迹上。类似地，OA : OC亦为定值，O又在另一同样性质的轨迹上，故O点可由上述二轨迹的交点决定，⊙O的半径则可由作出的Rt△OAD而得，即为OD。



图复五—16

17。已知一边、对角、内切圆半径，求作三角形。

解：如图，设△ABC为所求，只须定出内切圆，则图易作出。令BC、$\angle A=\alpha$为已知，I为内心，则由习题二第21题知$\angle BIC=90°+\alpha/2$为已知，于是I在以BC为弦，$90°+\alpha/2$为弓形角的弓形弧上，又内切圆半径r为已知，所以I又在与BC相距r的平行线l上，上述二轨迹交会可得I，故⊙$I(r)$可作出，AB、AC则易作出。



图复五—17

18。已知一角、内切圆半径、外接圆半径，求作三角形。

解："已知一角及外接圆半径"与"已知一边、对角"相同，故本题可化为上题。

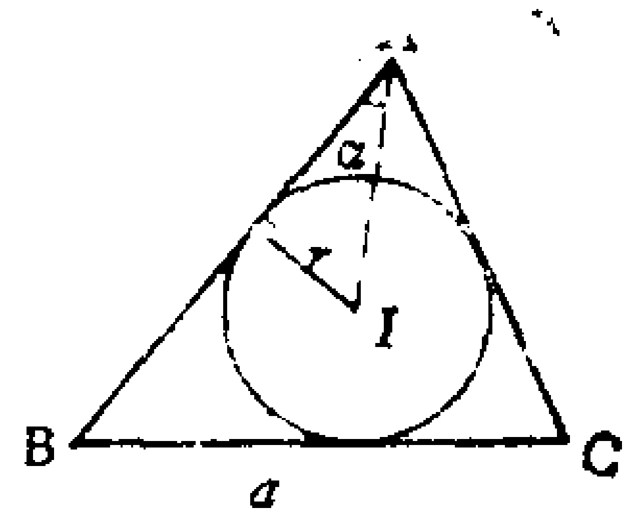
19。已知一角、面积、内切圆半径，求作三角形。

解：设已知面积为a^2，三角形周长为$2s$，内切圆半径为

r，则由 $sr=a^2 \Rightarrow s=a^2/r$，∴ s可作出，于是，问题化为："已知周长、一角、内切圆半径，求作三角形。" 即习题二十五第35题。

20. 已知一边、面积、内切圆半径，求作三角形。

解：仿上题，本题可化为"已知周长、一边、内切圆半径，求作三角形。"如图，设图已成，令$BC=a$为已知，D 为切点，则 $AD=s-a$为已知，又 r 为已知，

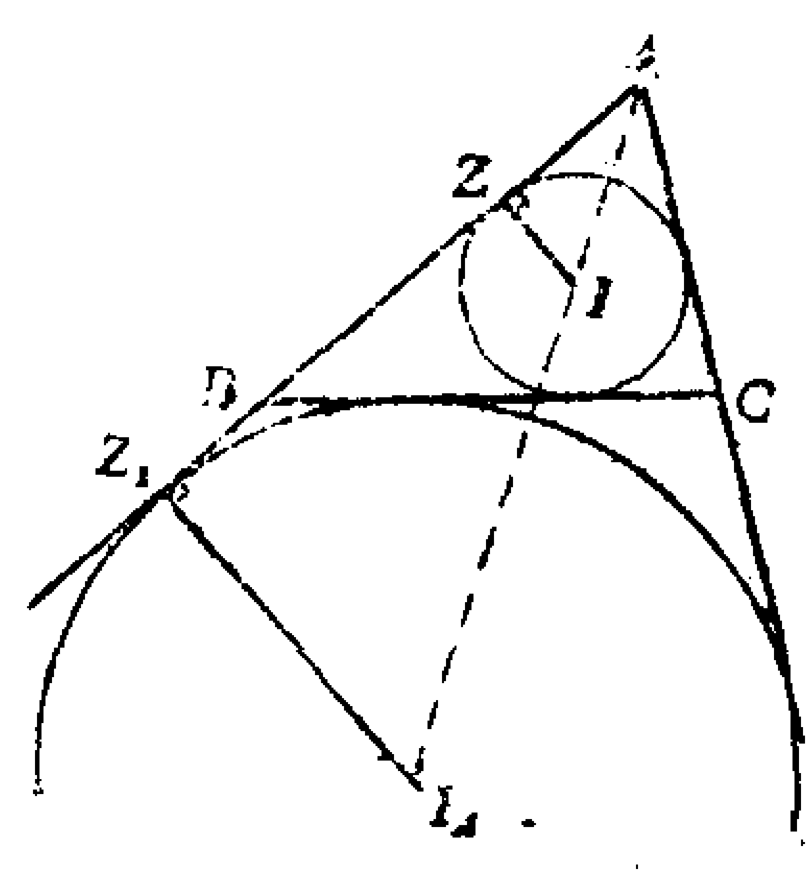


图复五—20

∴ Rt△ADI可作成，于是 ∠D$AI=\alpha$可作出，即∠$A=2\alpha$为已知，因此本题又化为上题，故可作出。

21. 已知一边、对角所含旁切圆的半径、内切圆半径，求作三角形。

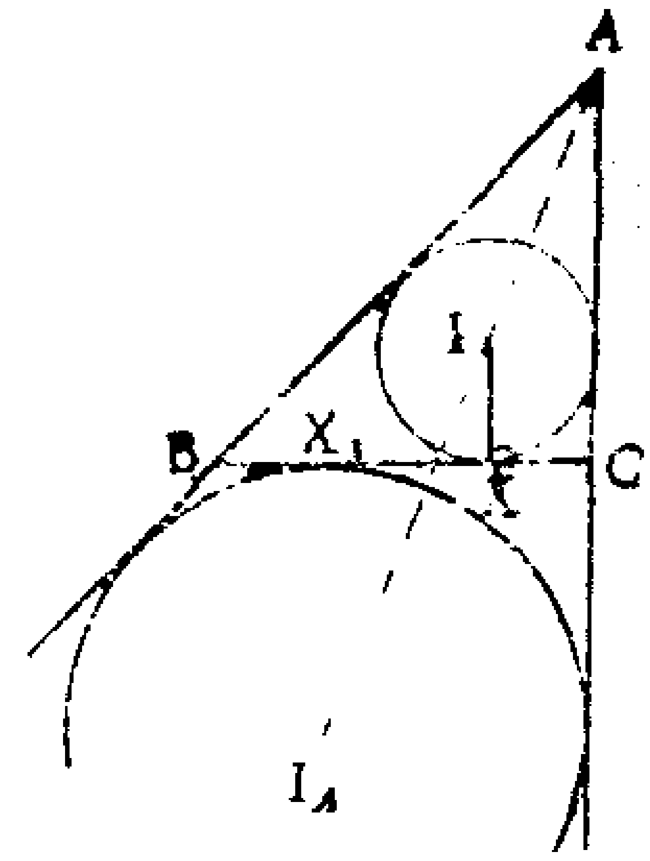
解：如图，设△ABC 为所求，BC 为已知，内心为 I，已知旁心为 I_A，Z、Z_1为切点，则由复习题一第13题知 $ZZ_1=BC$ 为已知，而 $IZ=r$，$IZ_1=r_A$ 为已知，于是，I、I_A 可由直角梯形ZZ_1I_AI决定，随之，⊙$OI(r)$，⊙$I_A(r_A)$也可作出，作两圆的内外公切线，则可作出△ABC。



图复五—21

22. 已知两边的差、夹角所含旁切圆的半径、内切圆半径，求作三角形。

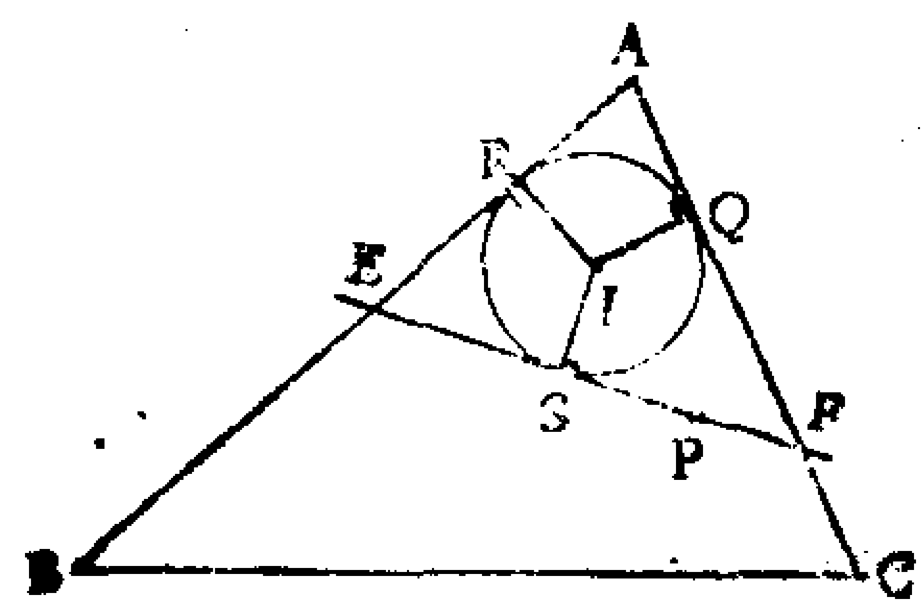
解：仿上题所设，令X_1、X为切点，则$XX_1=|AB-AC|$为已知，而IX、I_AX_1亦为已知，∴I、I_A可定，于是$\odot I(r)$，$\odot I_A(r_A)$可作出，故$\triangle ABC$可作出。



图复五—22

23. 设P是$\triangle ABC$内的定点，过P求作直线交AB、AC两边于E、F，使$BE+EF+FC$等于定长。

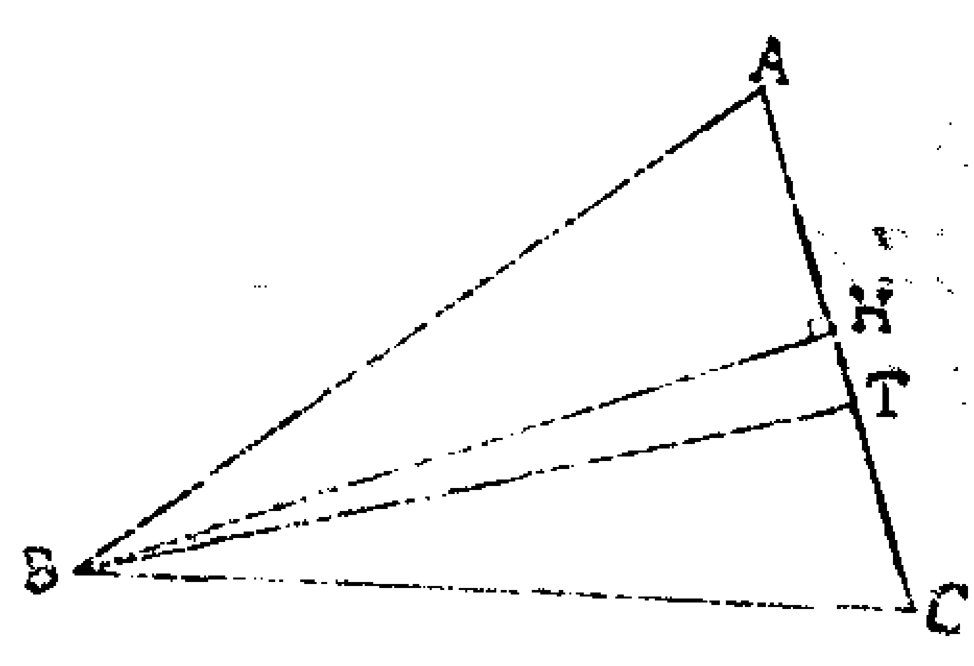
解：如图，设图已成，作$\triangle AEF$的内切圆$\odot I$，易知$BR+CQ=BE+EF+FC$为定长，∴ $AR+AQ=AB+AC-(BR+CQ)$为定长，但$AR=AQ$，∴R、Q可确定。于是$\odot I(IR)$可以作出。故所求直线为过P作$\odot I$的切线。



图复五—23

24. 已知一边、一邻角的平分线、其他两角的差（绝对值），求作三角形。

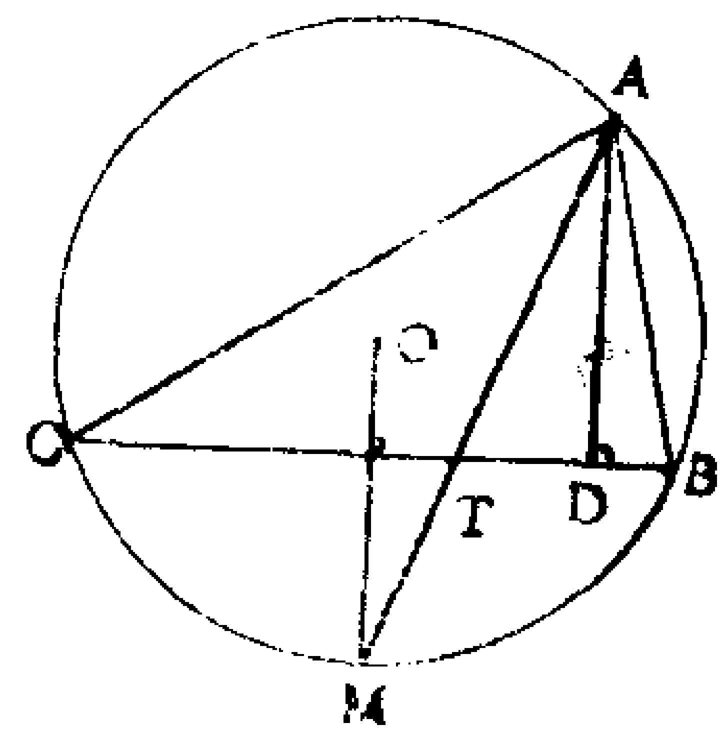
解：设$\triangle ABC$已作成，BC为已知，作高BH、角平分线BT，则据习题十一第18题有$\angle HBT=|\angle A-\angle C|/2$为已知，∴Rt$\triangle BHT$可确定，故作法易得。



图复五—24

25. 已知一边的高、两邻角的差、外接圆半径，求作三角形。

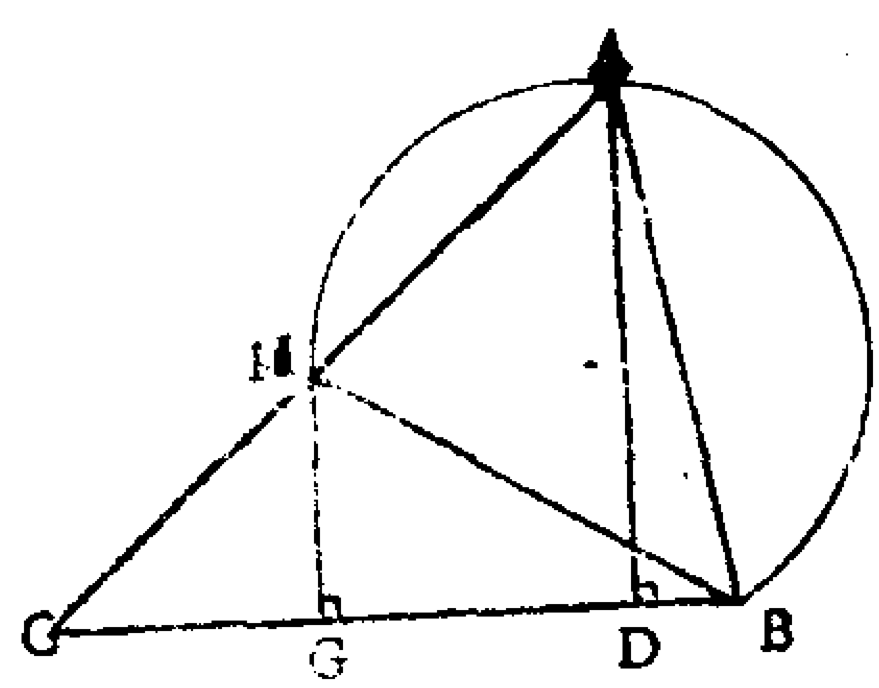
解：如$\triangle ABC$已作成，仿上题，令高AD为已知，作角平分线AT，并延长交外接圆$\odot O$于M，连OM，则$\angle OMA = \angle TAD = |\angle B - \angle C|/2$为已知，于是，可以任作一半径$OM$，随之$MA$也可确定，再以$A$为顶点，作$Rt\triangle ADT$，使$AT$在$AM$上。故$\triangle ABC$可作出。



图复五—25

26. 已知一角、一邻边的中线、对边的高，求作三角形。

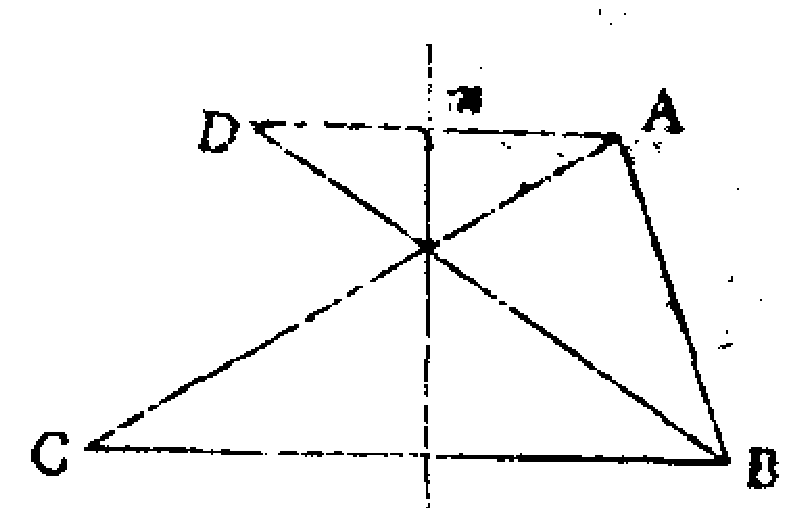
解：设$\triangle ABC$为所求，中线BM、高AD、$\angle A$为已知，作$MG \perp BC$于G，则$MG = AD/2$为已知，于是，$\triangle MGB$可作出，而A可用以MB为弦，已知角为弓形角的弓形以及和GB相距为已知高的平行线交会而得，如图，故$\triangle ABC$可作出。



图复五—26

27. 已知两腰的长及两底角的差，求作三角形。

解：设$\triangle ABC$已作成，引BC中垂线m，作A关于m的对称点D，连BD，在$\triangle ABD$中，$BD = AC$为已知，AB为已知，而$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = \angle B - \angle C$亦为已知，于是，$\triangle ABD$可作出，

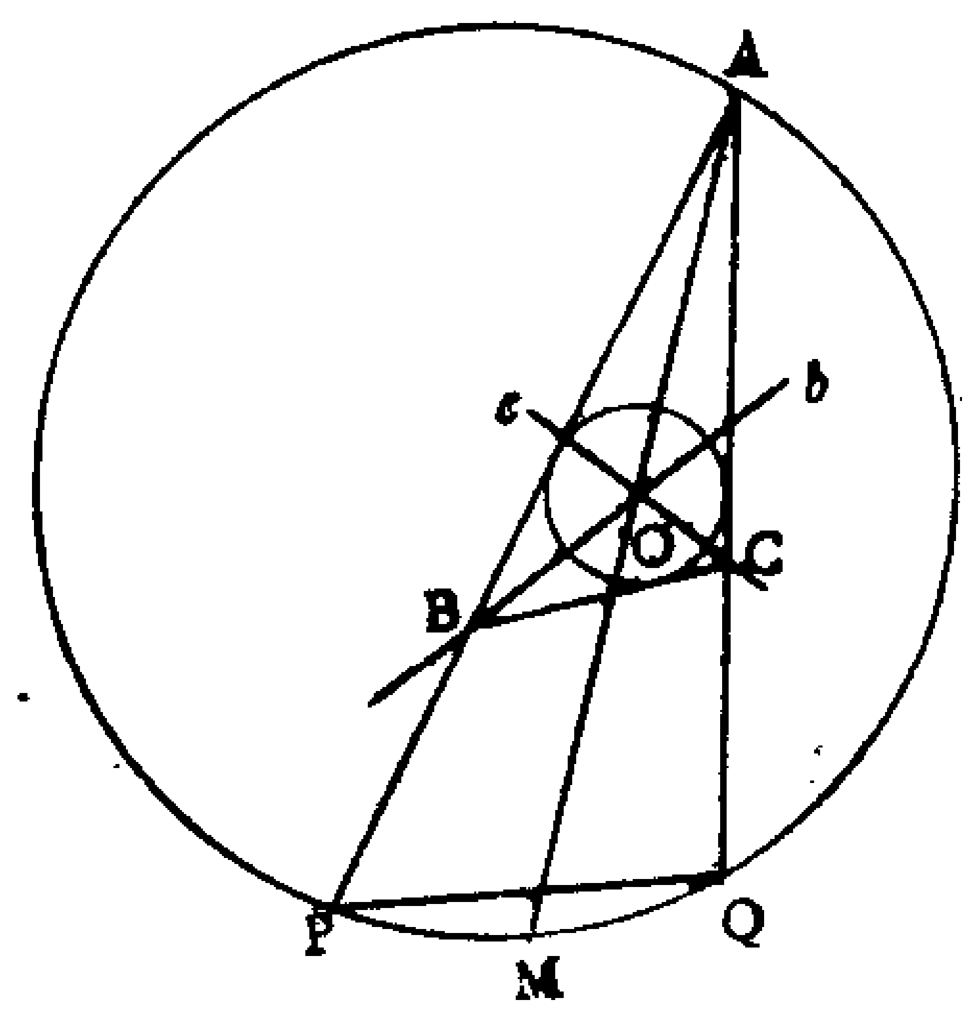


图复五—27

故$\triangle ABC$可作出。

28. 设O是两定直线b、c的交点，P、Q是线外两定点，求作$\triangle ABC$，使顶点B、C分别落在b、c上，直线AB、AC分别通过P、Q，且O是$\triangle ABC$的内心或旁心。

解：如图（仅绘出内心情形），设$\triangle ABC$已作出，据习题二第21题（1）、（2）知$\angle PAC = 2\,|\angle BOC - 90°|$（内心时为$\angle BOC - 90°$，旁心时为$90° - \angle BOC$）。令$b$、$c$所夹锐角为$\alpha$，则可以$PQ$为弦，$2(90° - \alpha)$为弓形角，作弓形弧，在弓形弧所在圆上，取劣弧$\overset{\frown}{PQ}$的中点$M$，连$MO$交弓形弧于$A$点，$B$、$C$点易得。故$\triangle ABC$可以作出。

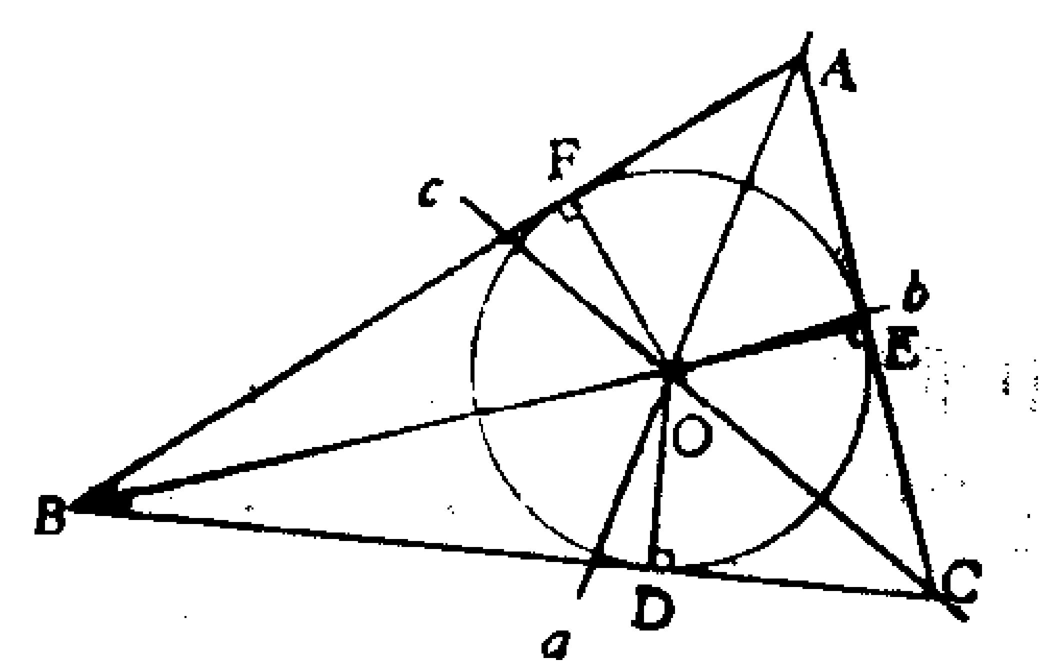


图复五—28

注意：当$b \perp c$时，本题无解。

29. 求作定圆的外切三角形，使它的顶点分别落在经过圆心的三条定直线上。

解：设$\triangle ABC$已作成，定直线为a、b、c，切点为D、E、F，则仿上题$\angle BOC = 90° + \angle BAC/2 = 180° - \angle FOA$为定值，于是，射线$OF$可作出，它与定圆$\odot O$的交点即为切点$F$，故$\triangle ABC$可作出。

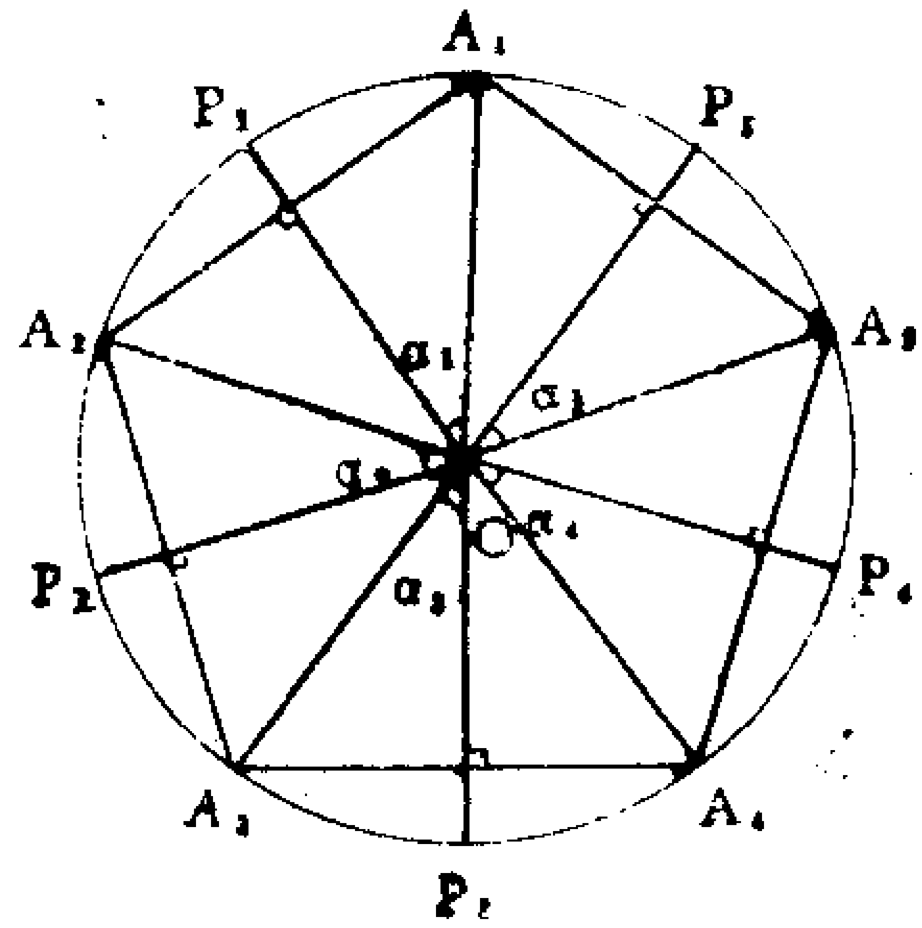


图复五—29

注意：有两线互相垂直时，本题无解。

30. 在定圆中求作内接五边形，使它的各边分别垂直于已知的五条半径。

解：假定所求五边形$A_1A_2\cdots\cdots A_5$已作成，设已知半径为OP_1、OP_2、$\cdots\cdots OP_5$，$\angle P_1OA_1=\alpha_1$，$\angle P_2OA_2=\alpha_2\cdots\cdots$，$\angle P_5OA_5=\alpha_5$，则有方程组：



图复五—30

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=\angle P_1OP_2\\ \alpha_2+\alpha_3=\angle P_2OP_3\\ \cdots\cdots\\ \alpha_5+\alpha_1=\angle P_5OP_1\end{cases}$$

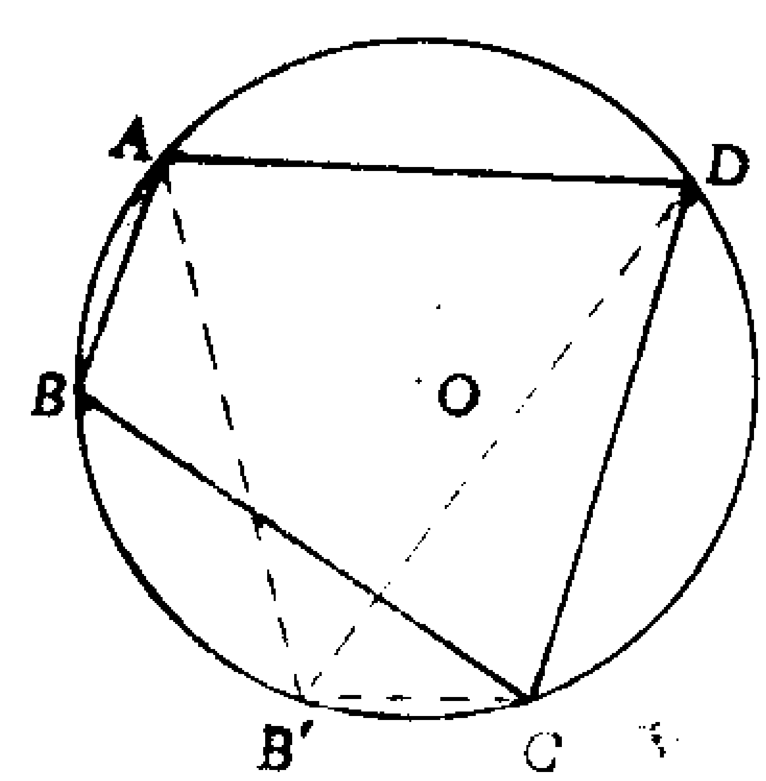
解之，得：

$$\begin{cases}\alpha_1=(\angle P_1OP_2-\angle P_2OP_3+\angle P_3OP_4-\angle P_4OP_5\\ \qquad+\angle P_5OP_1)/2\\ \alpha_2=(\angle P_2OP_3-\angle P_3OP_4+\angle P_4OP_5-\angle P_5OP_1\\ \qquad+P_1OP_2)/2\\ \cdots\cdots\\ \alpha_5=(\angle P_5OP_1-P_1OP_2+\angle P_2OP_3-\angle P_3OP_4\\ \qquad+P_4OP_5)/2\end{cases}$$

故可作图。

31. 已知一双对边的长及另一双对边的和，求在定圆中作内接凸四边形。

解：设图已作成，AB、CD以及$AD+BC$为已知，在$\overset{\frown}{ABC}$上取B'，使$AB'=BC$，则$B'C=AB$为已知，于是，可在已知圆上定出

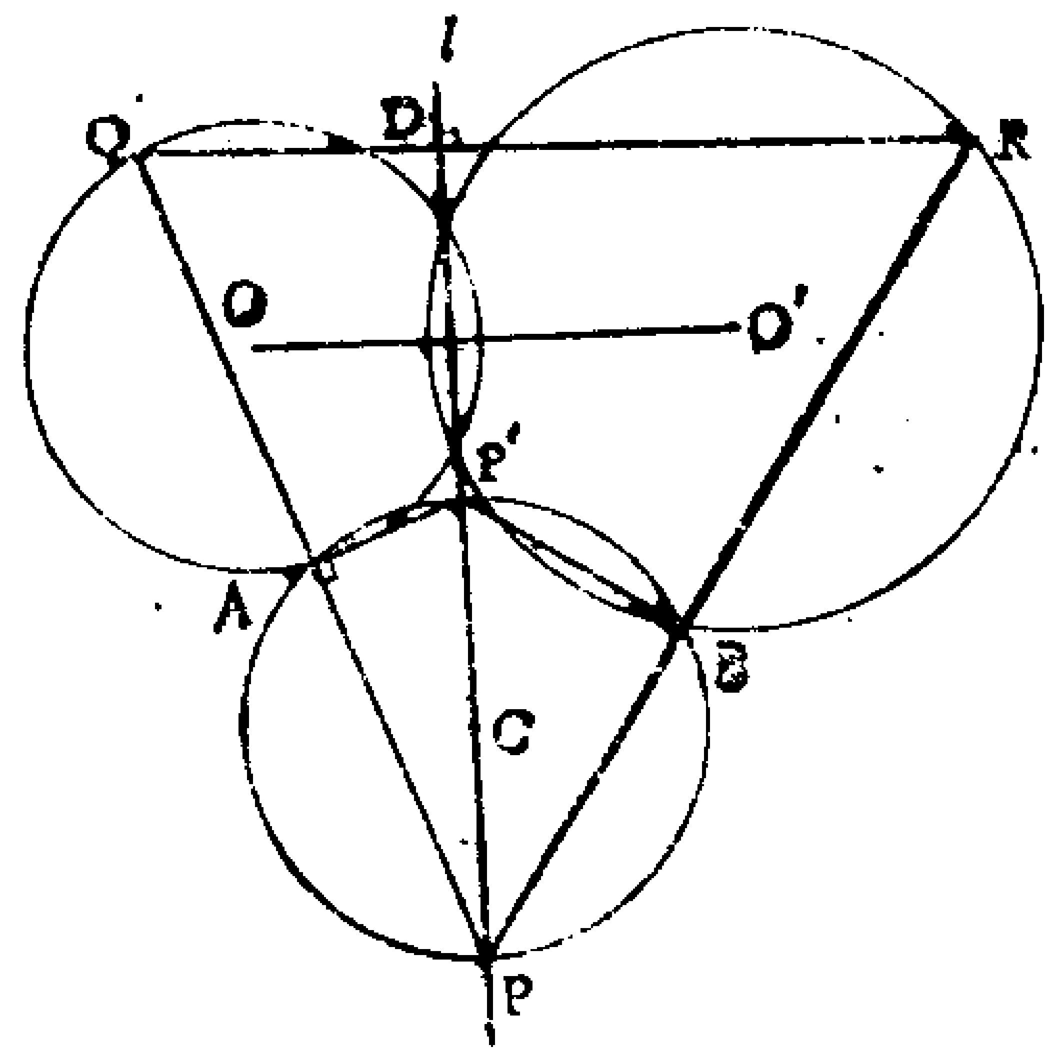


图复五—31

C、D、B'点，在$\triangle AB'D$中，$B'D$可作出，$AD+AB'=AD+BC$为已知，所以转化为“已知一边及其它两边之和，求作三角形。”故四边形可作出。

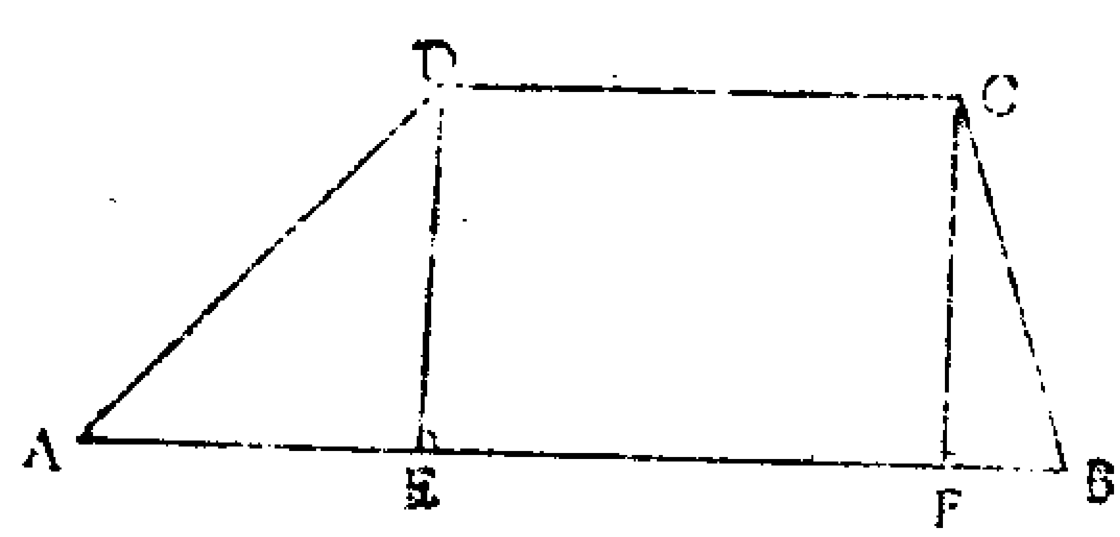
32. 设A、B各是$\odot O$、$\odot O'$上的定点，l是这两圆的等幂轴，试在l上求一点P，连PA、PB各交$\odot O$、$\odot O'$于Q、R，使$QR\perp l$。

解：设P已作得，用反演法，现以P为中心，已知幂为反演幂，施行反演变换，显然直线QR变为$\odot PAB$，l不变，$\because QR$与l正交，$\therefore$由定理182知$\odot PAB$必与l正交，即$\odot PAB$的圆心在l上。具体作法十分简单，只须过A、B作一圆$\odot C$，使C在l上，则$\odot C$与l的交点P、P'即为所求。



图复五—32

33. 已知两底的和、两腰、高，求作梯形。



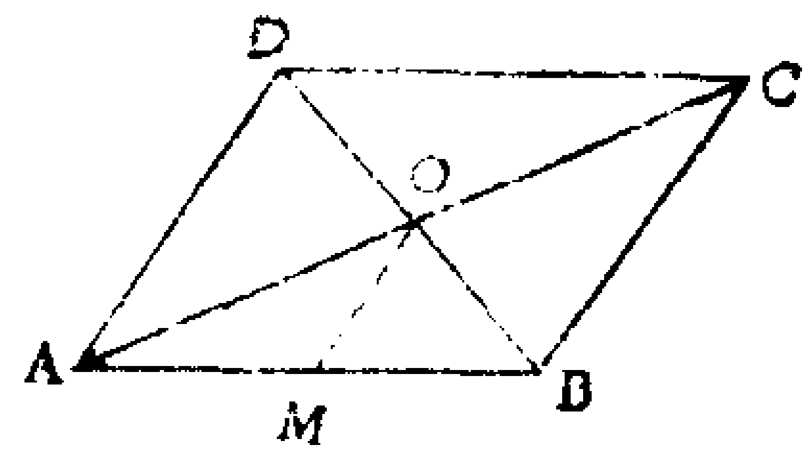
图复五—33

解：设图已成，因两腰AD、BC及高$DE=CF$为已知，$\therefore Rt\triangle ADE$和$Rt\triangle BCF$可确定，又$\because AB+CD=m$为已

知，$\therefore CD=EF=(m-AE-BF)/2$亦为定值。故梯形可作出。

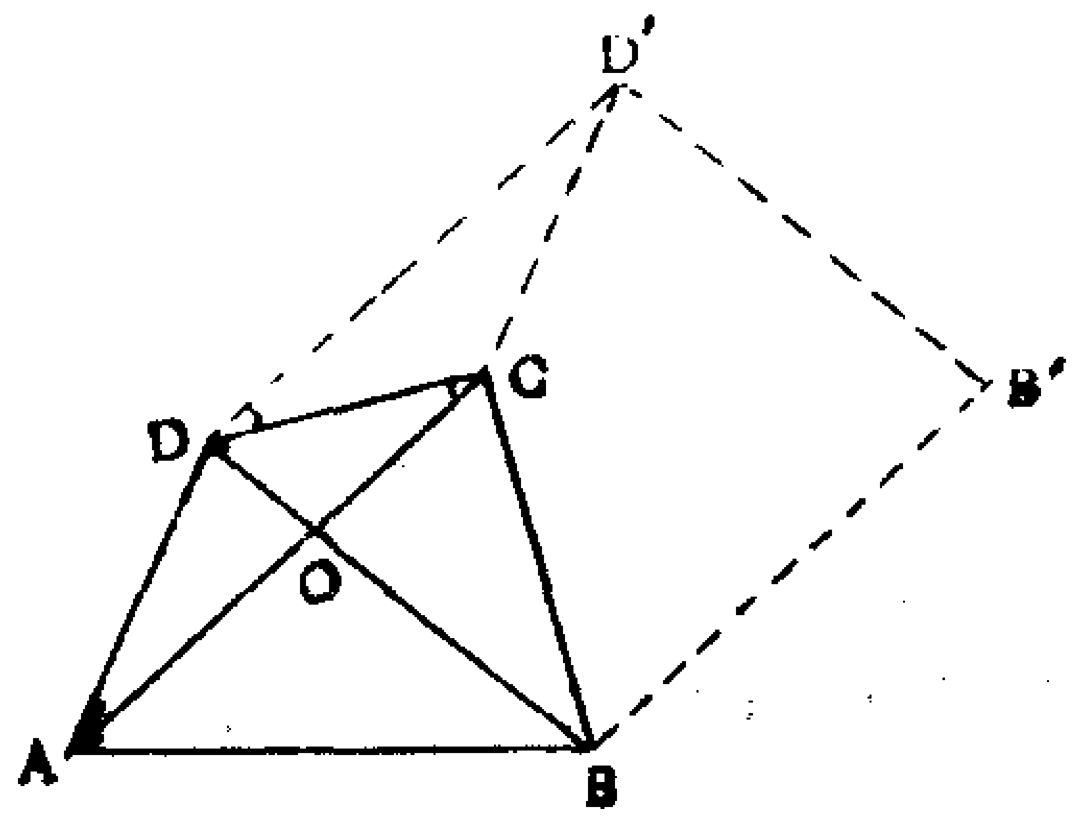
34. 已知对角线的交角及两邻边的长，求作平行四边形。

解：设图已成，如图，取 AB 中点M，则因AB、$OM=BC/2$ 以及$\angle AOB$为已知，$\therefore \triangle AOB$的作法即为“已知顶角、底边和底边上的中线，求作三角形。”而此作图易由轨迹交会法得到。故▱$ABCD$可作出。



图复五—34

35. 已知一双对角、两对角线及其交角，求作凸四边形。

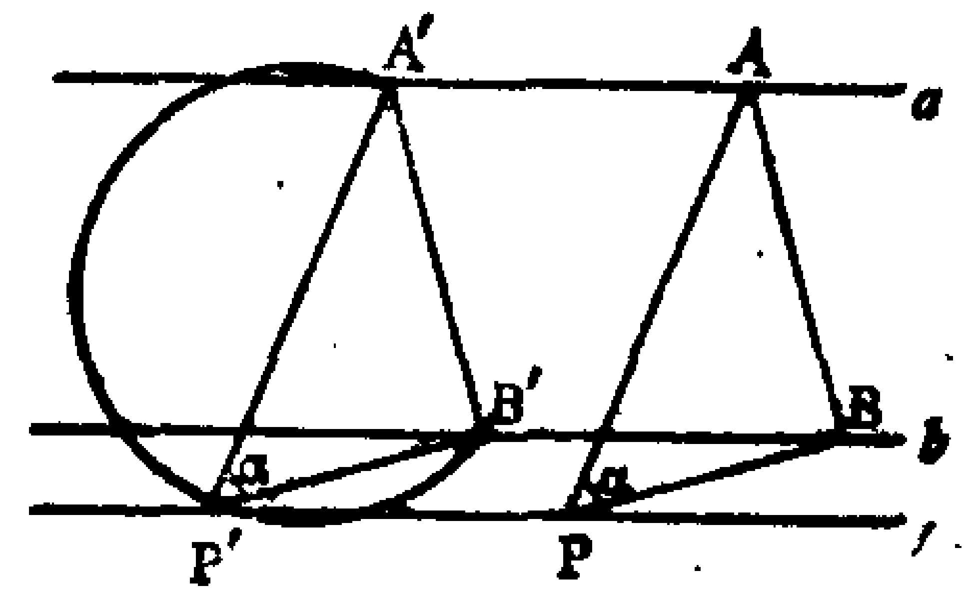


图复五—35

解：设四边形$ABCD$已作成，作$BB'\perp\!\!\!\!= AC$，$DD'\perp\!\!\!\!= AC$，则在▱$DBB'D'$中，BD、$BB'=AC$为已知，又$\angle BDD'=\angle CDD'+\angle BDC=\angle DCO+\angle BDC=180°-\angle DOC$亦为定值，于是▱$DBB'D'$的边及顶角均为已知，则易作出。故四边形$ABCD$可作出。

36. 求在已知两平行线间嵌入一条定长的线段，使一定点对这线段的视角等于已知角。

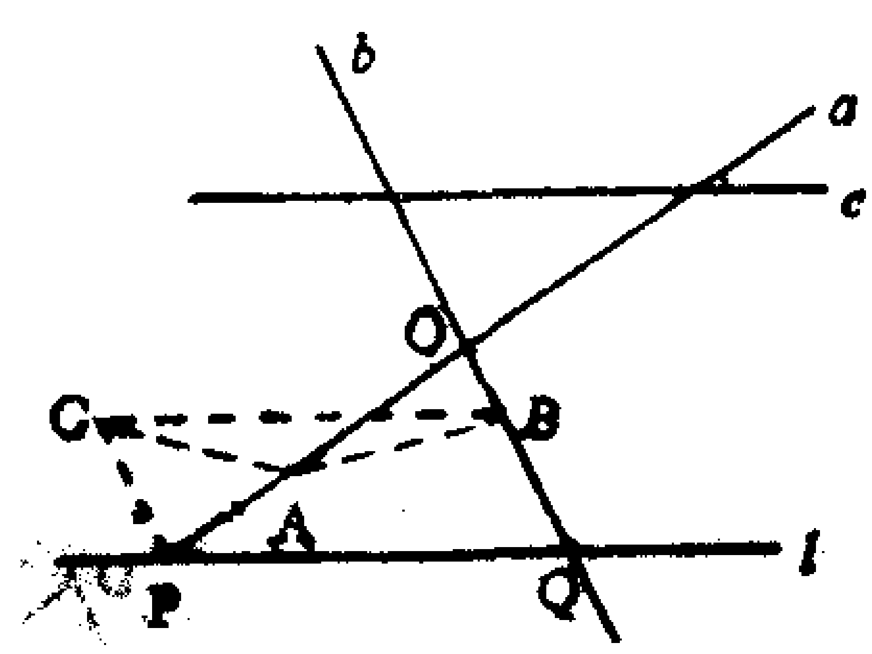
解：在已知直线 a、b 间任意位置嵌入定长线段 $A'B'$ = 已知定长，以 $A'B'$ 为弦，已知角 α 为弓形角作弓形弧，设它与过已知点 P 所作平行于 a 的直线 c 交于 P'，则



图复五—36

$\triangle P'A'B'$ 的形状和位置确定，过 P 作 $\triangle PAB \cong \triangle P'A'B'$ 且对应边互相平行，则线段 AB 即为所求。

37. 设 A、B 各是已知直线 a、b 上的定点，求作定向直线 l，交 a、b 于 P、Q，使 $AP = BQ$。



图复五—37

解：设 l 已作出，且 $l \parallel c$，作 $PC \underline{\parallel} QB$，令 a、b 交于 O，则在 $\triangle ABC$ 中，AB、$\angle ABC$ 为定值，

又 $\angle BAC = \angle BAO + \angle OAC$

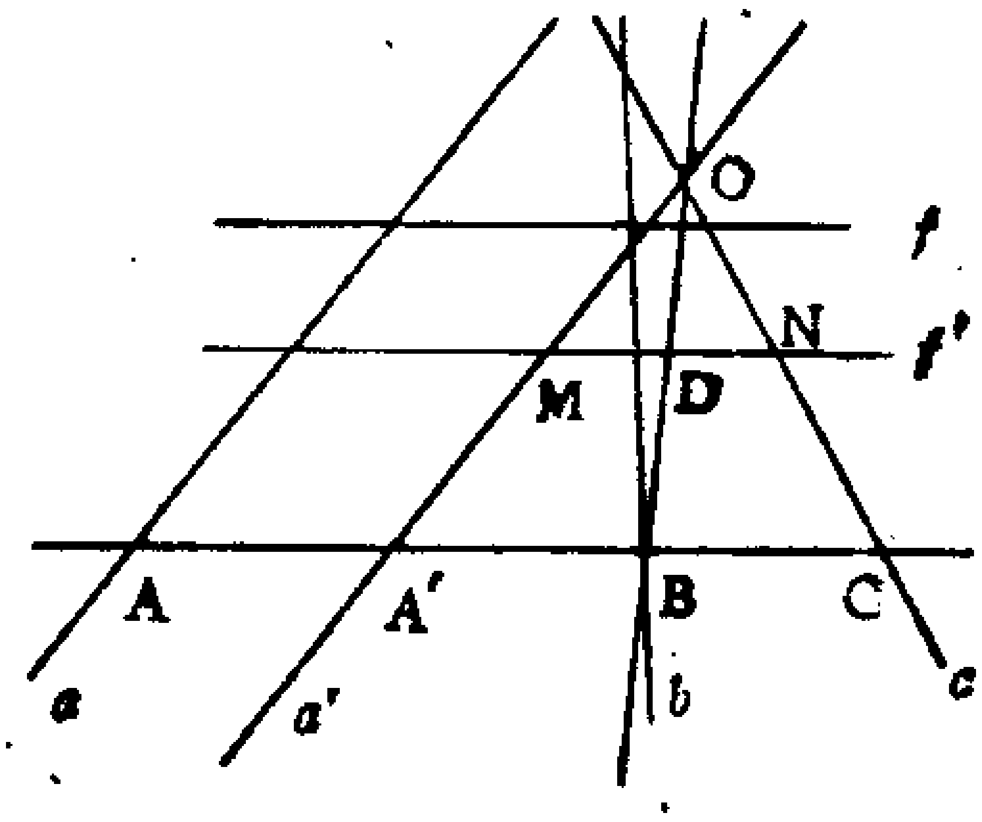
$= \angle BAO + (180° - \angle PAC)$

$= \angle BAO + [180° - (180° - \angle APC)/2]$

$= \angle BAO + 90° + \angle AOB/2$ 亦为定值，于是，$\triangle ABC$ 可作出，随之 P 易得，故直线 l 可作出。

38. 已知三直线 a、b、c，求作定向直线 l，交 a、b、c 于 A、B、C，使 $|AB - BC|$ 等于定长。

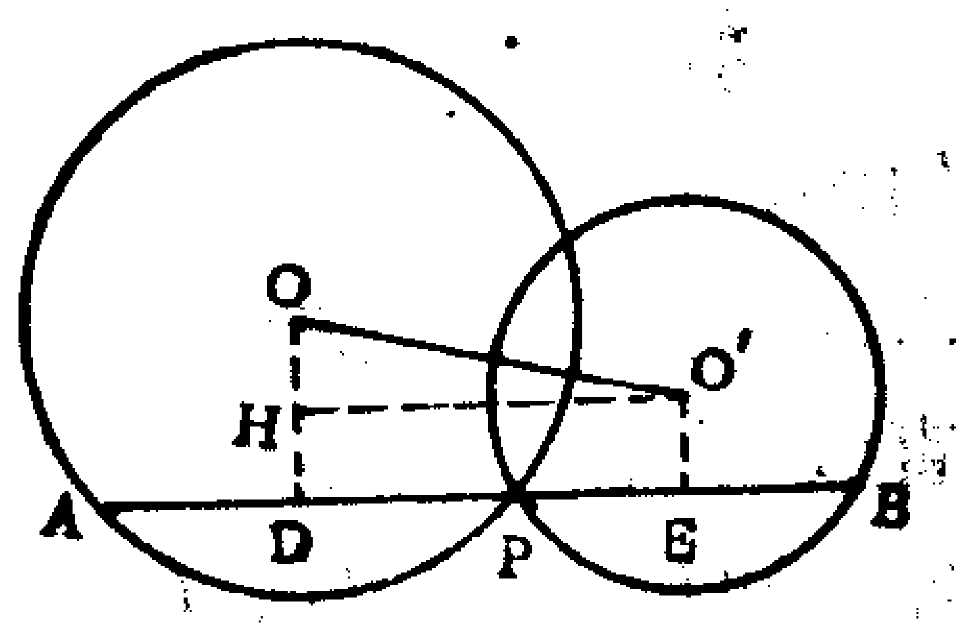
解：设图已成，如图所示情形，在BA上取$BA'=BC$，作$a'\parallel a$，设交c于O。于是本题转化为"作$\triangle OA'C$，使O在定直线a'、c的交点上，OA'、OC分别在a'、c上且$A'C$中点B在已知直线b上。"转化后的问题，不难用位似变换作出。



图复五—38

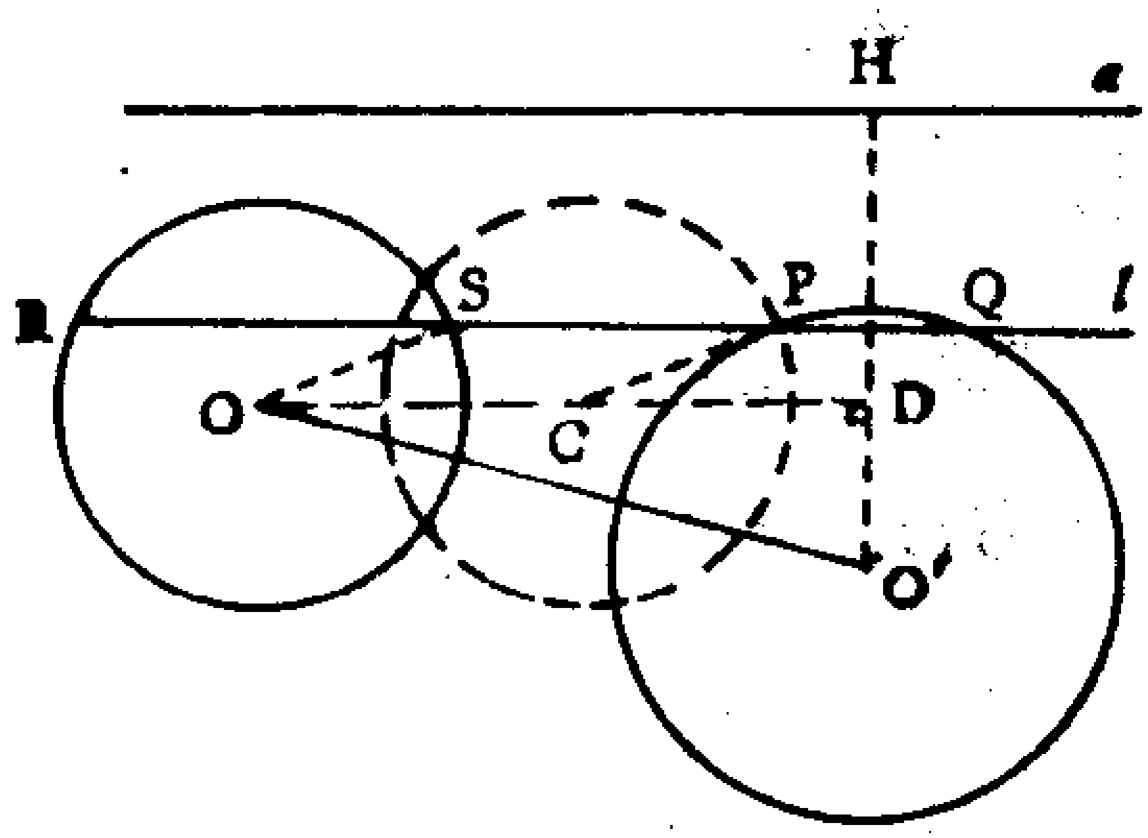
39。求过两圆的一交点P作一直线交这两圆于A、B，使线段AB之长一定。

解：设两圆心为O、O'，作AP、PB的弦心距OD、$O'E$，引$O'H\perp OD$于H，则因OO'已知，$O'H=AB/2$为定值，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OHO'$可以确定，故所求直线易于作出。



图复五—39

40。求作一定向直线，使被两个已知圆截下两弦的和等于定长。

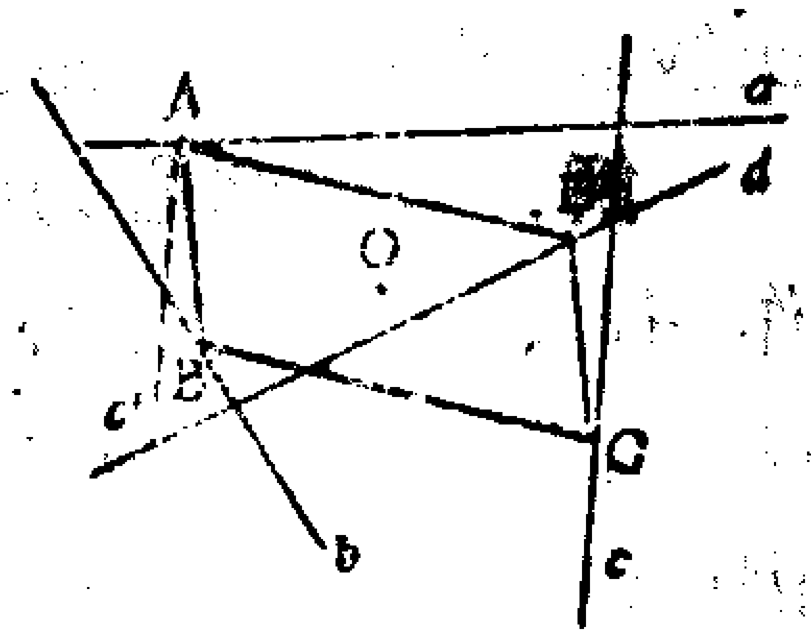


图复五—40

解：设图已成，两已知圆心为O、O'，已知直线为a，引$O'H\perp a$，$OD\perp O'H$于D，则OD确定，令所求直线l与$\odot O$、$\odot O'$交于R、S、P、Q各点，在OD上取$OC=SP$，则因$OD=RS/2+SP+PQ/2=OC+(RS+PQ)/2$，$\therefore CD=(RS+PQ)/2$为定值，因此$C$点可以确定。又$OCPS$为平行四边形，$\therefore CP=OS$为$\odot O$的半径，于是$P$在$\odot C(OS)$上，即$P$可以作出。故直线$l$可以作出。

41. 已知中心位置，求作平行四边形，使它的顶点分别落在四条直线上。

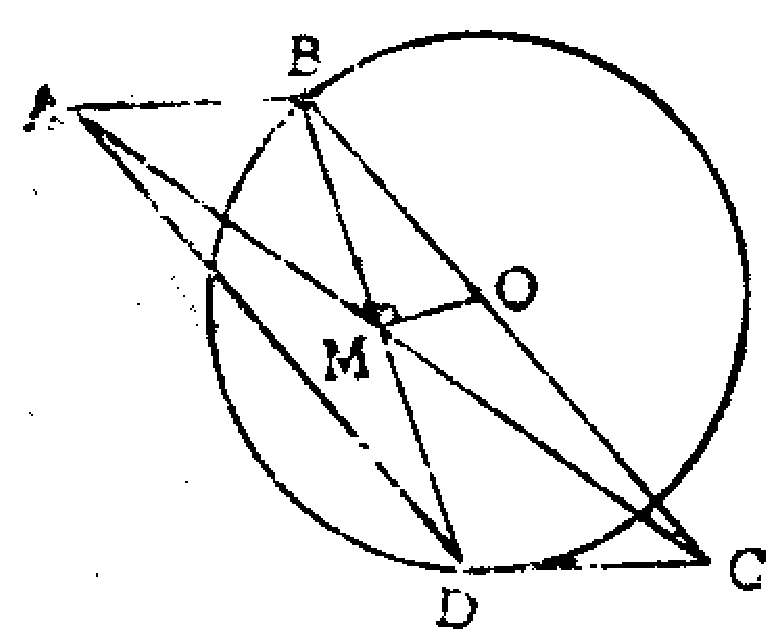
解：利用中心对称图形性质，如图，因A与C关于O中心对称，$\therefore A$必在直线c关于O的对称图形直线c'上，于是A可以确定，同理，可确定B、C、D各点，故平行四边形$ABCD$易于作出。



图复五—41

42. 已知一双对顶点的位置，求作平行四边形，使其余两顶点同落在一个定圆上。

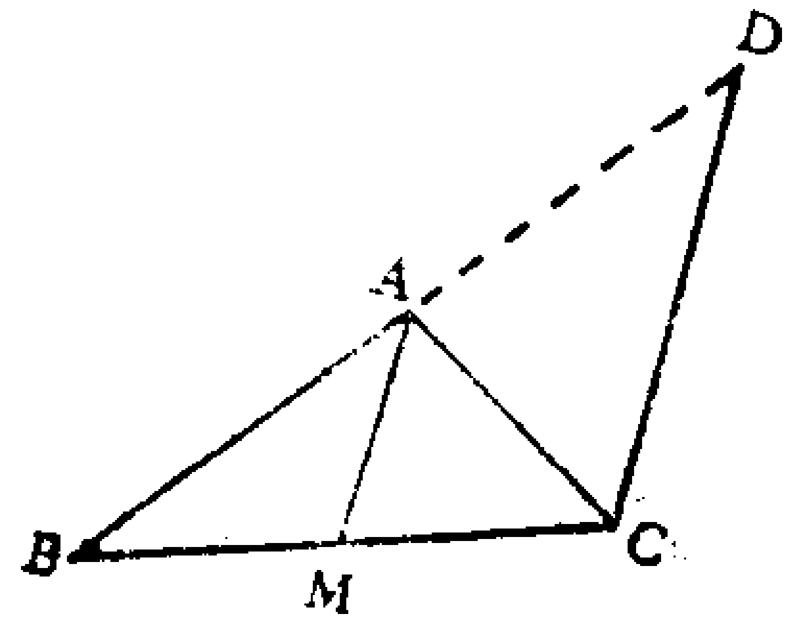
解：设图已成，作$\square ABCD$的中心M，则M必为弦BD的中点，连结OM，则$OM\perp BD$，于是B、D可得，故$\square ABCD$可作出。



图复五—42

43. 已知一角、两夹边的和、对边的中线，求作三角形。

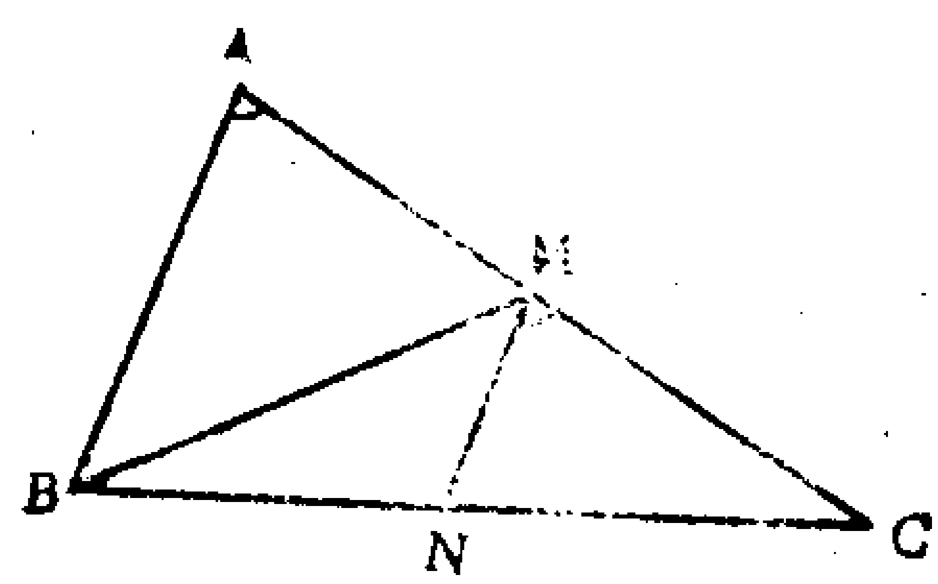
解：设$\triangle ABC$已作成，$\angle A$为已知。延长BA至D，使$AD=AB$，则$CD=2AM$为定值，而$AC+AD=AC+AB$为已知，$\angle CAD=180^\circ-\angle BAC$为定值，于是，利用复习题五第4题，三角形$ACD$可作出。故$\triangle ABC$作法易得。



图复五—43

44. 已知一边、对角、另一边的中线，求作三角形。

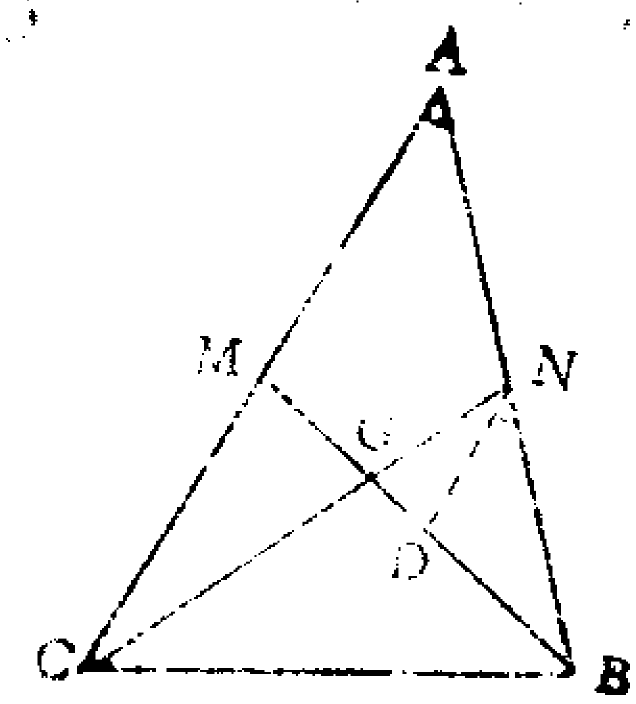
解：设图已成，中线BM、BC、$\angle A$为已知，取BC中点N，则M在以$NC(BC/2)$为弦，$\angle A$为弓形角的弓形弧以及B为心、BM为半径的弧上，于是三角形BMC可作出。故$\triangle ABC$作法易得。



图复五—44

45. 已知一角、两夹边的中线，求作三角形。

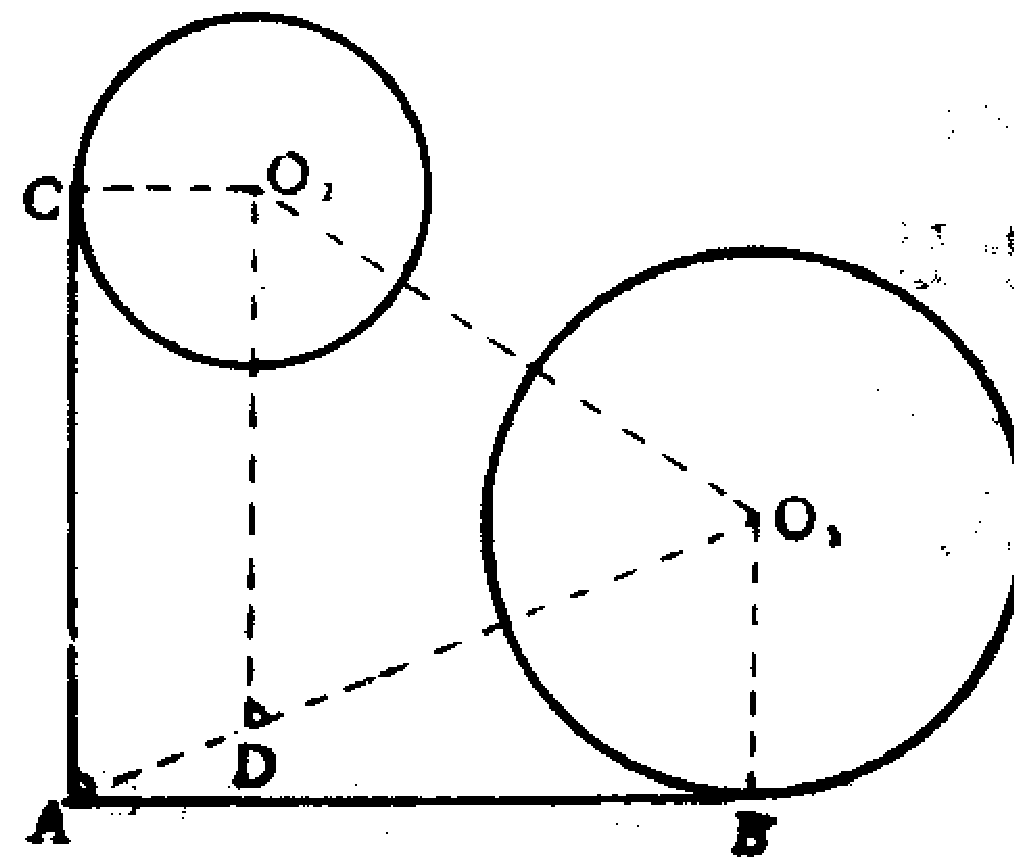
解：设图已成，$\angle A$、中线BM、CN为已知，令重心为G，BM中点为D，于是，在$\triangle BNG$中，$BG=2BM/3, GN=CN/3$，$BD=BM/2$，$\angle BDN=\angle A$均为定值，仿上题，$\triangle BNG$可作出，故$\triangle ABC$的作法不难得到。



图复五—45

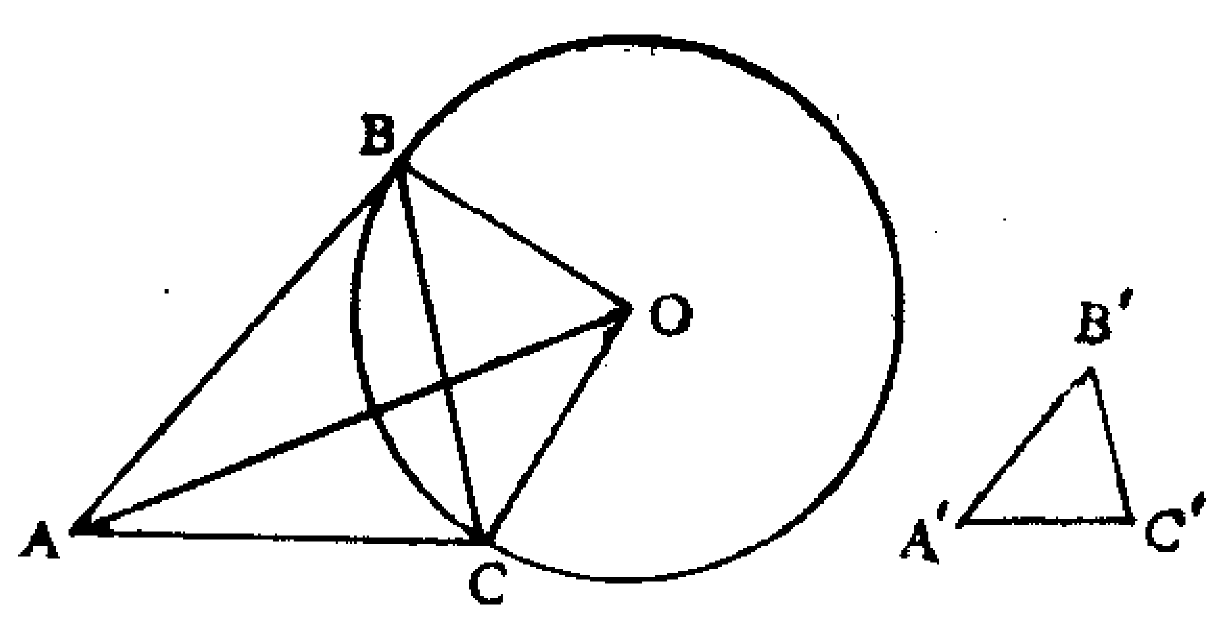
46。试求一点A，自这点引半线AB、AC分别切两已知圆于B、C，使得AB等于定长，$\angle BAC$等于已知角。

解：设已知圆心为O_1、O_2、（如图），则五边形ABO_1O_2C中AB、O_1B、O_2C、O_1O_2、$\angle BAC$已知且$\angle B=\angle C=90°$，于是，五边形ABO_1O_2C形状和大小可以确定。可过O_2作$O_2D \parallel AC$，交O_1A于D，则因$Rt\triangle BO_1A$确定，$\therefore$在$\triangle O_1O_2D$中，$\angle D=\angle CAD=\angle BAC-\angle BAO_1$为定值，$O_1O_2$、$O_1D=O_1A-DA$为定值，于是$\triangle O_1O_2D$形状和大小，由$Rt\triangle BO_1A$的形状和大小确定。具体作图可另行作出与五边形$ABO_1O_2C$合同的五边形。再以$O_1O_2$为边逐步作出$B$、$C$点，最后得到$A$点。



图复五—46

47。已知一点A，一圆$\odot O$，一三角形$\triangle A'B'C'$。在$\odot O$上求两点B、C，使$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。



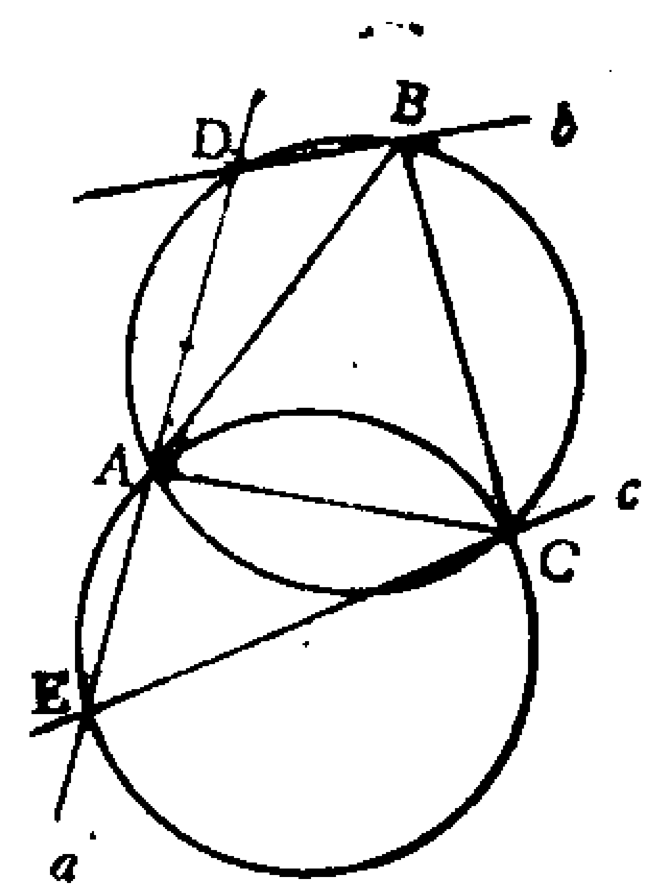
图复五—47

解：设图已成，如图，易知四边形 $ABCD$ 的形状和大小可以确定，因 OA、OB、OC，$\angle BAC=\angle B'A'C'$ 为已知，于是可另行用位似变换作出与 $ABCD$ 合同的四边形，得到 AB、AC 的长，故 B、C 可作出。

48、已知边长，求作正三角形，使它的顶点分别落在三条定直线上。

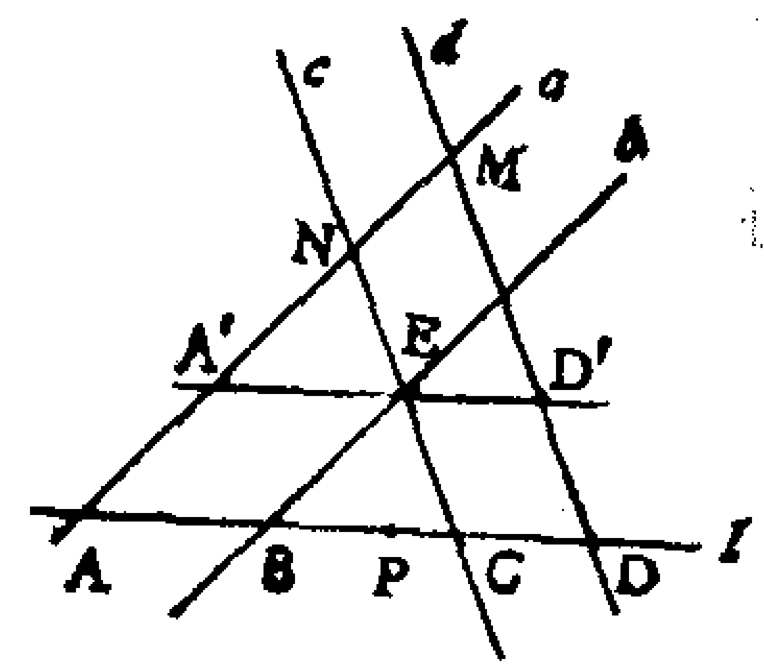
解：已知直线 a、b、c 不能互相平行，否则由习题二十七第25题，若 $a\parallel b\parallel c$，则一般作不出。

∴不妨设 a 与 b、c 交于 D、E，则 D、E 为定点。设正△ABC 已作出，因 $\odot ADC$，$\odot ACE$ 大小确定，且 DE 为定值，因此四边形 $CBDE$ 形状及大小确定。于是可另解作图题："求过 $\odot ADC$、$\odot ACE$ 的交点 A 作一直线交这两圆于 DE，且使 DE 为定长。"此即复习题五第39题。具体作图，可以已知长为边先任作正三角形，分别以其二边为弦、$\angle BDA$、$\angle CEA$ 为弓形角作二圆，再用上述第39题作法得出 DA、EA 的长。最后在已知直线 a 上定 A 点，故正三角形 ABC 可作出。



图复五—48

49. 已知直线 $a \parallel b$，$c \parallel d$，求过定点P作直线l，交a、b、c、d于A、B、C、D，使$AB/CD=m/n$，m、n是给定的线段。



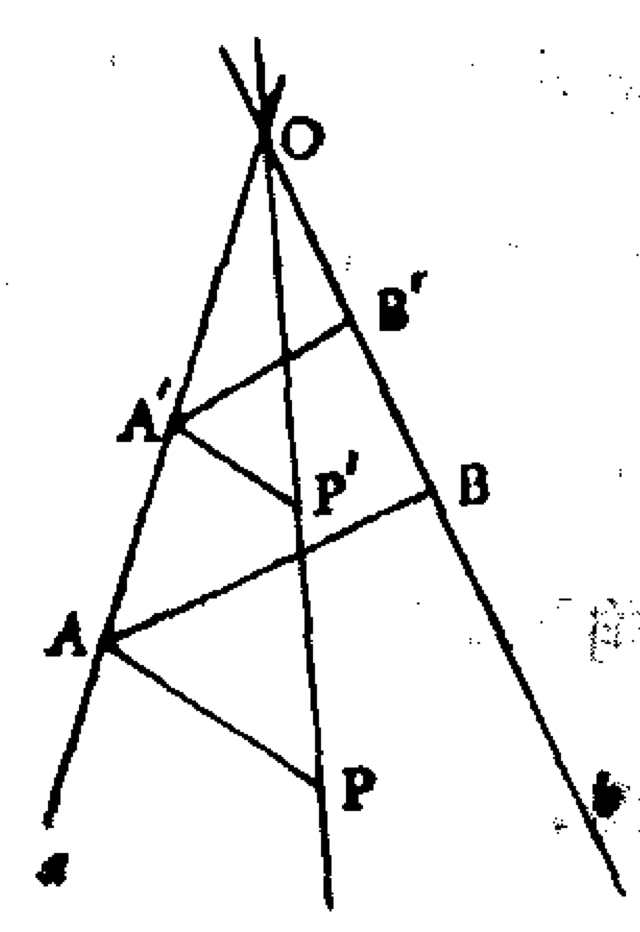
图复五—49

解：若 $a \parallel c$，则AB/CD为定值，所以对任意m、n，本题没有解。令a交d、c于M、N，b交c于E，设直线l已作成，如图，过E作$A'D' \parallel l$交a、d于A'、D'，则

$A'N/NM=AE/ED'=AB/CD=m/n$，因M、N为定点，

$\therefore A'$点可由$A'N=m \cdot NM/n$确定，故直线l可作出。

50. 已知两直线a、b及线外一点P，在a上求一点A，引$AB \perp b$于B，使$AB/AP=m/n$，m、n是给定的线段。



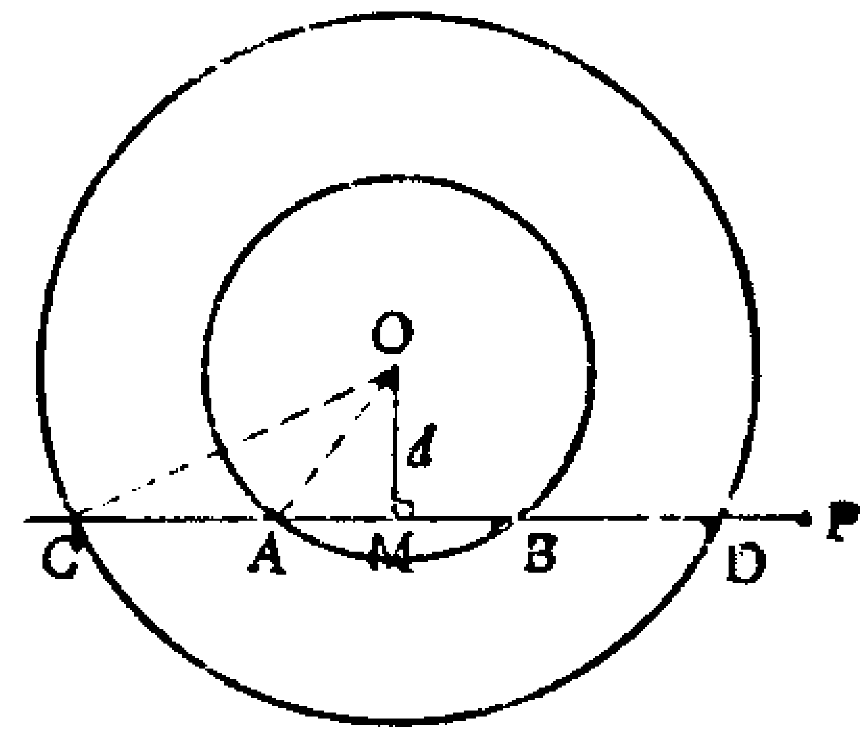
图复五—50

解，若 $a \parallel b$，因AB为定值，

$\therefore AP=AB \cdot n/m$也为定值，故易作出。令$a$交$b$于$O$，只须用位似变换。如图，在$a$上任取$A'$，作$A'B' \perp b$于$B'$，连直线$OP$，则可由$A'P'=A'B' \cdot n/m$定出$P'$，作$PA \parallel P'A'$，故$A$可作出。

51. 已知两同心圆及不在圆上的一点，求过这点作一割线，使外圆割下的弦四倍于内圆割下的弦。

解：设大、小圆各为$\odot O(r_1)$、$\odot O(r_2)$，所求割线交大、小圆于C、D，A、B，连OC、OA，并作$OM\perp AB$于M，令$OM=d$，则$CM=4AM$。



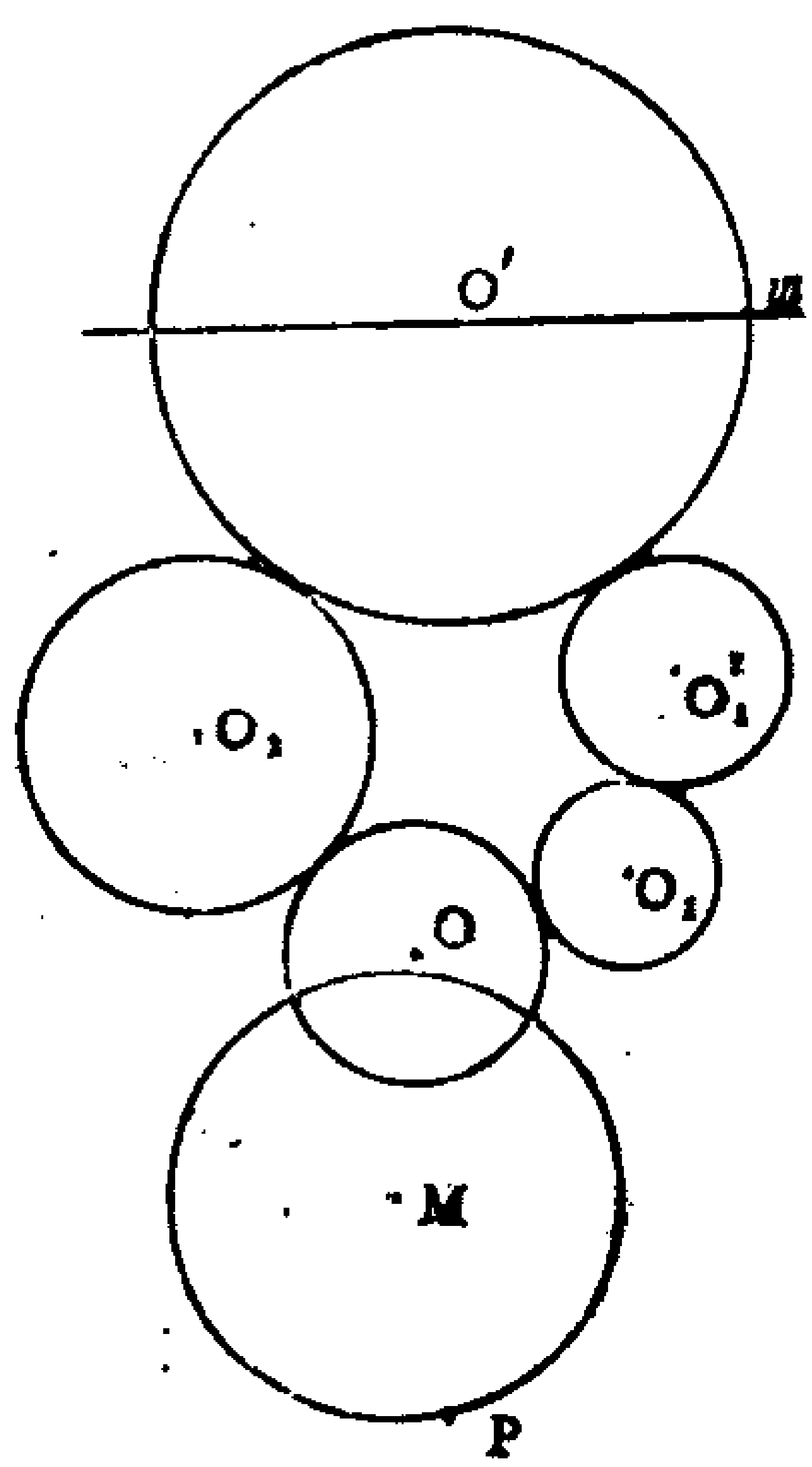
图复五—51

$\Rightarrow\sqrt{r_1^2-d^2}=4\sqrt{r^2-d^2}$

$\Rightarrow d=\sqrt{(16r_2^2-r_1^2)/15}$，故所求割线易于作出。

52. 求作一圆，使切于两已知圆，又正交于另一已知圆。

解：设图已成，已知圆为$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot M$，以$\odot M$上任一点P（P不在$\odot O_1$、$\odot O_2$上）为反演中心，P对$\odot O_2$的幂为反演幂作一反演变换(如图)，则所求$\odot O$的反象$\odot O'$必与$\odot O_2'$（即$\odot O_2$反象）、$\odot O_1$的反象$\odot O_1'$相切，且$\odot M$的反象为过O'点的直线m，于是，本题化为“求作$\odot O'$，使切

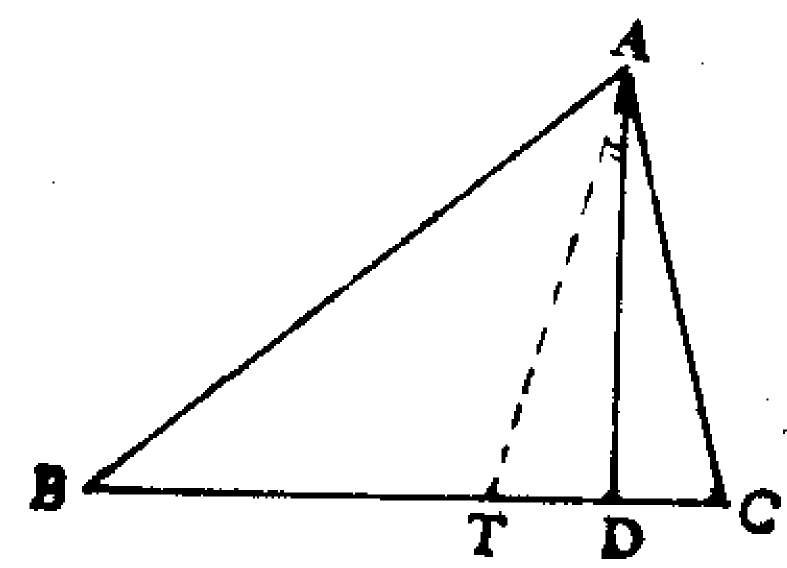


图复五—52

于已知圆$\odot O_1'$、$\odot O_2$，且令O'落在定直线m上。”此即习题三十第10题。故本题作法不难得到。

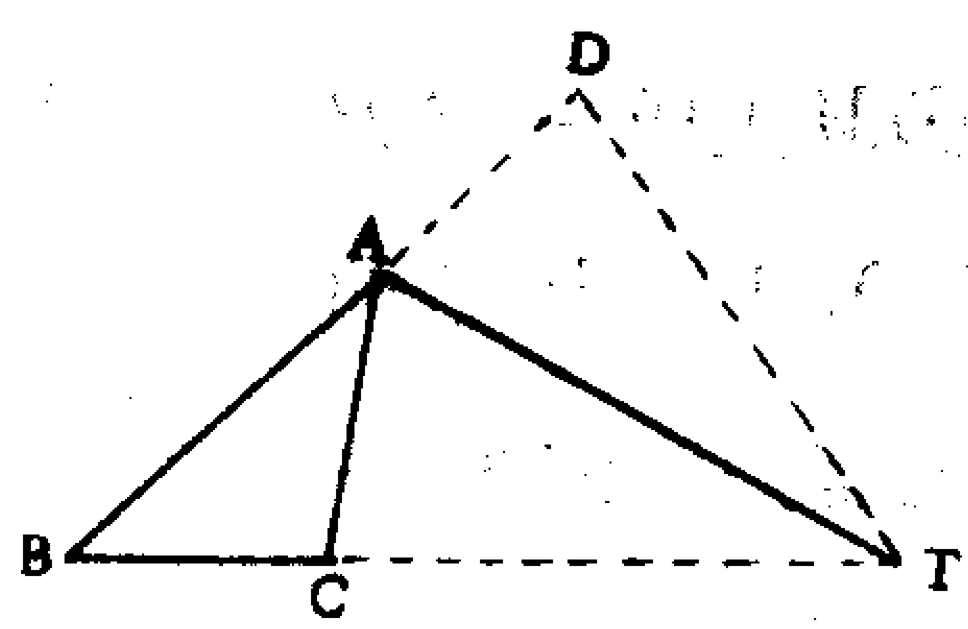
53. 已知一边、这边的高、两邻角的差，求作三角形。

解： 如图，设边BC、高AD、$\angle C-\angle B$为已知，作角平分线AT，则由习题十一第18题$\angle TAD=(\angle C-\angle D)/2$，于是$\mathrm{Rt}\Delta TAD$可以确定。因此本题转化为§86例111，故$\triangle ABC$可以作出。



图复五—53

54. 已知两边的和、夹角、此角的外角平分线，求作三角形。



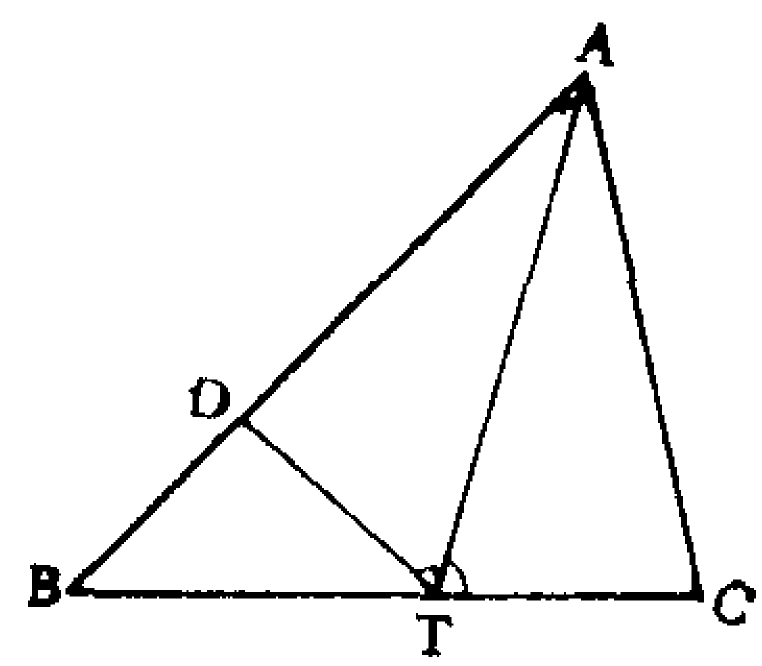
图复五—54

解： 设$\triangle ABC$已作成，$AB+AC$、$\angle A$以及外角平分线AT为已知，延长BA至D，使$AD=AC$，则在$\triangle BDT$中，$BD=AB+AC$，角平分线TA、$\angle D-\angle B=\angle C-\angle B$

$=\angle A$均为已知，于是，本题化为习题三十第23题，$\triangle BDT$可作出，故$\triangle ABC$不难作出。

55。已知两边的差、夹角、此角的平分线，求作三角形。

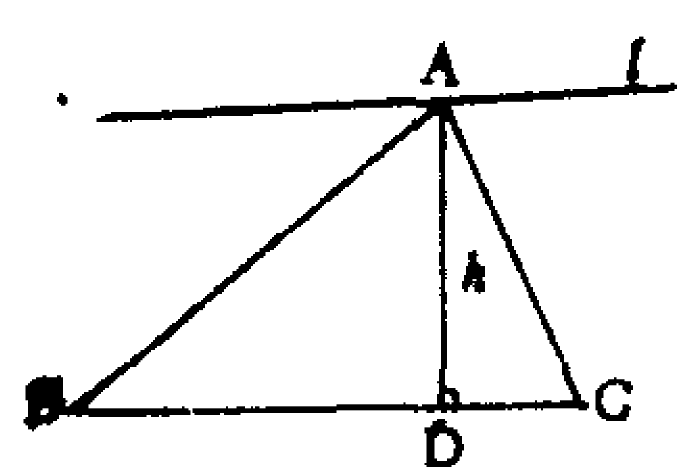
解：设$\triangle ABC$已作出，不妨令$AB>AC$，在AB上取D使$AD=AC$，此角平分线为AT，连DT，易见$\triangle ADT\cong\triangle ACT$，$\therefore$在三角形$BDT$中，$BD=AB-AC$，外角平分线$TA$以及$\angle D-\angle B=180^\circ-\angle TDA-\angle B=180^\circ-\angle C-\angle B=\angle A$均为已知，由习题三十第24题，$\triangle BDT$可作出，故$\triangle ABC$可以作出。



图复五—55

56。已知一高、周长、面积，求作三角形。

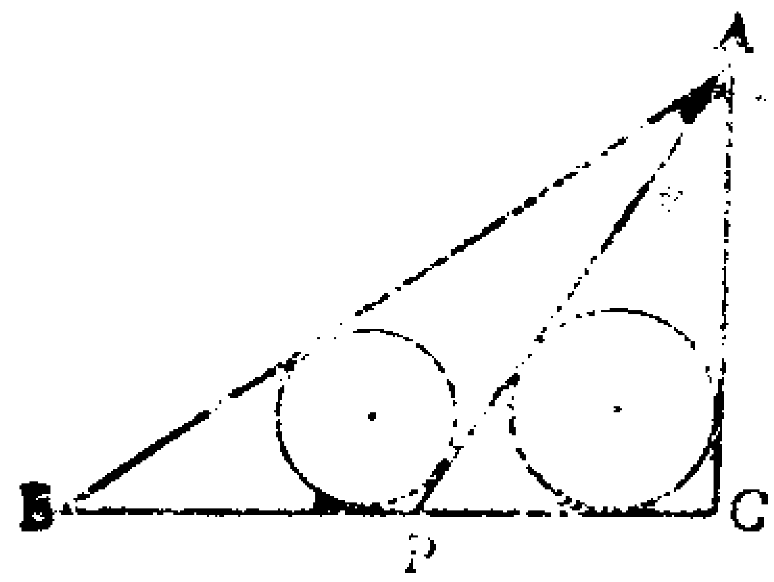
解：设所求$\triangle ABC$，已知高$AD=h$，周长为s，面积为m^2，则$BC=2m^2/h$可以作出。而顶点A在与BC平行且距离为h的直线l上，于是本题化为“在定直线l上求一点A，使A到定点B、C的距离和等于$s-BC$。”此即习题三十第17题，故$\triangle ABC$不难作出。



图复五—56

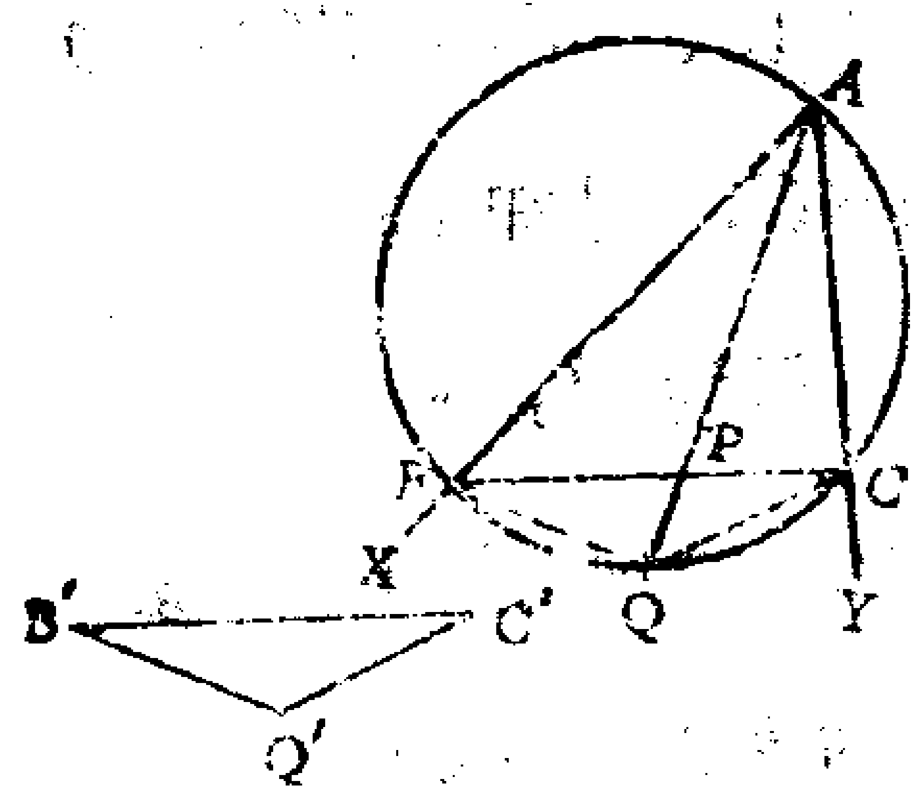
57. 求自已知三角形的一顶点作直线，把已知三角形分成两个三角形，使得这两个三角形的面积之比等于它们的周长之比。

解： 设△ABC已知，所求直线AP交BC于P，令△APB、△APC面积各为a_1^2、a_2^2，周长各为$2s_1$、$2s_2$，则$\because a_1^2=r_1s_1$，$a_2^2=r_2s_2$（r_1、r_2为△APB、△APC的内切圆半径），$\therefore r_1\cdot s_1/r_2\cdot s_2=2s_1/2s_2$，$\Rightarrow r_1=r_2$，于是本题化为§76例题101，故△$ABC$可作出。



图复五—57

58. 过已知角的平分线上一定点求作一直线，使被角的两边截下定长的线段。



图复五—58

解： 设所求直线交已知角XAY于B、C，定点为P，作⊙ABC交直线AP于Q，连QB、QC，则$\angle QBC=\angle QAC$

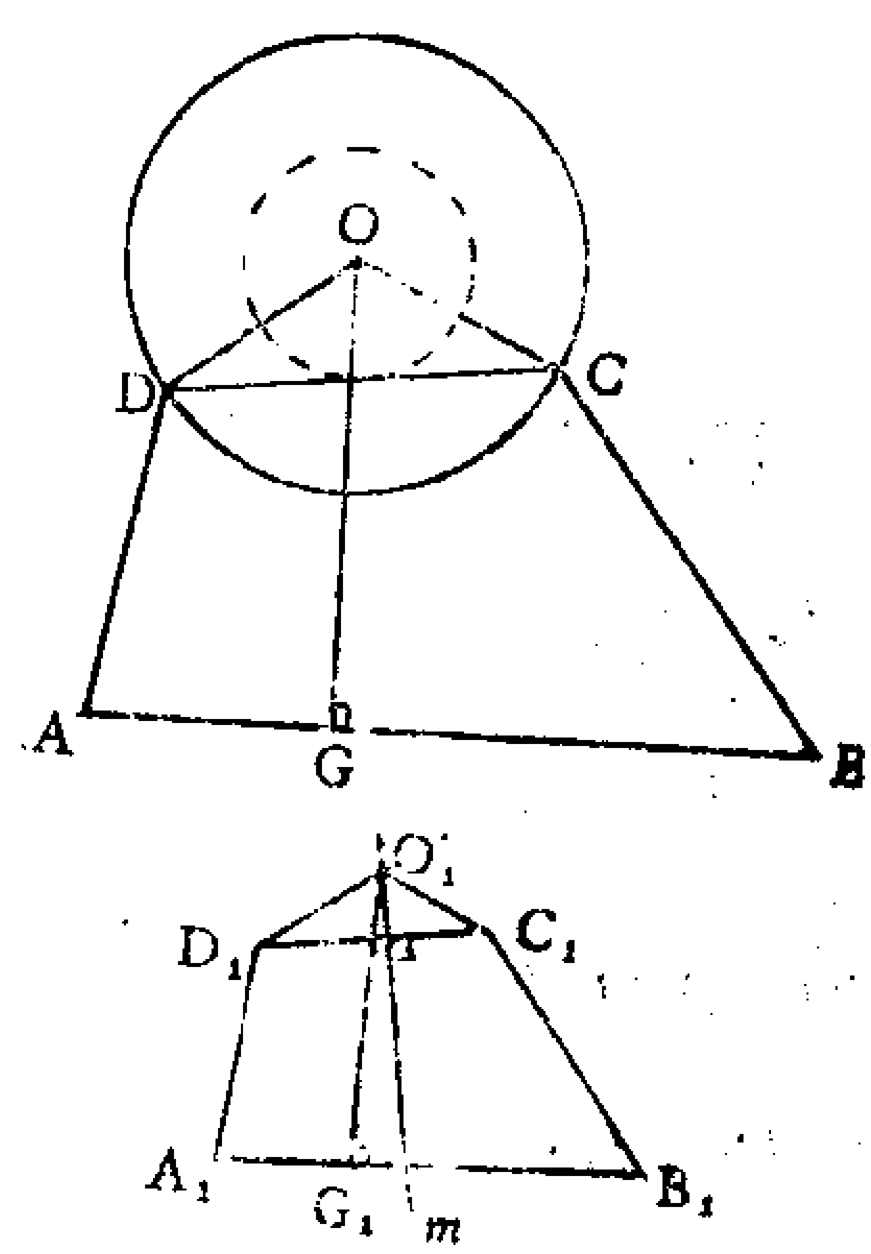
$=\angle QAB=\angle QCB$，但BC为定长，

$\therefore$等腰$\triangle QBC$的形状和大小已确定。

又$\triangle QBP\backsim\triangle QAB\Rightarrow QB/QA=QP/QB\Rightarrow QP(AP+QP)=QB^2$，因$AP$、$QB=Q'B'$为定值，解之，弃去负根得：$QP=-AP/2+\sqrt{(AP/2)^2+Q'B'^2}$，于是$QP$长也可作得，因此可在$AP$上定出$Q$点，$B$点可由$Q'B'$的长定出。故直线$BP$可以作出。

59. 求作一四边形，使与给定的四边形相似，并使指定的一边落在一条已知直线上，其它两顶点同落在一已知圆上。

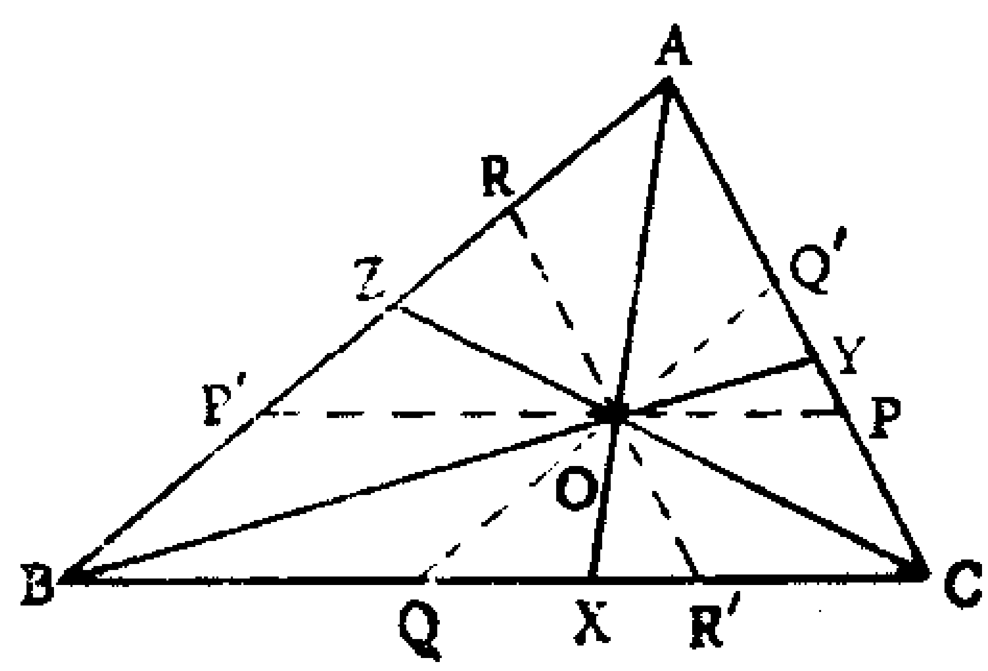
解：设已知四边形为$A_1B_1C_1D_1$，已知圆为$\odot O$，已知直线为l，并设所求四边形$ABCD$已求得（如图），如能作出弦CD，则本题作法易得到。连结OC、OD，并作$\triangle O_1C_1D_1\backsim\triangle OCD$，则五边形$ABCOD\backsim$五边形$A_1B_1C_1O_1D_1$，作$OG\perp l$于$G$，$O_1G_1\perp A_1B_1$于$G_1$，$\therefore O_1G_1/O_1D_1=OG/OD$为定值，又$\because O_1$在$C'D'$中垂线$m$上



图复五—59

（m为定直线），于是问题化成"已知两直线m和A_1B_1和线外一点D_1，在m上求一点O_1，引$O_1G_1\perp A_1B_1$于G_1，使O_1G_1/O_1D_1为定值。"此即复习题五第50题，$\therefore O_1$点可得到。具体作图可先作出O_1点，再以已知圆半径为边将五边形$A_1B_1C_1O_1D_1$放大而得到CD的长。最后可在已知直线和圆之间作出四边形$ABCD$。

60。求自已知三角形内一点发出三条等长线段，使它们分别平行于三角形的三边，且其它三端点分别落在三边上。

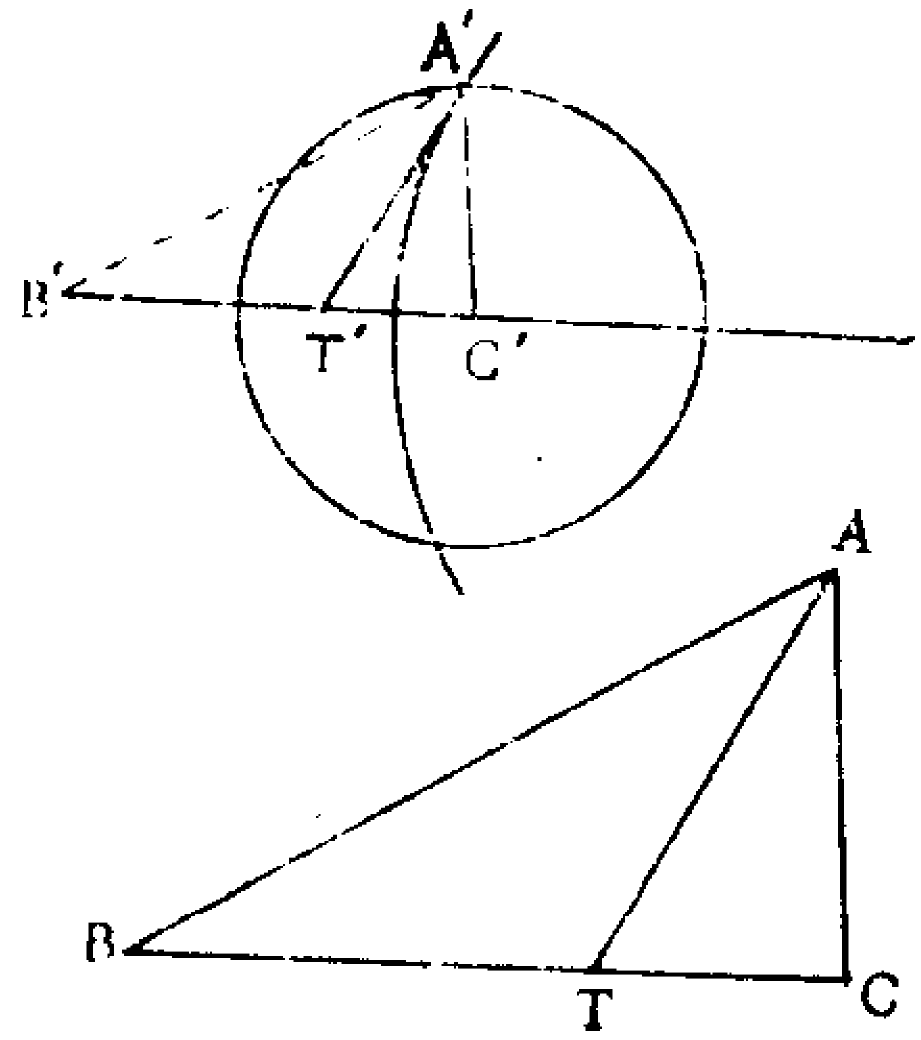


图复五—60

解：设已知$\triangle ABC$内已知点O出发的三条等长线段已求得，为$OP=OQ=OR$，延长OP、QO、RO交$\triangle ABC$的边于P'、Q'、R'，连AO、BO、CO交对边于X、Y、Z，则易见$OP/BC=OQ'/AB$，$OQ/AB=OR'/AC$，$OR/AC=OP'/BC$，由复习题三第94题，有$PP'/BC+QQ'/AB+RR'/AC=2$，于是$OP/BC+OQ/AB+OR/AC=1$，令

$OP=x$，则$x=abc/(bc+ca+ab)$可以作出，故本题可以作出。

61. 已知两边、夹角的平分线，求作三角形。

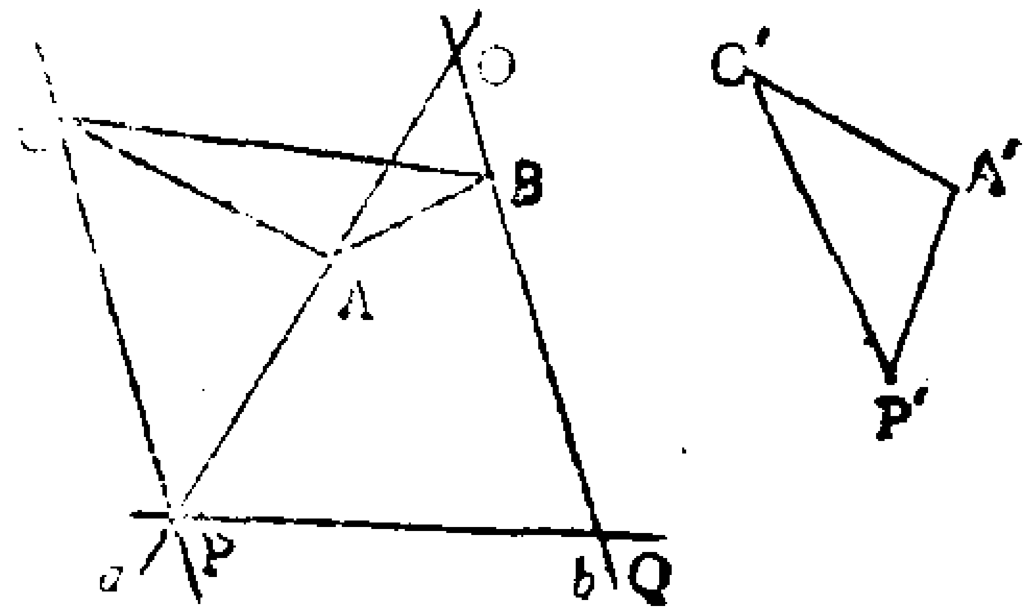


图复五—61

解：设$\triangle ABC$已作成，角平分线AT为已知，则A点在$\triangle ABC$的阿氏圆上（参见例题64）但BC未知。可先以任意长$B'C'$为边，以AB/AC（定值）为已知比，作一阿氏圆，再作$\triangle A'B'C'$，使$A'B'/A'T'=AB/AT$（定值）而得到$\triangle A'B'C'$。最后用放大法作出$\triangle ABC$。

62. 在第37题中，设使AP/BQ等于定比，则如何作图？

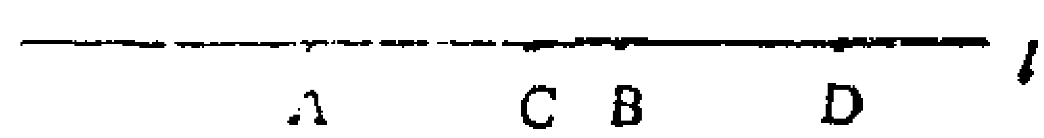
解：将PQ平移至CB，连AC、PC，则由▱$PQBC$得$AP/PC=AP/BQ$为定值，而$\angle CPA$为a、b之交角之



图复五—62

一。于是，可先作一与$\triangle APC$相似之$\triangle A'P'C'$，再由$\angle BCA=\angle P'C'A'$决定C点，故直线l的作法不难得到。

63。设A、B是直线l上两定点，在l上求两点C、D，使调和分隔A、B且令CD等于定长。



图复五—63

解：设图已成，令$\overline{AB}=a$，$\overline{CA}=x$，则$x/(x+a)$
$=-(\overline{DB}-a)/\overline{DB}\Rightarrow\overline{DB}=(x+a)a/(2x+a)$，
$\because\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}=-(a+x)$
$\Rightarrow|(x+a)a/(2x+a)-(a+x)|=CD$的长，解之则得$x$，即可作图。

总 复 习 题

1．已知▱$ABCD$，同在外边作正三角形$\triangle ABE$及$\triangle BCF$。求证$\triangle DEF$是正三角形。

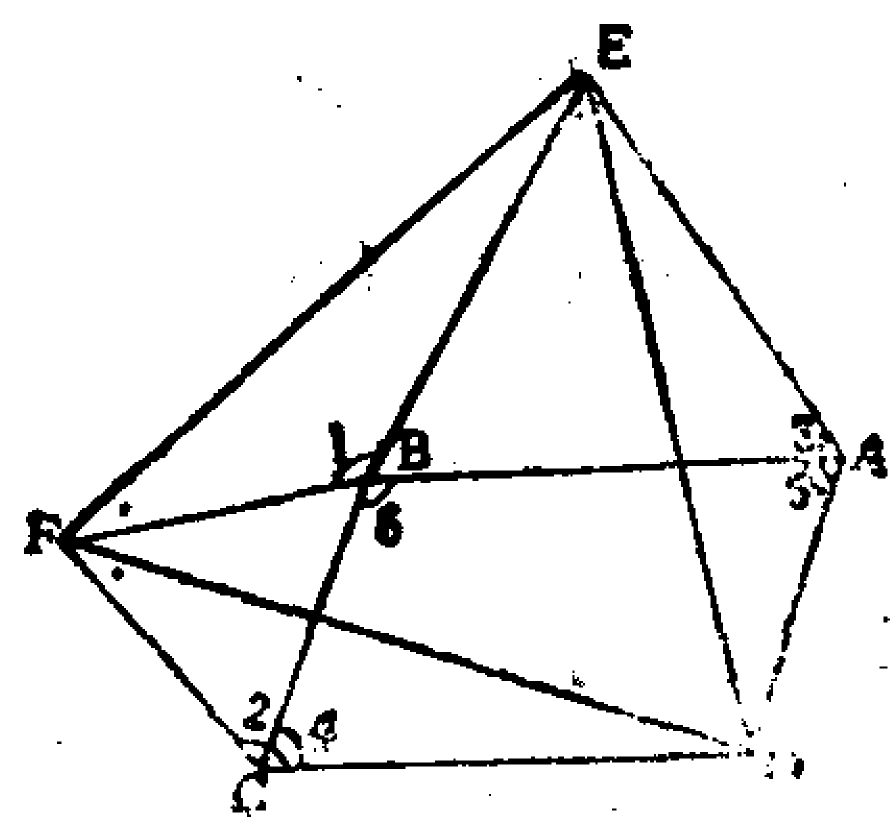
证明：如图，

$\because \angle 1=240^\circ-\angle 6$

$=240^\circ-(180^\circ-\angle 4)$

$=60^\circ+\angle 4$

$=\angle 2$。



图总—1

又 $FB=FC$，$BE=BA=CD$，

有$\triangle FBE\cong\triangle FCD$。

$\therefore FE=FD$，$\angle EFD=\angle EFB+\angle BFD$

$=\angle DFC+\angle BFD$

$=\angle BFC=60^\circ$，

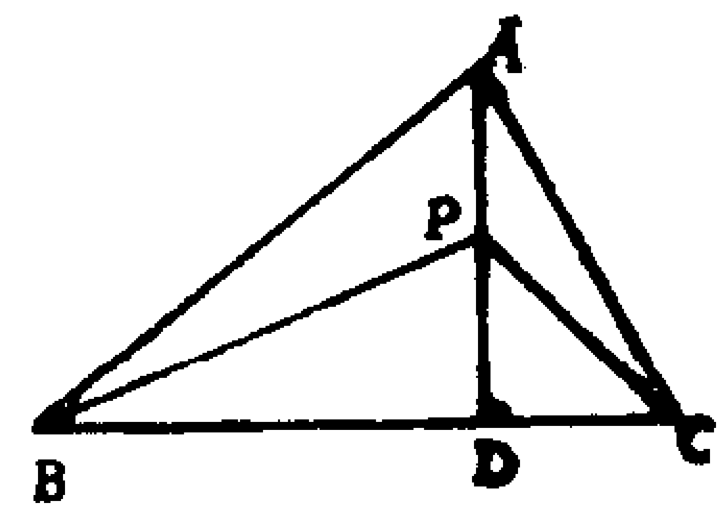
故 $\triangle DEF$为正三角形。

注：把题中“同在外边”改成“同在内侧”命题仍成立。

2．设P是$\triangle ABC$内一点，若$AP\perp BC$，则：

$|PB-PC|\geqslant|AB-AC|$。

证明：如图，



图总—2

$\because AP \perp BC$,

$\therefore PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$.

即 $|PB - PC|(PB + PC) =$

$= |AB - AC|(AB + AC)$.

又P在$\triangle ABC$内，

$\therefore AB + AC > PB + PC$,

故 $|PB - PC| \geqslant |AB - AC|$.

等号仅在$AB = AC$时成立。

3．三角形半周的平方，不小于内切圆半径平方的二十七倍。

证明：设s表半周，a、b、c表三边，r为内切圆半径，则

$sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$\therefore \quad s^2r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$,

$sr^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$.

由此得$sr^2 \leqslant [(s-a)+(s-b)+(s-c)]^3/3^3$

$= (3s-a-b-c)^3/3^3 = s^3/3^3$.

故 $sr^2 \leqslant s^3/3^3$，即 $27r^2 \leqslant s^2$.

4．三角形的半周不小于内切圆的内接正三角形的周长。

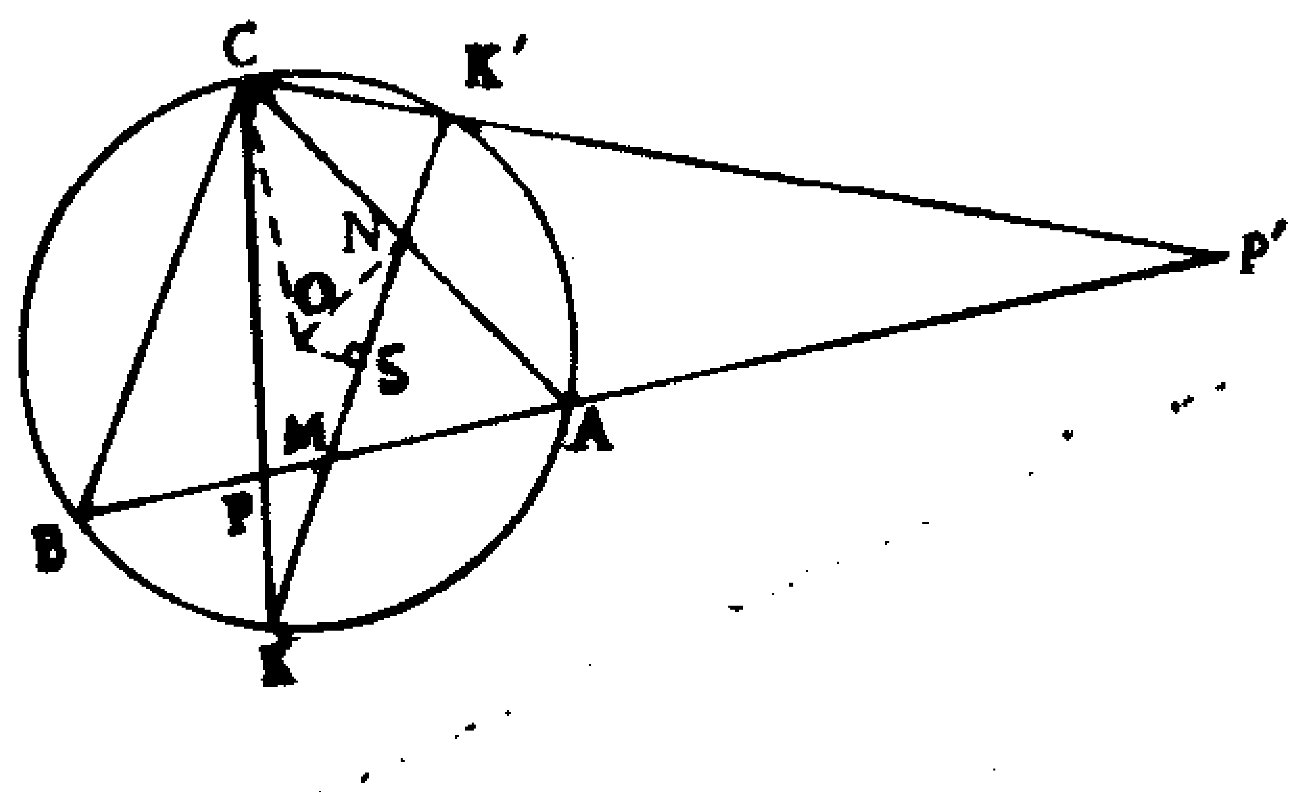
证明：$\because s^2 \geqslant 27r^2$，$s$为半周，$r$为内切圆半径，

$\therefore s \geqslant 3\sqrt{3}r$。

又因为$3\sqrt{3}r$恰好是内切圆的内接正三角形之周长 s'，

故　$s \geqslant s'$，即原题成立。

5．在正$\triangle ABC$中，M、N各是AB、AC两边的中点。设直线MN交$\odot ABC$于K、K'，而连线CK、CK'交直线AB于P、P'，则这两点内外分AB边成中外比。



图总—5（1）

证法一：如图，设$\odot ABC$半径为R，圆心为O，作$OS \perp MN$于S，则

$OS = ON/2 = R/4$，

$KS = \sqrt{R^2 - R^2/4^2} = \sqrt{15}R/4$，

$MS = \sqrt{R^2/2^2 - R^2/4^2} = \sqrt{3}R/4$。

于是

$KM = KS - MS = \sqrt{15}R/4 - \sqrt{3}R/4 = \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)R/4$.

∵ $PMK \backsim \triangle PBC$.

而 $BC = \sqrt{3}R$,

∴ $PM/PB = MK/BC = (\sqrt{5}-1)/4$,

即 $PM = (\sqrt{5}-1)PB/4$.

于是 $PA = PM + MA = PM + BM = 2PM + PB$

$$= [(\sqrt{5}-1)/2+1]PB = (\sqrt{5}+1)PB/2.$$

∵ $PA^2 = (3+\sqrt{5})PB^2/2$,

$$PB \cdot BA = 2PB[PB + (\sqrt{5}-1)PB/4]$$

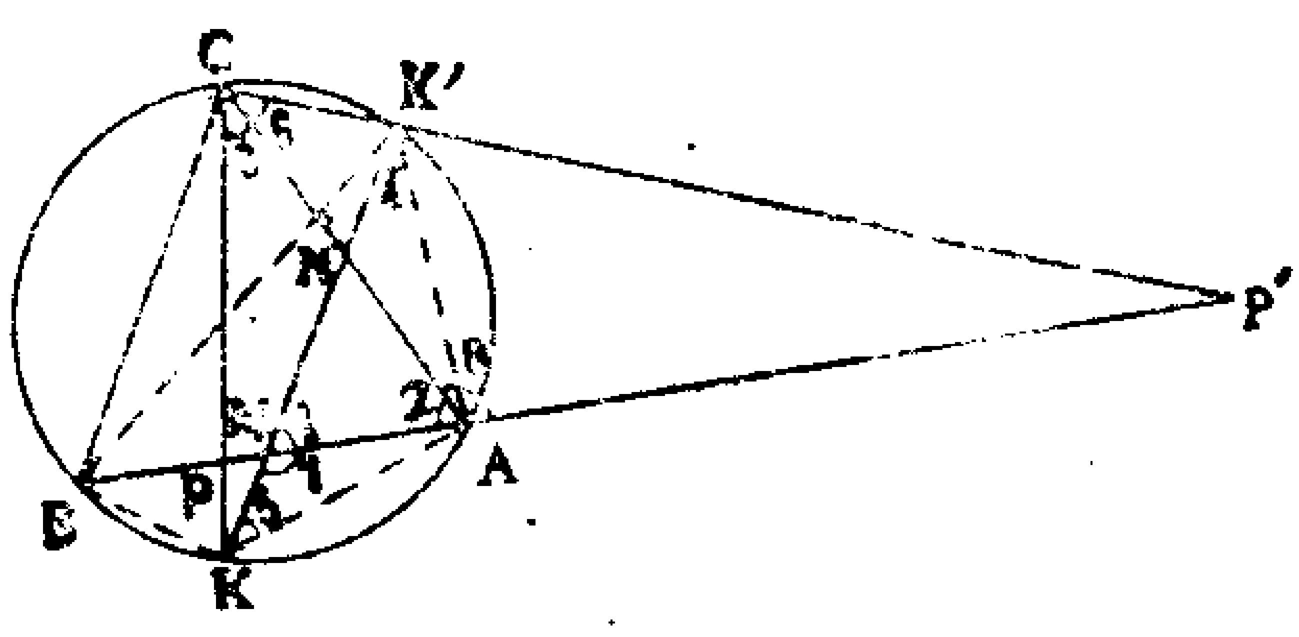
$$= (3+\sqrt{5})PB^2/2,$$

∴ $PA^2 = PB \cdot BA$.

故 P分AB边成中外比。

类似可证P'外分AB边成中外比。

证法二： 如图，



图总—5 (2)

∵ PK为$\angle BKA$的平分线，

$\therefore\quad PA/PB=KA/KB=AK'/KB=K'M/BM$

$=K'M/MA$ ①

又∵ $\angle 1=\angle 2=60^\circ$，$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore\quad \triangle K'MA\backsim\triangle CAP$，

$\therefore\quad K'M/MA=CA/AP=AB/PA$。 ②

由①、②得 $PA^2=PB\cdot AB$。

利用$P'K'$为$\angle BK'A$的外角平分线，同理可证

$P'A^2=P'B\cdot AB$。

故P内分AB，P'外分AB成中外比。

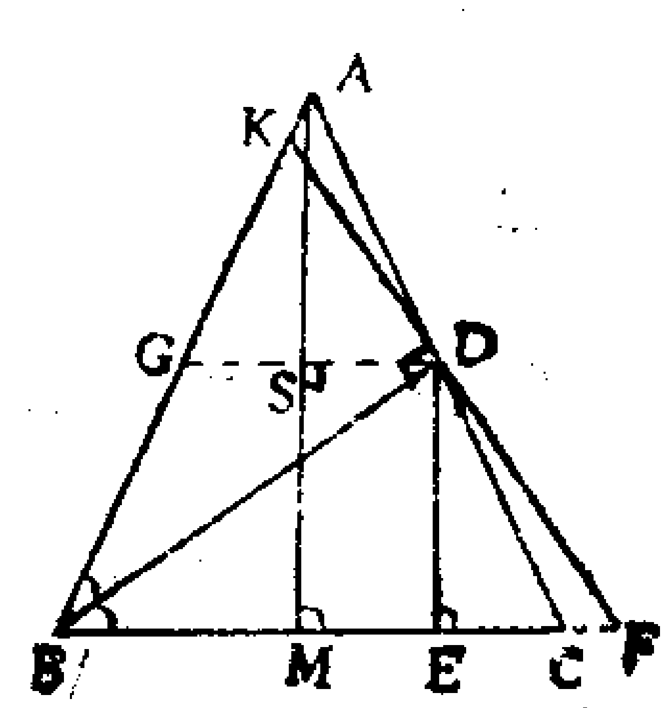
6．在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，M是BC的中点，设$\angle B$的平分线交AC于D。又引$DE\perp BC$于E，$DF\perp BD$而交BC于F。求证：$ME=BF/4$。

证明：如图，过D作$DG\perp MA$于S而交AB于G，设FD交AB于K，则$DK=DF$，

$\therefore\quad DG=BF/2$。

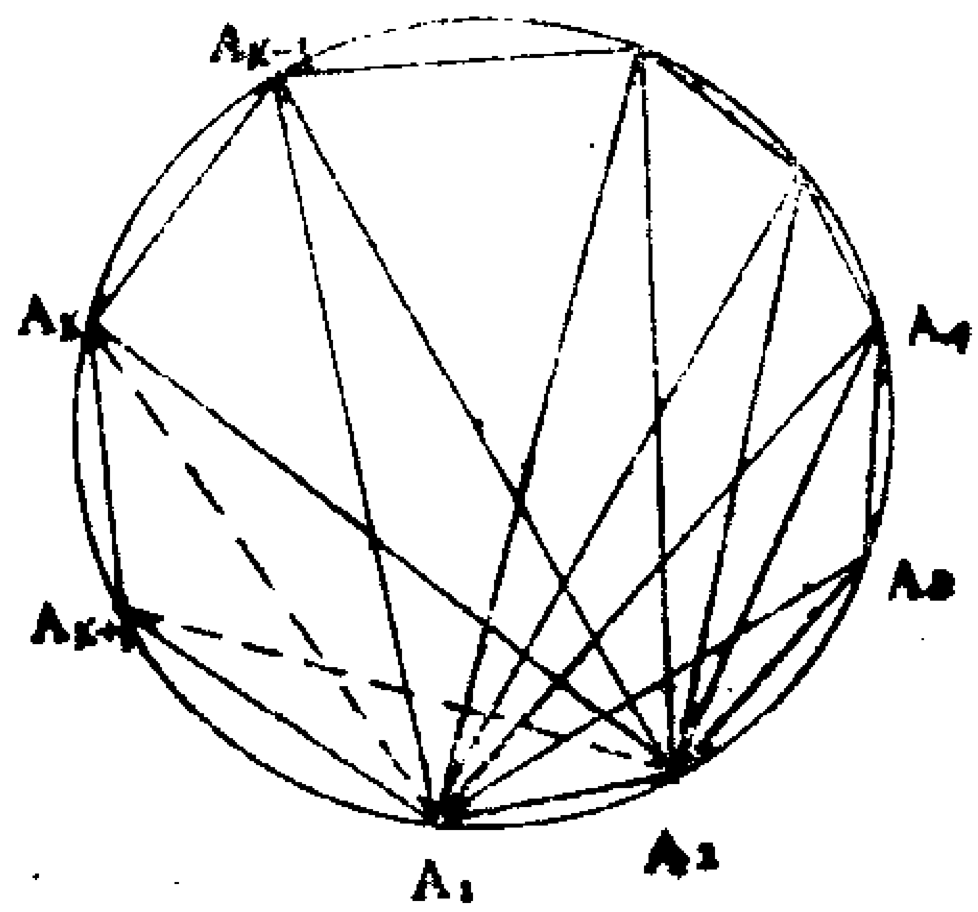
又 $ME=DS=DG/2$，

$\therefore\quad ME=BF/4$。



图总—6

7．由圆内接凸多边形的一顶点作所有的对角线把原形分成若干个三角形。试证：这些三角形的内切圆半径和，不论所取的顶点是何点皆得相同的值。



图总—7

证明：设$A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n$是凸$n$边形，$r_{A_1A_2A_3}$表$\triangle A_1A_2A_3$的内切圆半径，余类推。

下面用数学归纳法证明：

1° 当$n=4$时，由复习题三第11题便知本题成立。

2° 假设当$n=k$时，本题成立，则有：

$r_{A_1A_2A_3}+r_{A_1A_3A_4}+\cdots+r_{A_1A_{k-1}A_k}$

$=r_{A_2A_3A_4}+\cdots+r_{A_2A_{k-1}A_k}+r_{A_2A_kA_1}$。

又$\because$ $r_{A_1A_kA_{k+1}}=r_{A_2A_kA_{k+1}}+r_{A_2A_{k+1}A_1}-r_{A_2A_kA_1}$（由1°知）

$\therefore$ $r_{A_1A_2A_3}+r_{A_1A_3A_4}+\cdots+r_{A_1A_{k-1}A_k}+r_{A_1A_kA_{k+1}}$

$=r_{A_2A_3A_4}+\cdots+r_{A_2A_{k-1}A_k}+r_{A_2A_kA_1}$

$+(r_{A_2A_kA_{k+1}}+r_{A_2A_{k+1}A_1}-r_{A_2A_kA_1})$

$=r_{A_2A_3A_4}+\cdots+r_{A_2A_{k-1}A_k}+r_{A_2A_kA_{k+1}}+r_{A_2A_{k+1}A_1}$,

即

$r_{A_1A_2A_3}+r_{A_1A_3A_4}+\cdots+r_{A_1A_{k-1}A_k}+r_{A_1A_kA_{k+1}}$

$=r_{A_2A_3A_4}+\cdots+r_{A_2A_{k-1}A_k}+r_{A_2A_kA_{k+1}}+r_{A_2A_{k+1}A_1}$,

∴ 当$n=k+1$时，有：

$r_{A_1A_2A_3}+r_{A_1A_3A_4}+\cdots+r_{A_1A_{n-1}A_n}+r_{A_1A_nA_{n+1}}$

$=r_{A_2A_3A_4}+\cdots+r_{A_2A_{n-1}A_n}+r_{A_2A_nA_{n+1}}+r_{A_2A_{n+1}A_1}$

这就证明了取A_1、A_2两点得相同值。

同理可证取A_2、A_3，……A_n、A_1各得相同的值。

由此可知不论所取的顶点是何点皆得相同的值。

8. 设A、B、C、P四点共线。若$\overline{CA}/\overline{CB}=-a/b$，则 $b\overline{PA}+a\overline{PB}=(a+b)\overline{PC}$。

证明： ∵ $\overline{CA}/\overline{CB}=-a/b$,

∴ $(\overline{PA}-\overline{PC})/(\overline{PB}-\overline{PC})=-a/b$。

即 $b\overline{PA}+a\overline{PB}=(a+b)\overline{PC}$。

9. 设A、B、C、D、P五点共线，M、N各是AB、CD的中点。若A、B调和分隔C、D，求证：

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}+\overline{PC}\cdot\overline{PD}=2\overline{PM}\cdot\overline{PN}$。

证明： ∵ A、B调和分隔C、D，

∴ $\overline{CA}/\overline{CB}=-\overline{DA}/\overline{DB}$。

即 $\overline{CB}\cdot\overline{DA}+\overline{CA}\cdot\overline{DB}=0$。

于是$(\overline{PB}-\overline{PC})(\overline{PA}-\overline{PD})+(\overline{PA}-\overline{PC})(\overline{PB}-\overline{PD})=0$，

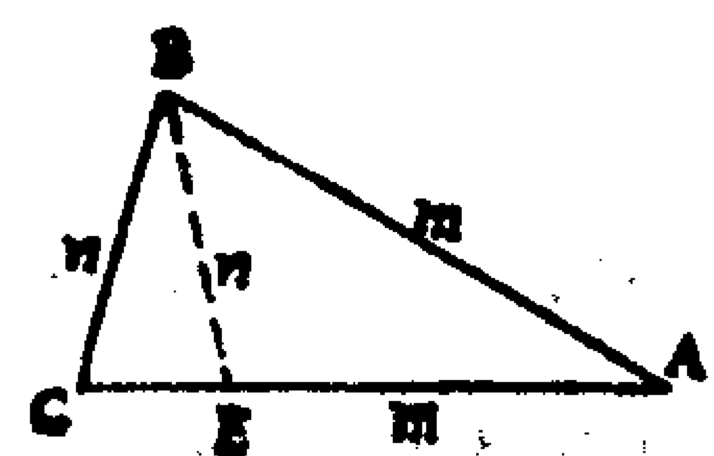
∴ $2(\overline{PA}\cdot\overline{PB}+\overline{PC}\cdot\overline{PD})=(\overline{PA}+\overline{PB})(\overline{PC}+\overline{PD})$。

即 $2(\overline{PA}\cdot\overline{PB}+\overline{PC}\cdot\overline{PD})=2\overline{PM}\cdot 2\overline{PN}$。

故 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}+\overline{PC}\cdot\overline{PD}=2\overline{PM}\cdot\overline{PN}$。

10. 在$\triangle ABC$中，设$\angle A=20°$，$AB=AC=m$，$BC=n$，求证：(1) $m^3+n^3=3m^2n$；

(2) $(m+n)^3=6mns$，式中的s是三角形的半周。



图总—10

证明(1)： 过B作$BE=BC$，设交AC于E。则$\triangle BEC\backsim\triangle ABC$，

∴ $EC/BC=BC/AC$。

又 $BE=BC=n$，∴ $EC=n^2/m$。

∵ $\angle ABE=\angle ABC-\angle EBC=80°-20°=60°$，

∴ $AE=\sqrt{m^2+n^2-mn}$。

又∵ $AE+EC=AC=m$，

∴ $\sqrt{m^2+n^2-mn}+n^2/m=m$。

故　$m^3+n^3=3m^2n$。

（2）：由(1) $m^3+n^3=3m^2n$，

有　$m^3+n^3+3mn(m+n)=3m^2n+3mn(m+n)$。

即

$$(m+n)^3=3mn(2m+n)=3mn\cdot 2s=6mns,$$

故

$$(m+n)^3=6mns.$$

11．设I是$\triangle ABC$的内心或旁心，r是内切圆半径或对应的旁切圆半径，R是外接圆半径。

求证：$IA\cdot IB\cdot IC=4Rr^2$。

证明：如图，延长BI、CI设分别交$\odot ABC$于E、F。

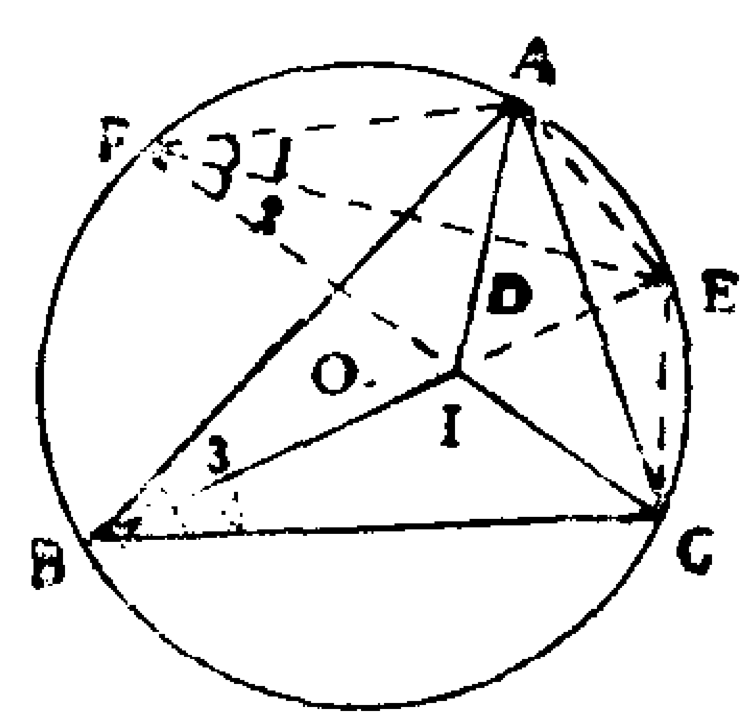
据原书例题55(2)式，有

$IB\cdot IE=IC\cdot IF=2Rr$，

$\therefore$　$IB\cdot IC=4R^2r^2/IE\cdot IF$。　①

据复习题一第18题，$IE=AE$，$IF=AF$，

$\therefore$　$IE\cdot IF=AE\cdot AF$。



图总—11

再由习题四第11题，

$AE\cdot AF=2R\cdot h$。（h为$\triangle AEF$边EF上的高）

又　$\angle 1=\angle 3=\angle 4=\angle 2$，$IF=AF$。

连结EF设交AI于D,

$\therefore$ FD垂直平分AI，即 $AD=h=IA/2$,

于是 $IE\cdot IF=R\cdot IA$, 代入①式即得

$IA\cdot IB\cdot IC=4Rr^2$。

12. I点为$\triangle ABC$的内心或旁心之必要且充分条件为：

$\pm IA^2\cdot BC\pm IB^2\cdot CA\pm IC^2\cdot AB=BC\cdot CA\cdot AB$。

式中左端±号的取法：全取+号系用于内心的情形，第一项取+号余两项取一号系用于对着A的旁心的情形，余类推。

证：必要性。设I为$\triangle ABC$的内心，延长AI交BC于M，

则$AM^2=bc-bca^2/(b+c)^2$

$=bc(b+c-a)(b+c+a)/(b+c)^2$

$\because$ $AI/AM=(b+a)/(b+c+a)$

$\therefore$ $AI^2=bc(b+c-a)/(b+c+a)$。

同理 $BI^2=ca(c+a-b)/(c+a+b)$,

$CI^2=ab(a+b-c)/(a+b+c)$。

$\therefore$ $IA^2\cdot a+IB^2\cdot b+IC^2\cdot c$

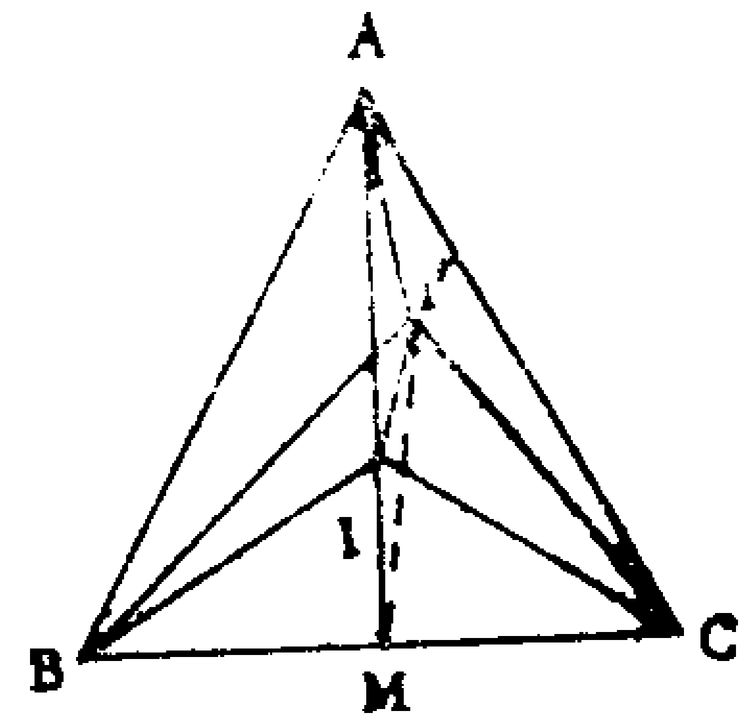
$=abc(b+c-a+c+a-b+a+b-c)/(a+b+c)$

$=abc$。

充分性。设I'适合$I'A^2\cdot a\pm I'B^2\cdot b\pm I'C^2\cdot c=abc$

$\because$ $AI:IM=(b+c):a$

∴　由习题十八第20题(1)小题得：



图总—12

$I'I^2=(b+c)I'M^2/(a+b+c)$

$+aI'A^2/(a+b+c)$

$-(b+c)IM/(a+b+c)$

$-aIA^2/(a+b+c)$。

$=(b+c)(I'M^2-IM^2)/(a+b+c)+a(I'A^2-IA^2)/(a+b+c)$ ……………………①

∵　$BM:MC=c:b$，

∴　$I'M^2=cI'C^2/(b+c)+bI'B^2/(b+c)-$

$-cMC^2/(b+c)-bMB^2/(b+c)$，

$IM^2=cIC^2/(b+c)+bIB^2/(b+c)-$

$-cMC^2/(b+c)-bMB^2/(b+c)$。

将上两式代入①得

$II'^2=[(aI'A^2+bI'B^2+cI'C^2)-(aIA^2+bIB^2+cIC^2)]/(a+b+c)$

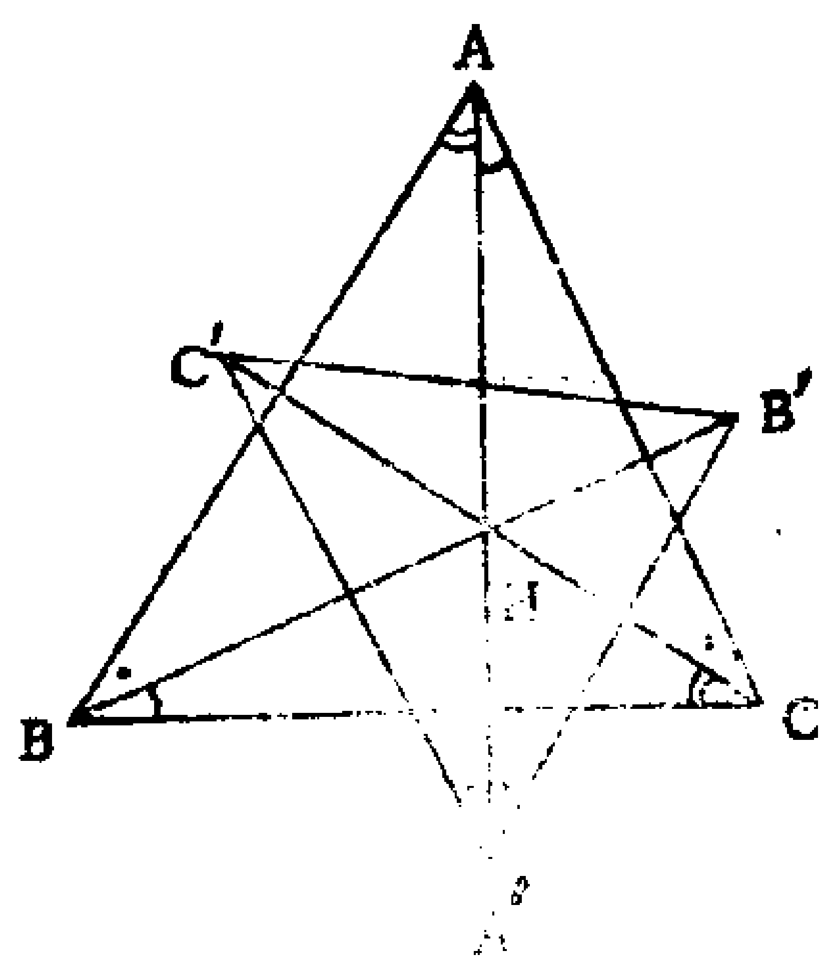
$=(abc-abc)/(a+b+c)=0$，

这就证明了I'为内心。

13。若H非$\triangle ABC$的顶点，则H是这三角形的垂心之必要且充分的条件为：

$\pm HB\cdot HC\cdot BC\pm HC\cdot HA\cdot CA\pm HA\cdot HB\cdot AB$
$=BC\cdot CA\cdot AB$，式中左端±号的取法：全取+号系用$\triangle ABC$为锐角三角形的情形，第一项取+号余两项取一号系用于$\angle BAC$为钝角的情形，余类推。

证：以H为反演中心，k为反演幂，将A、B、C变换到A'、B'、C'。



图总—13

则 $HB=k/HB'$，$HC==k/HC'$，$HA=k/HA'$，

$BC=k\cdot B'C'/HB'\cdot HC'$，

$CA=k\cdot C'A'/HC'\cdot HA'$，

$AB=k\cdot A'B'/HA'\cdot HB'$。

若$HB\cdot HC\cdot BC+HC\cdot HA\cdot CA+HA\cdot HB\cdot AB=BC\cdot CA\cdot AB$，

将前六式代入上式化简得：

$HA'^2B'C'+HB'^2\cdot C'A'+HC'^2\cdot A'B'$
$=B'C'\cdot C'A'\cdot A'B'$。

由上题知H为$\triangle A'B'C'$的内心，

$\therefore\angle HA'B'=\angle HA'C'$。而$\angle HA'B'=\angle HBA$，$\angle HA'C'=\angle HCB'$，

$\therefore \angle HBC' = \angle HCB'$。同理，$\angle HBC = \angle HAC$，$\angle HCB = \angle HAB$。由此不难求得 $\angle HCA = \angle HBA = 90° - A$，$\angle HAC = \angle HBC = 90° - C$，$\angle HCB = \angle HAB = 90° - B$。

故H为垂心。

若H为垂心，则$HB \cdot HC / AB \cdot AC + HC \cdot HA / BC \cdot BA + HA \cdot HB / CA \cdot CB = S_{HBC}/S_{ABC} + S_{HCA}/S_{BCA} + S_{HAB}/S_{CAB} = 1$，

故$HB \cdot HC \cdot BC + HC \cdot HA \cdot CA + HA \cdot HB \cdot AB$

$= BC \cdot CA \cdot AB$。

14. 三角形中，外心至内心、三个旁心的距离平方和，等于外接圆半径平方的十二倍。

证明：设R、r和r_A、r_B、r_C是$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$半径、内切圆$\odot I$半径和A、B、C对应的旁切圆$\odot I_A$、$\odot I_B$、$\odot I_C$半径

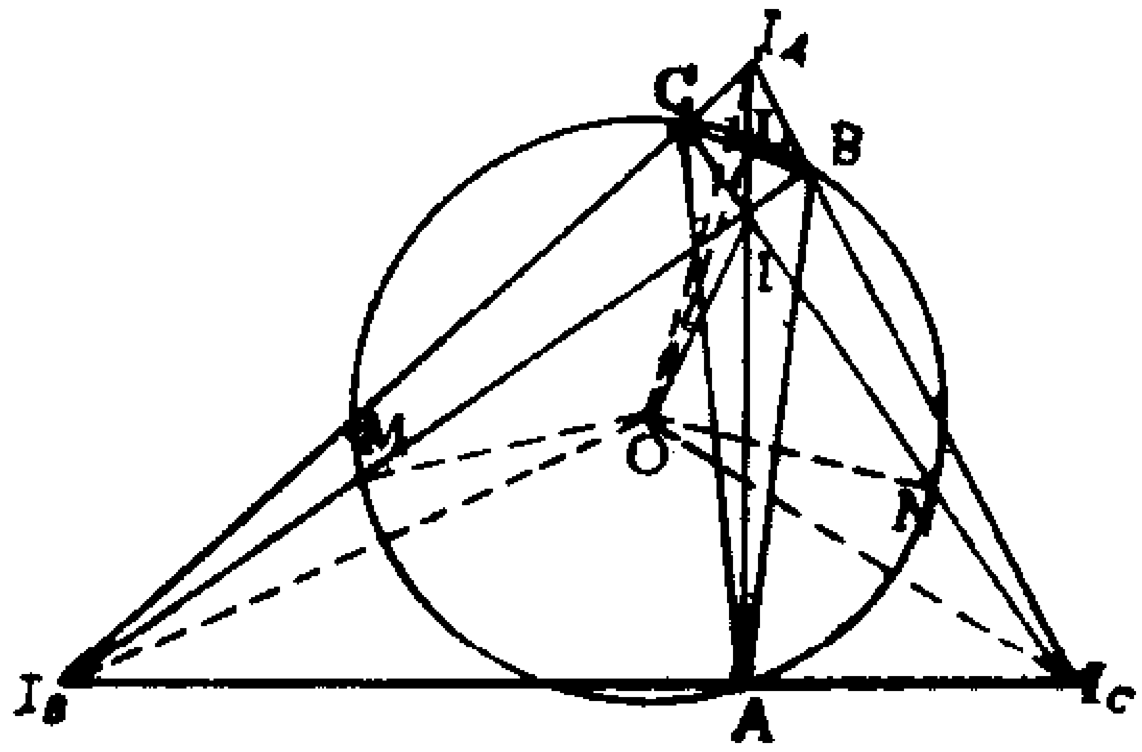
由例题55得：$OI^2 = R^2 - 2Rr$，$OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A$，$OI_B^2 = R^2 + 2Rr_B$，$OI_C^2 = R^2 + 2Rr_C$。

$\therefore OI^2 + OI_A^2 + OI_B^2 + OI_C^2 = 4R^2 + 2R(r_A + r_B + r_C)$。

又由复习题三第12题，$r_A + r_B + r_C - r = 4R$，

故 $OI^2 + OI_A^2 + OI_B^2 + OI_C^2 = 12R^2$。

15. 三角形中，内心至三个旁心的距离之平方和，等于四倍外接圆直径乘以外接圆直径与内切圆半径之差所得的积。



图总—15

证明：同上设，如图，由复习题一第 24 题知：I、I_A、I_B、I_C 构成一垂心组，$\triangle ABC$ 是垂心组的垂足三角形，所以据 § 47例题44可知$\odot O$是$\triangle I_AI_BI_C$的九点圆，它必过II_A、II_B、II_C的中点L、M、N，于是

$$OL=OM=NO=R,$$

据中线性质，在$\triangle OII_A$中，有

$$II_A^2=2(OI^2+OI_A^2)-4OL^2$$

$$=2(OI^2+OI_A^2)-4R^2.$$

同理，$II_B^2=2(OI^2+OI_B^2)-4R^2$,

$$II_C^2=2(OI^2+OI_C^2)-4R^2.$$

三式相加得

$II_A^2+II_B^2+II_C^2=2(3OI^2+OI_A^2+OI_B^2+OI_C^2)-$

$-12R^2$。

利用上题和§49例题55便得：

$II_A^2+II_B^2+II_C^2=16R^2-8Rr=4\cdot(2R)\cdot(2R-r)$

16。三角形中，内心与外心各至三个旁心的距离之平方和的差，等于内心与外心的距离之平方的五倍。

证明：同第14题设，

则由上题知：$II_A^2+II_B^2+II_C^2=16R^2-8Rr$,

由第14题知：$OI_A^2+OI_B^2+OI_C^2=12R^2-OI^2$。

∴ $(II_A^2+II_B^2+II_C^2)-(OI_A^2-OI_B^2+OI_C^2)$

$=OI^2+4R^2-8Rr$

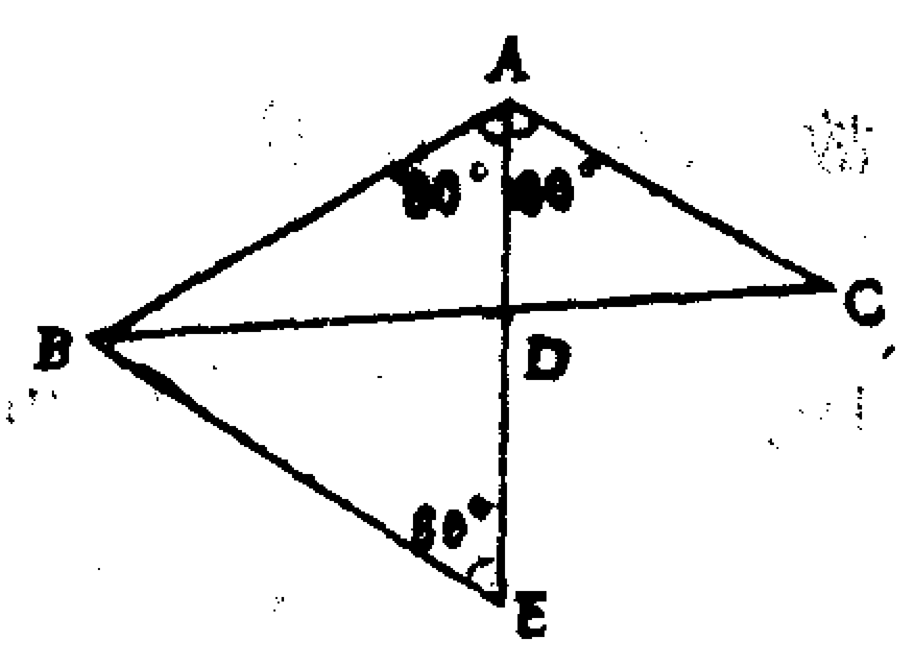
$=OI^2+4(R^2-2Rr)$

$=5OI^2$

17。在△ABC中，设$\angle A=120°$，它的平分线交BC边于D，

求证：$1/AD=1/AB+1/AC$。

证明：如图，作$BE\parallel AC$交AD于E，



图总—17

则 $AD/AB+AD/AC$

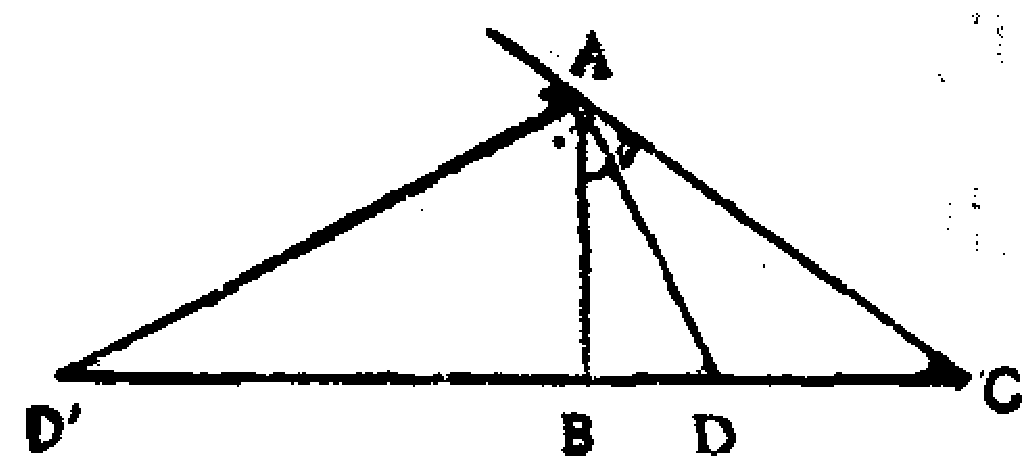
$=AD/AE+ED/EB=AD/AE+DE/AE$

$=AE/AE=1,$

故 $1/AD=1/AB+1/AC$。

18．在$\triangle ABC$中，设A角及其外角的平分线交直线BC于D及D'，求证：$DD'=2abc/|b^2-c^2|$，其中$a=BC$，$b=CA$，$c=AB$。

证明：如图，



图总—18

$\because\ BD:DC=AB:CA$,

$\therefore\ BD/(BD+DC)=AB/(AB+CA)$.

故 $BD=ac/(c+b)$

类似地，由 $D'B:D'C=AB:CA$，可得

$D'B=ac/|b-c|$，

故 $DD'=\overline{D'B}+\overline{BD}=2abc/|b^2-c^2|$.

19．三角形所有内外角的平分线之倒数平方和等于$(a^2+b^2+c^2)/4\triangle^2$，其中$a$、$b$、$c$表示三角形的边，$\triangle$表面积。

证明：设t_a、t_b、t_c和t_a'、t_b'、t_c'分别表示a、b、c边

上的内、外分角线，$s=(a+b+c)/2$，

则 $1/t_a^2+1/t_a'^2=(t_a^2+t_a'^2)/(t_a^2\cdot t_a'^2)$

$=[4a^2b^2c^2/(b^2-c^2)^2]/\{[4bcs(s-a)/(b+c)^2]\cdot$
$[4bc(s-b)(s-c)/(b-c)^2]\}=a^2/4\triangle^2$

(由上题以及§20，定理132)。

同理，$1/t_b^2+1/t_b'^2=b^2/4\triangle^2$，$1/t_c^2+1/t_c'^2$
$=c^2/4\triangle^2$。

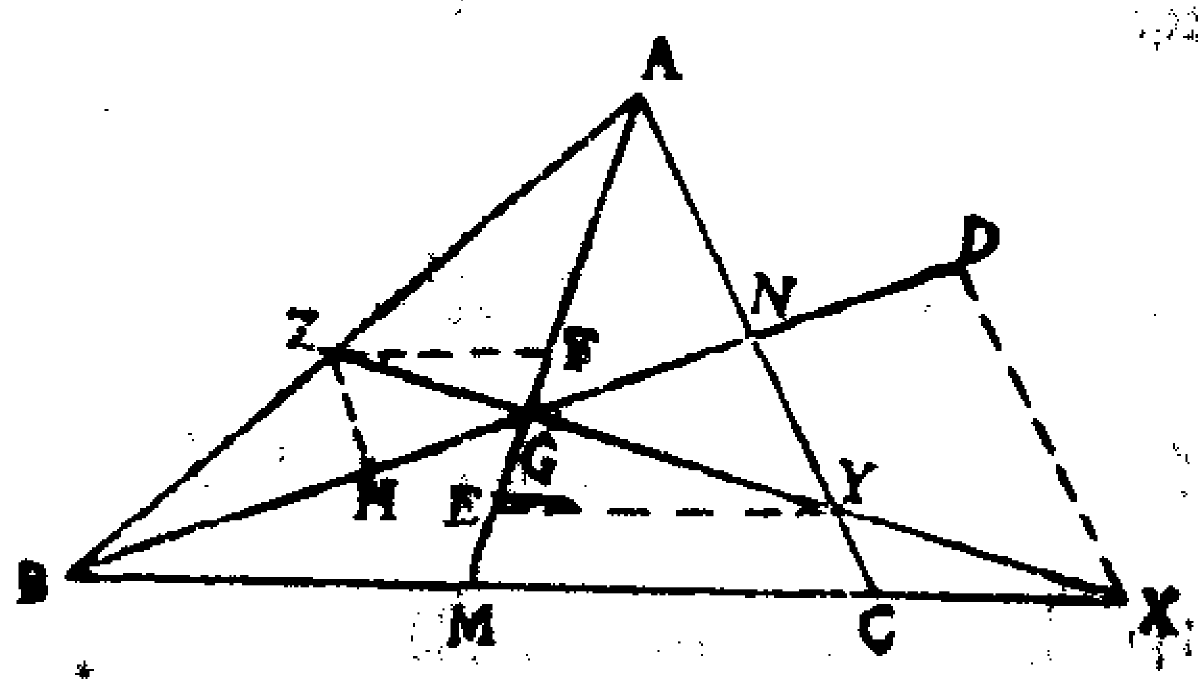
故题所要求之倒数平方和$=(a^2+b^2+c^2)/4\triangle^2$。

20。过三角形的重心G任作一直线，设交三边所在直线于X、Y、Z，则

$1/\overline{GX}+1/\overline{GY}+1/\overline{GZ}=0$。

提要：(1)由梅涅劳定理有

$\overline{XB}/\overline{XC}\cdot\overline{YC}/\overline{YA}\cdot\overline{ZA}/\overline{ZB}=1$，



图总—20

$\therefore\ \overline{XB}\cdot\overline{YC}\cdot\overline{ZA}=\overline{XC}\cdot\overline{YA}\cdot\overline{ZB}$。

(2) 过X、Z作AC的平行线交BN于D、H；过Y、Z作BC的平行线交AM于E、F。则由相似三角形有：

$\overline{GZ}/\overline{GX}=ZH/XD=[(ZB/AB)\cdot\overline{AN}]/[(XB/CB)\cdot\overline{CN}]$
$=-\overline{ZB}\cdot\overline{CB}/\overline{XB}\cdot\overline{AB}$，

$\overline{GZ}/\overline{GY}=ZF/YE=[(ZA/BA)\cdot\overline{BM}]/[(YA/CA)\cdot\overline{CM}]$

$=-\overline{ZA}\cdot\overline{CA}/\overline{YA}\cdot\overline{BA}$,

$\therefore\ \overline{GZ}/\overline{GX}+\overline{GZ}/\overline{GY}=(\overline{YA}\cdot\overline{ZB}\cdot\overline{CB}-\overline{XB}\cdot\overline{ZA}\cdot\overline{CA})/\overline{XB}$

$\cdot\overline{YA}\cdot\overline{BA}$

$=[\overline{YA}\cdot\overline{ZB}(\overline{XB}-\overline{XC})-\overline{XB}\cdot\overline{ZA}(\overline{CY}+\overline{YA})]/\overline{XB}\cdot\overline{YA}$

$(\overline{BZ}+\overline{ZA})$

$=[(\overline{XB}\cdot\overline{YA}\cdot\overline{ZB}-\overline{XB}\cdot\overline{YA}\cdot\overline{ZA}-\overline{XC}\cdot\overline{YA}\cdot\overline{ZB}+\overline{XB}\cdot$

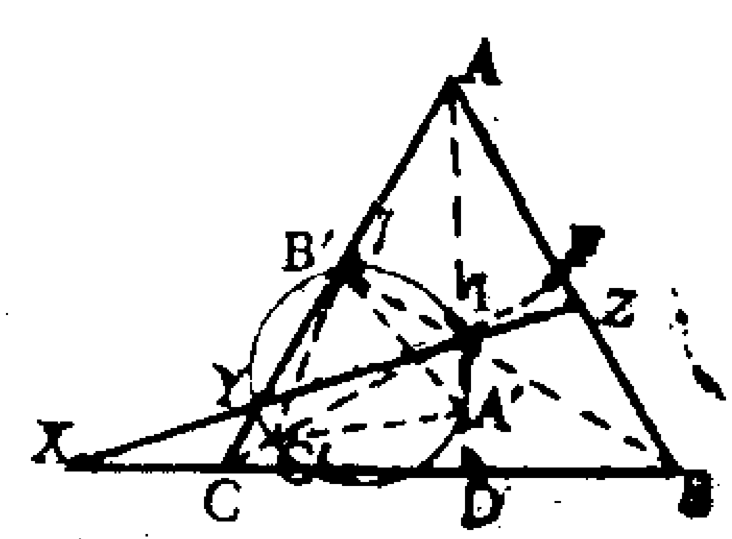
$\cdot\overline{YC}\cdot\overline{ZA})]/(-\overline{XB}\cdot\overline{YA}\cdot\overline{ZB}+\overline{XB}\cdot\overline{YA}\cdot\overline{ZA})=-1$。

故有　$1/\overline{GX}+1/\overline{GY}=-1/\overline{GZ}$,

即　　$1/\overline{GX}+1/\overline{GY}+1/\overline{GZ}=0$。

21。过正三角形的内心或旁心I任作一直线设交三边所在直线于X、Y、Z，则$1/IX^2+1/IY^2+1/IZ^2=3/2r^2$，其中$r$是内切圆或旁切圆的半径。

证明：如图，以IY为直径作圆设交IA、IB、IC于A'、B'、C'，则$\triangle A'B'C'$为正三角形，且



图总—21

$r^2/IX^2+r^2/IY^2+r^2/IZ^2=$

$=IA'^2/IY^2+IB'^2/IY^2++IC'^2/IY^2$。

又　$IA'^2+IB'^2+IC'^2=3IY^2/2$（习题十一第29题），

于是　$1/IX^2+1/IY^2+1/IZ^2$

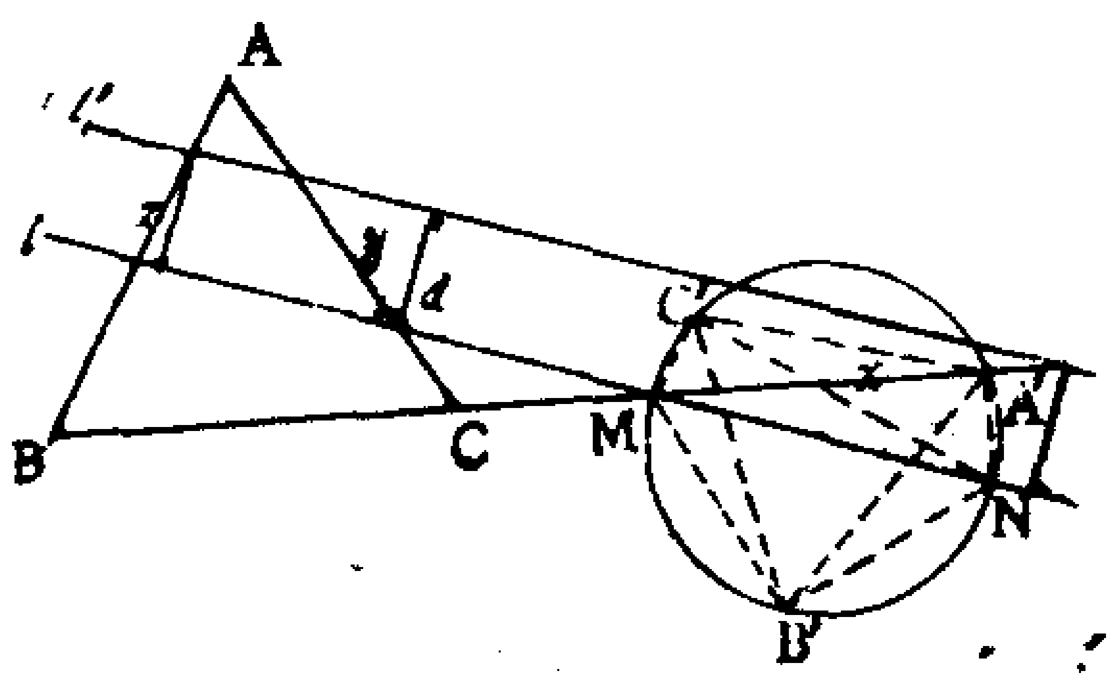
$=(IA'^2+IB'^2+IC'^2)/IY^2\cdot r^2$，

故　　$1/IX^2+1/IY^2+1/IZ^2=3/2r^2$。

旁心情形类似可证。

22。设两条平行线在正三角形三边所在直线上分别截下线段x、y、z，则$1/x^2+1/y^2+1/z^2=3/2d^2$。其中d是两平行线间的距离。

证明：如图，l交BC于M，在l上取一点N。以MN为直径作圆交BC于A'，过M作AC、AB的平行线交圆于B'、C'，则$\triangle A'B'C'$为正三角形。



图总—22

23。设一线段a在正三角形三边所在直线上的射影为x、y、z，则$x^2+y^2+z^2=3a^2/2$。

证明：如图，设$EF=a$，以线段a为直径作圆交过E的BC、CA、AB的平行线于A'、B'、C'，

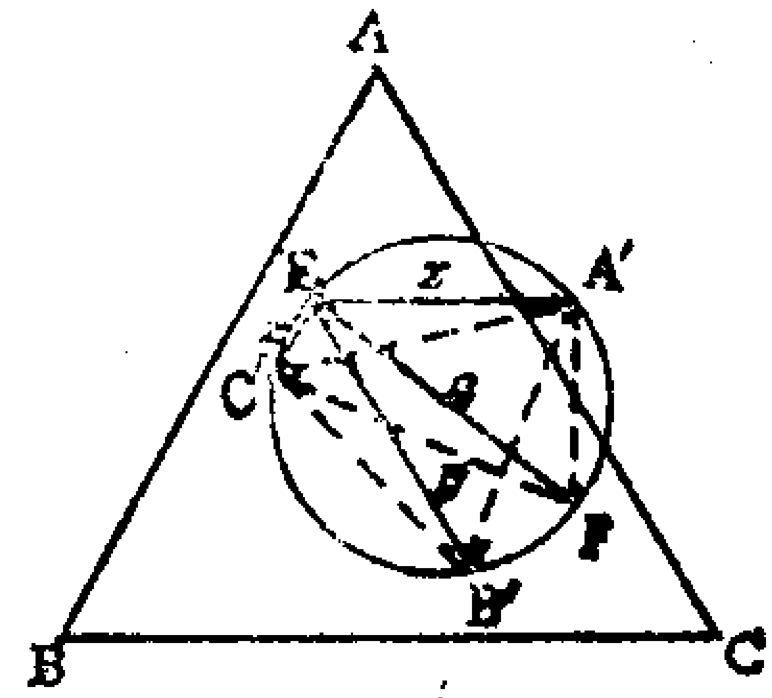
则　$\triangle A'B'C'$为正三角形，

且　$x^2+y^2+z^2=EA'^2+EB'^2+EC'^2$。

而　$EA'^2+EB'^2+EC'^2$

$=3a^2/2$，（习题十一第29题）

故　$x^2+y^2+z^2=3a^2/2$。

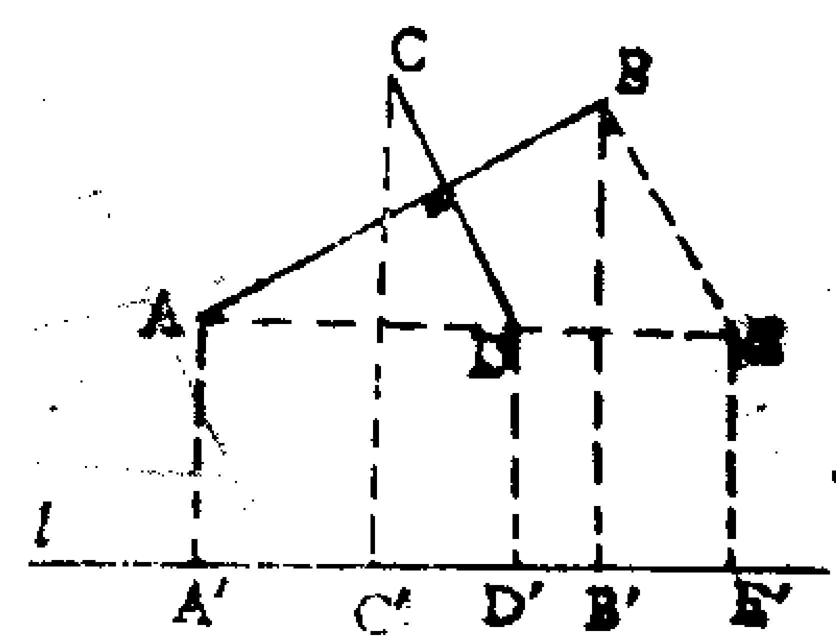


图总—23

24. 设互相垂直的两线段AB及CD在正三角形三边所在直线上的射影为A_iB_i及C_iD_i（$i=1, 2, 3$），则

$$\sum_{i=1}^{3}\overline{A_iB_i}\cdot\overline{C_iD_i}=0。$$

证明：先让AB、CD在一直线l上射影的一个性质。如图，作$\overline{BE}\perp\overline{CD}$，设$A$、$B$、$C$、$D$、$E$在$l$上的射影为$A'$、$B'$、$C'$、$D'$、$E'$，则有$\overline{A'B'}+\overline{C'D'}=\overline{A'E'}$。



图总—24

应用上述性质和23题结果，得

$$\sum_{i=1}^{3}A_iB_i^2=3AB^2/2,$$

$$\sum_{i=1}^{3}C_iD_i^2=3CD^2/2,$$

$$\sum_{i=1}^{3} A_iE_i^2 = 3AE^2/2。$$

但 $AE^2 = AB^2 + CD^2$,

$A_iE_i^2 = (\overline{A_iB_i} + \overline{C_iD_i})^2 = A_iB_i^2 + C_iD_i^2 + 2\overline{A_iB_i} \cdot$

$\cdot\ \overline{C_iD_i}$,

故 $\sum_{i=1}^{3} \overline{A_iB_i} \cdot \overline{C_iD_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(A_iE_i^2 - A_iB_i^2 - C_iD_i^2)$

$$= 3(AE^2 - AB^2 - CD^2)/4 = 0。$$

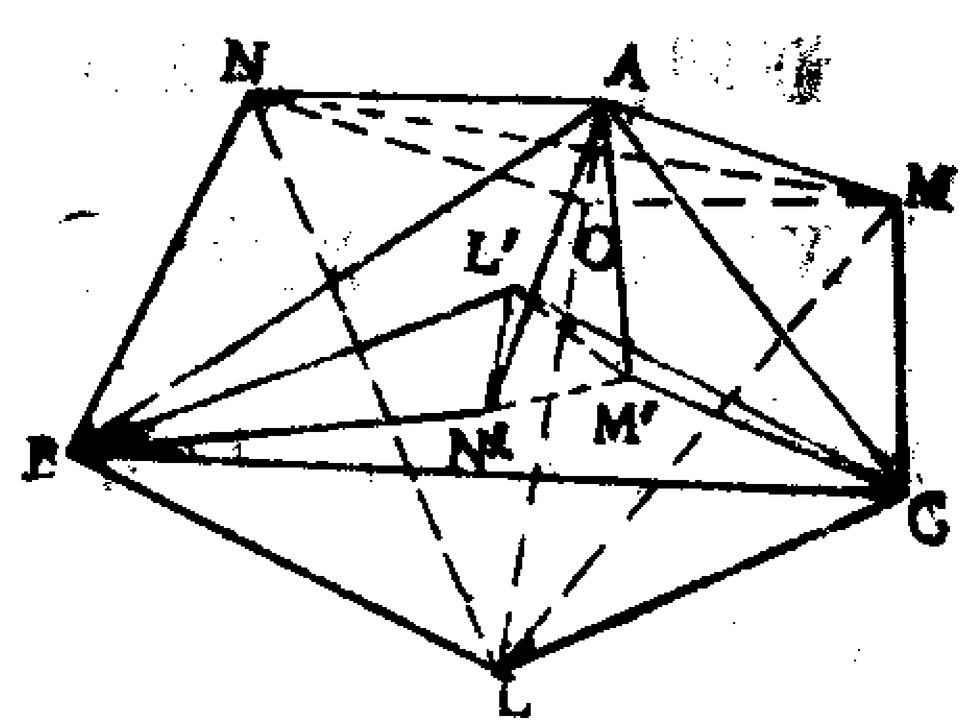
25。用$\triangle_0$表$\triangle ABC$的面积，$\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$分别表边长各等于BC、CA、AB的正三角形的面积。现在各以BC、CA、AB为边都向两侧作正三角形，命同在$\triangle ABC$外边的三个正三角形的中心为L、M、N，其他三个正三角形的中心为L'、M'、N'，而设$\triangle LMN$及$\triangle L'M'N'$的面积各为$\triangle$及$\triangle'$。求证：(1)$\triangle - \triangle' = \triangle_0$；

(2)$\triangle + \triangle' = (\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3)/3$。

证明：如图，由复习题三第1、2题知$\triangle LMN$、$\triangle L'M'N'$均为正三角形。若A关于MN的对称点为O，连结MO、NO，

则 $ON = NA = NB$,

$OM = MA = MC$,



图总—25

$\angle BNL=\angle ONL=60^\circ-\angle MNA$,

$\angle CML=\angle OML=60^\circ-\angle NMA$。

由此，O也是B关于NL、C关于ML的对称点。

类似地，可证A、B、C分别关于$M'N'$、$N'L'$、$L'M'$的对称点重合。连结OL，则有

$$\triangle_1/3+\triangle_2/3+\triangle_3/3+\triangle_0=2\triangle。\qquad ①$$

同样可证

$$\triangle_1/3+\triangle_2/3+\triangle_3/3-\triangle_0=2\triangle'\qquad ②$$

故 ①+②得 $\triangle-\triangle'=\triangle_0$。

①-②得 $\triangle+\triangle'=(\triangle_1+\triangle_2+\triangle_3)/3$。

26。设X、Y、Z各是$\triangle ABC$三边BC、CA、AB上的点，$\triangle A'B'C'$是AX、BY、CZ三线交成的三角形。若

$\overline{BX}/\overline{XC}=\overline{CY}/\overline{YA}=\overline{AZ}/\overline{ZB}=1/2$或2，则面$A'B'C'$=面$ABC/7$。

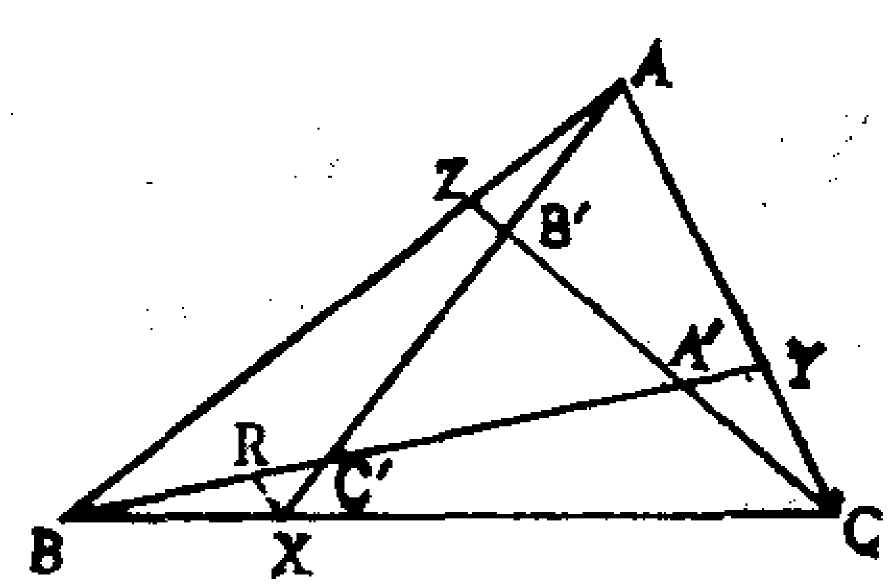
证明： 如图，过X作$XR\parallel CA$交BY于R，

$\because$ $\overline{XC}/\overline{C'A}=\overline{XR}/\overline{YA}$

$=(\overline{CY}/3)/\overline{YA}=1/6$,

$\therefore$ $(\overline{XC'}+\overline{C'A})/\overline{C'A}=1/6$.

即 $\overline{C'A}=6\overline{XA}/7$,



图总—26

$\therefore \quad S_{C'AB}=6S_{XAB}/7$。

而 $\quad S_{XAB}=S_{ABC}/3$,

故 $\quad S_{C'AB}=2S_{ABC}/7$。

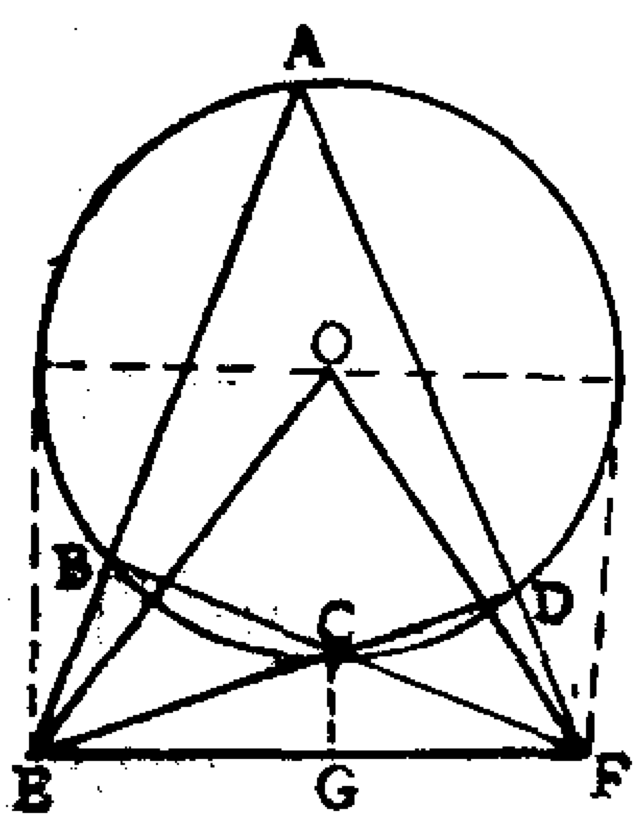
同理得 $\quad S_{B'CA}=2S_{ABC}/7$, $S_{C'AB}=2S_{ABC}/7$,

故 $\quad S_{A'B'C'}=S_{ABC}/7$。

27。设A、B、C、D是$\odot O(r)$上四点,E、F各是连线AB与CD、AD与BC的交点,

求证:$EF^2=OE^2+OF^2-2r^2$。

证明:如图,设$\odot BCE$交EF于G,则必有$\odot CDF$过G。



图总—27

$\therefore \quad EG\cdot EF=EC\cdot ED$

$=EO^2-r^2$,

$FG\cdot FE=FC\cdot FB$

$=FO^2-r^2$。

故 $\quad (EG+FG)EF=EO^2+FO^2-2r^2$,

即 $\quad EF^2=OE^2+OF^2-2r^2$。

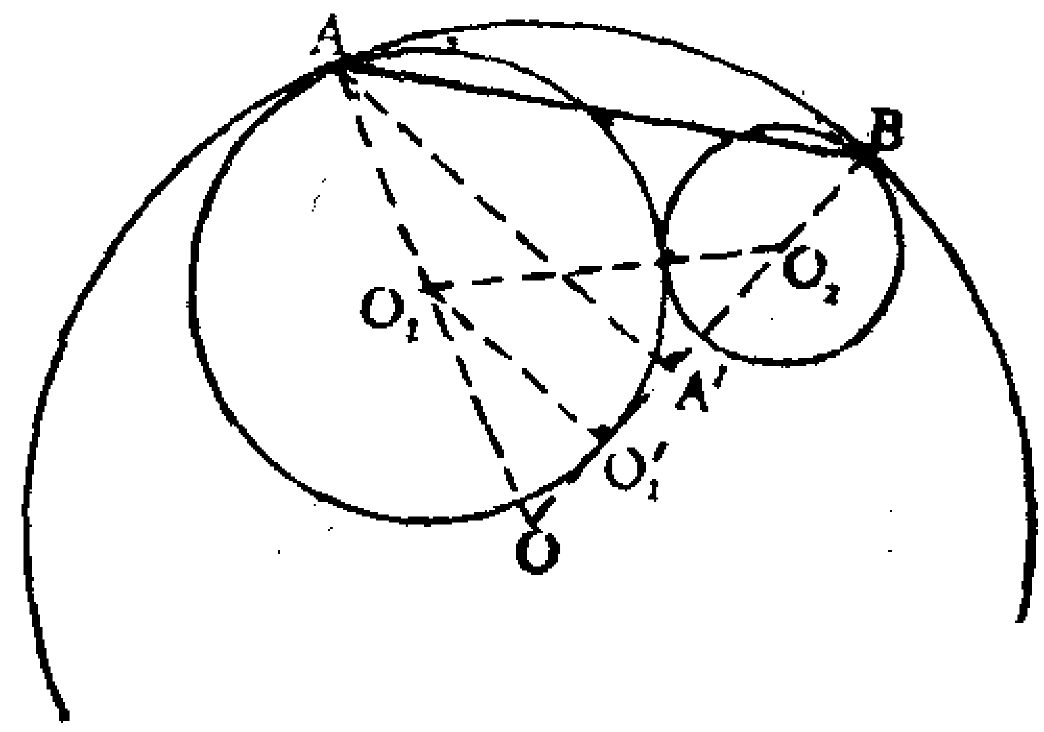
28。设$\odot O_1(r_1)$与$\odot O_2(r_2)$相外切而又各内切$\odot O(r)$于A、B。试证:$AB=2r\sqrt{r^2r^2/(r-r_1)(r-r_2)}$。

证明：如图，

作$O_1O_1'\perp OB$于O_1'，

$AA'\perp OB$于A'，则

$OA'=rOO_1'/(r-r_1)$。



图总—28

但 $2(r-r^2)OO_1'=$

$=(r-r_1)^2+(r-r_2)^2-$

$-(r_1+r_2)^2$，

即 $OO_1'=(r^2-rr_1-rr_2-r_1r_2)/(r-r_2)$，

故 $AB=\sqrt{2r^2-2r\cdot OA'}=$

$=\sqrt{2r^2-2r\cdot r(r^2-rr_1-rr_2-r_1r_2)/(r-r_1)(r-r_2)}$

$=\sqrt{4r^2r_1r_2/(r-r_1)(r-r_2)}$

$=2r\sqrt{r_1r_2/(r-r_1)(r-r_2)}$。

29．设大小两圆$\odot O(r)$、$\odot O'(r')$内切于A，AB是大圆的直径，t是切$\odot O$于B的切线。今在这两圆的间隙作互相外切的两个内切圆$\odot O_1$及$\odot O_2$，记它们与$\odot O$的切点为X及Y。连AX、AY、AO_1、AO_2使交t于P、Q、M、N，求证：(1) $PQ=2r(r-r')/r'$；

(2) $MN=4r(r-r')/(r+r')$。

证明(1)：如图，用反演法，以A为中心，$2r$、$2r'$为反演幂，很显然t为$\odot O'$的反象。过$\odot O'$的直径AB'的端

点B'作切线t'，则t'为$\odot O$的反象。

由定理181知$\odot O_1$、$\odot O_2$的反象$\odot O_1'(r_1')$、$\odot O_2'(r_2')$互相外切且同时与两平行线t、t'相切。AP、AQ与t'的交点P'、Q'就是$\odot O_1'$、$\odot O_2'$与t'的切点。

$\therefore \quad P'Q' = r_1' + r_2'$。

又 $r_1' = r_2' = BB'/2 = r - r'$，

$\therefore \quad P'Q' = 2(r - r')$。

故 $PQ = P'Q'AB/AB' = 2r(r - r')/r'$。

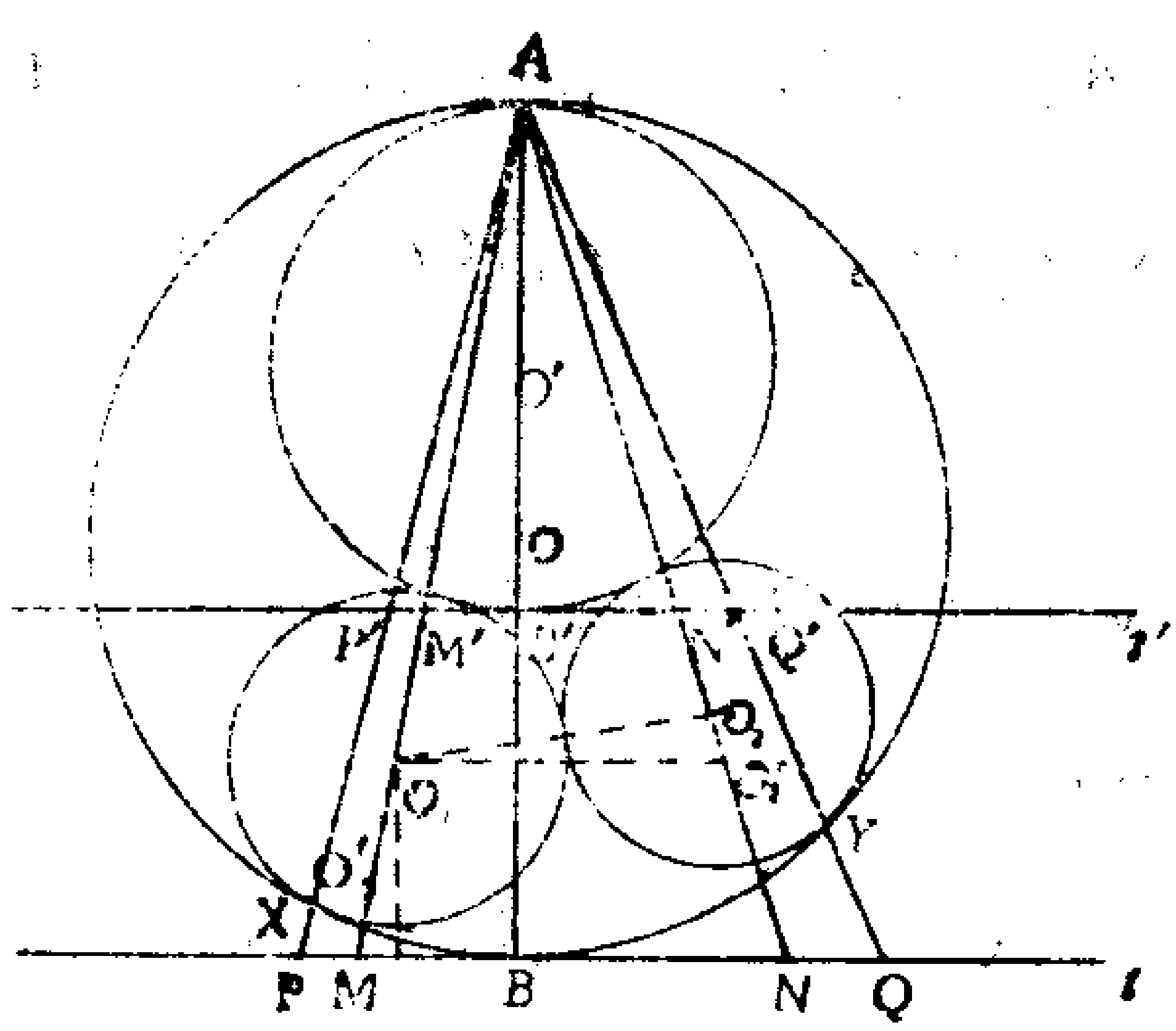
(2)：设M'、N'为AO_1、AO_2与t'的交点，

则 $M'N' = O_1'O_2' \cdot AB'/[AB + (BB'/2)]$

$= 2(r - r') \cdot 2r'/(r + r')$

$= 4r'(r - r')/(r + r')$。

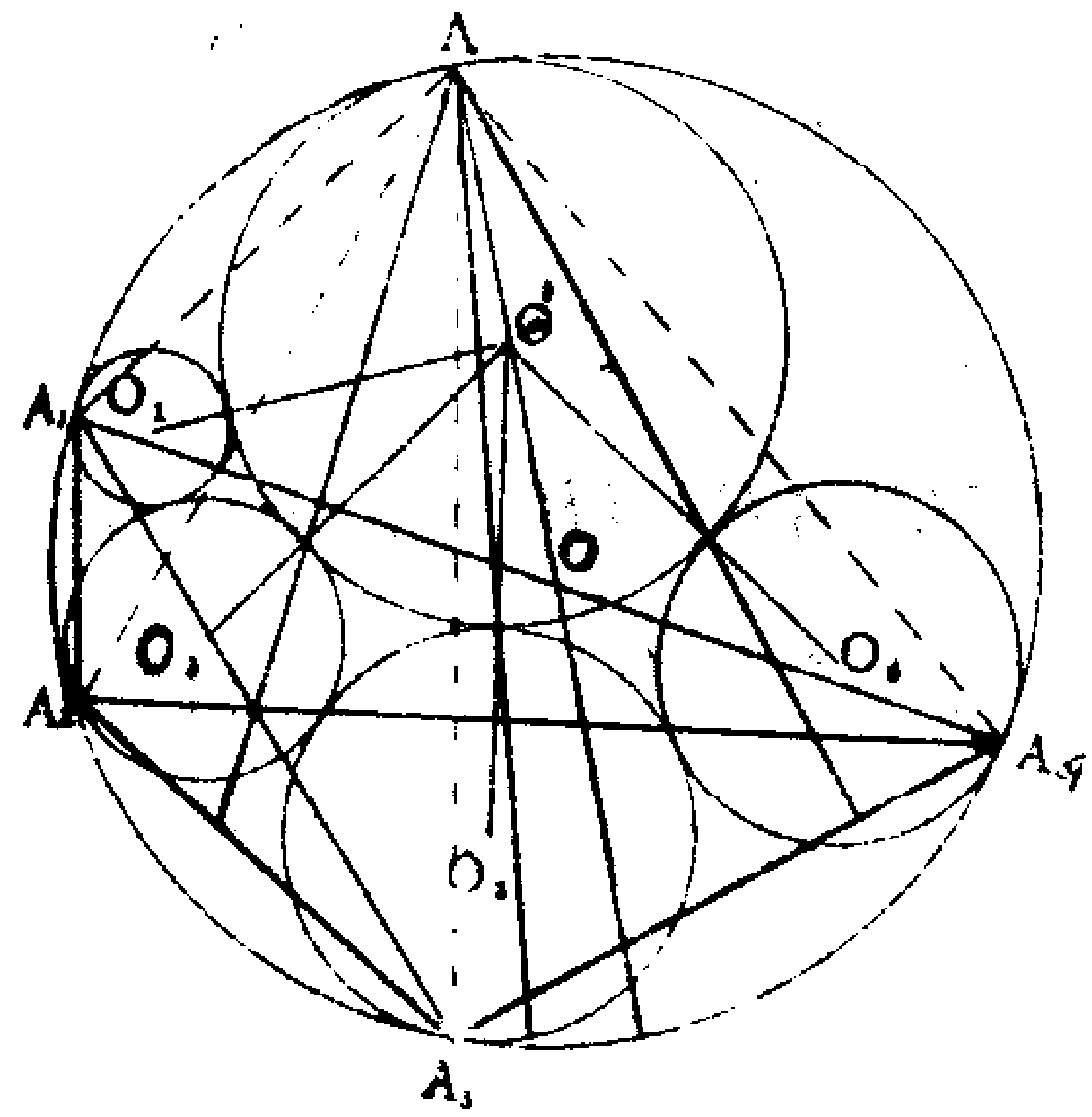
故 $MN = M'N' \cdot 2r/2r' = 4r(r - r')/(r + r')$。



图总—29

30。设在互相内切的两圆间隙中，挨次作四个内切圆。若所作四圆除首末二者外各挨次相外切，则：

$1/r_1-3/r_2+3/r_3-1/r_4=0$。式中$r_i$依次表所作四圆的半径。（周达定理）



图总—30

证明：应用例题54和28题于四边形$AA_1A_2A_3$，可得

$$A_1A_3=(AA_1\cdot A_2A_3+A_1A_2\cdot AA_3)/AA_2$$

$$=4r\sqrt{r_1\cdot r_3/(r-r_1)(r-r_3)}.$$

同理，得

$$A_2A_4=4r\sqrt{r_2r_4/(r-r_2)(r-r_4)},$$

$\therefore\quad A_1A_3/A_2A_4$

$$=\sqrt{r_1r_3(r-r_2)(r-r_4)/r_2r_4(r-r_1)(r-r_3)} \qquad ①$$

又应用例题54于四边形$AA_1A_3A_4$且利用上述结果得

$$A_1A_4=6r\sqrt{r_1r_4/(r-r_1)(r-r_4)}.$$

再对四边形$A_1A_2A_3A_4$应用习题十八第8题，以及上述结果得

$$A_1A_3/A_2A_4=(A_4A_1\cdot A_1A_2+A_2\cdot A_3\cdot A_3A_4)/(A_1A_2\cdot A_2A_3+A_3A_4\cdot A_4A_1)$$
$$=\{[3r_1/(r-r_1)+r_3/(r-r_3)]/[r_2/(r-r_2)+3r_4/(r-r_4)]\}$$
$$\cdot\sqrt{r_2r_4\cdot(r-r_1)(r-r_3)/r_1r_3(r-r_2)(r-r_4)}\qquad ②$$

由①、②得

$$[3r_1(r-r_3)+r_3(r-r_1)]/[r_2(r-r_4)+3r_4(r-r_2)]=1.$$

即　$r_2r_4(3r_1+r_3)=r_1r_3(r_2+3r_4)$,

故　$1/r_1-3/r_2+3/r_3-1/r_4=0$.

31. 设C是线段AB上的一点(如图)，以AB、BC、CA各为直径且在AB的同侧作半圆，则这三个半圆所围成的图形，叫鞋匠皮刀形。作$CD\perp AB$而交半圆$\overset{\frown}{AB}$于D；又作其他两个半圆$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{BC}$的外公切线EF，E、F是切点。求证：

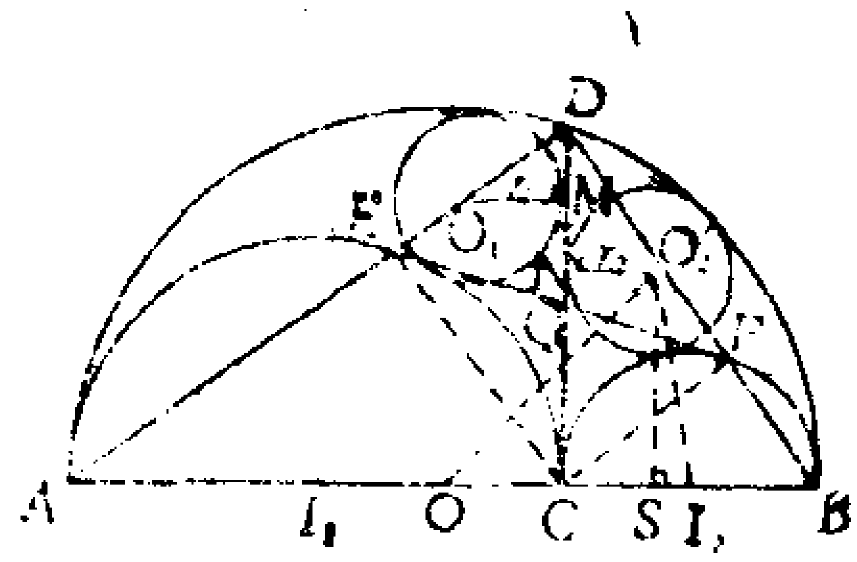
(1) C、D、E、F四点共圆，这圆与鞋匠皮刀形等积，

(2) A、E、D、三点及B、F、D三点共线；

(3) A、B、E、F四点共圆；

(4) CD分鞋匠皮刀形为两形，它们有相等的内切圆，

半径等于$BC\cdot CA/2AB$。



图总—31

证明(1)：设CD交EF于Q，则$QE=QC=QF$。

∵ $DC^2=CA\cdot CB$，

而 $EF^2=(CA/2+CB/2)^2-(CA/2-CB/2)^2$

$=CA\cdot CB$，

∴ $DC=EF$。因此 $QD=QE=QC=QF$，

故 C、D、E、F四点共圆且Q为圆心，所以这圆面积为$(CD/2)^2\pi=CD^2\pi/4$。

而鞋匠皮刀形的面积为：

$[(AB/2)^2\pi-(AC/2)^2\pi-(BC/2)^2\pi]/2$

$=\pi(AB^2-AC^2-BC^2)/8$

$=\pi\cdot AC\cdot BC/4$

$=CD^2\pi/4$。

(2)：∵ $\angle DEC=90°$，$\angle AEC=90°$，

∴ A、E、D共线。

同理，B、F、D共线。

(3)：∵ $\angle EAC+\angle EFB=\angle FEC+\angle EFB$

$=180°$，

∴ A、B、E、F四点共圆。

(4)：作$O_2S\perp AB$于S，则

$$O_2C^2-OS^2=O_2I_2{}^2-SI_2{}^2$$

令　$OA=r$　即

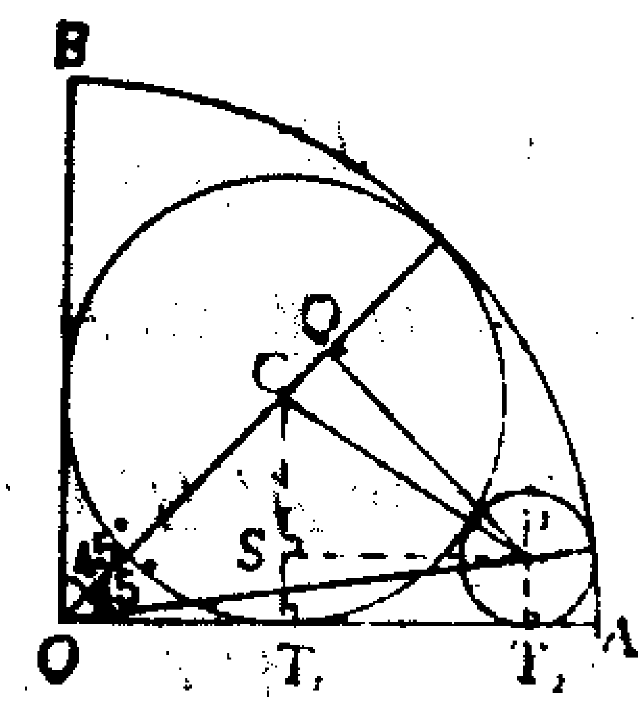
$$(r-r_2)^2-(r-BC+r_2)^2=$$

$$=(r_2+BC/2)^2-(BC/2-r_2)^2$$

由此得：$r_2=(2r-BC)/4r=BC\cdot CA/2AB$

同理得　$r_1=BC\cdot CA/2AB$。

32. 在直角扇形OAB中作内切圆$\odot C$，又在半径OA、弧$\widehat{AB}$、圆$\odot C$间的隙缝作内切圆$\odot P$，引$PQ\perp OC$于Q。求证$\triangle OPQ$是商高三角形。



图总—32

证明：如图，

令　$OA=1$，$PT_2=r$，

$T_1T_2=PS=x$，

$$\because\begin{cases}x^2=(\sqrt{2}-1+r)^2-(\sqrt{2}-1-r)^2 & ①\\(1-r)^2=(\sqrt{2}-1+x)^2+r^2 & ②\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}x=(6-2\sqrt{2})/7\\r=(\sqrt{50}-1)/49.\end{cases}$$

$\therefore$　$OP=(50-5\sqrt{2})(1-r)/49$，

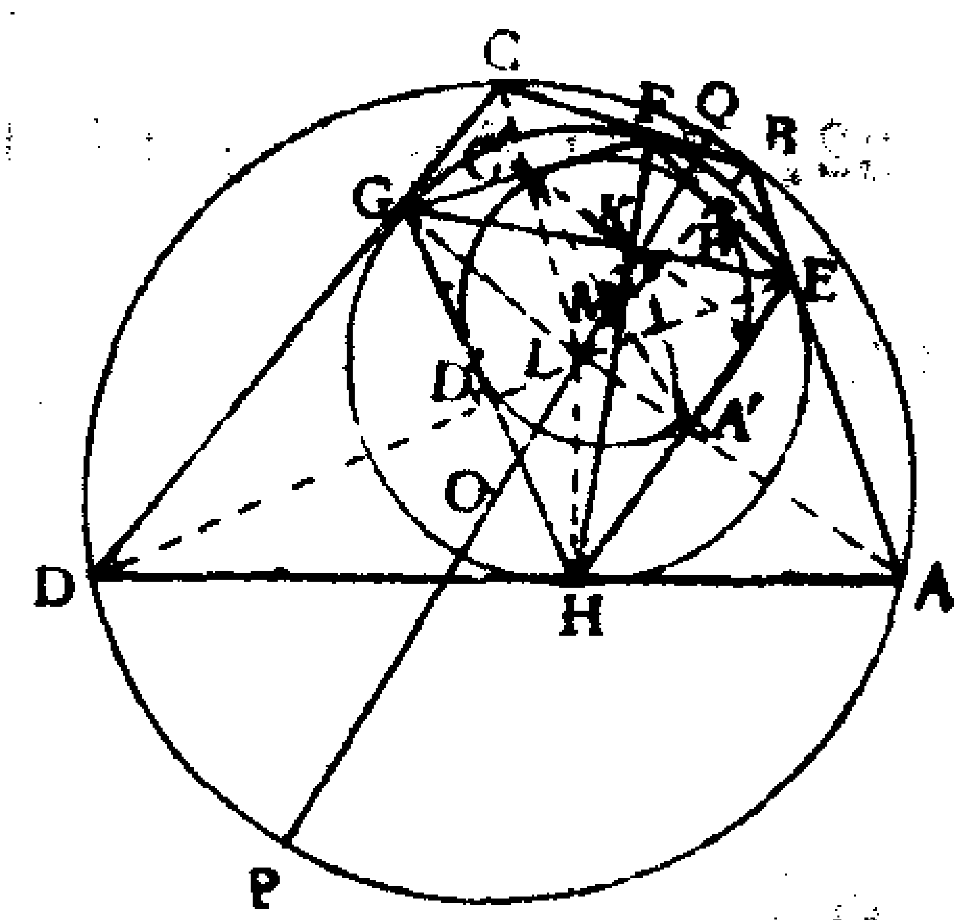
$PC=\sqrt{2}-1+r=(54\sqrt{2}-50)/49$, $OC=2-\sqrt{2}$,

$\therefore\quad CQ/OP=(OC^2+OP^2-PC^2)/2OC\cdot OP=4/5$。

故 $\triangle OPQ$为商高三角形。

33．设某四边形同时有外接圆$\odot O(R)$和内切圆 $\odot I(r)$，求证：$1/(R-d)^2+1/(R+d)^2=1/r^2$。式中 $d=|OI|$。

证明：如图，E、F、G、H为已知四边形各边切点，由§40例题28知：$EG\perp FH$于K，连结IA、HE、IB、EF、IC、FG、ID、GH，则其交点A'、B'、C'、D'分别为HE、EF、FG、GH的中点。由习题十六第32题知$A'B'C'D'$四点共圆且圆心在$A'C'$的中点M上。由于



图总—33

$$\overline{IA}\cdot\overline{IA'}=\overline{IB}\cdot\overline{IB'}=\overline{IC}\cdot\overline{IC'}=\overline{ID}\cdot\overline{ID'}=r^2$$

因此，I为$\odot O$和$\odot M$的反演中心，且M在直线OI上。设OI分别交$\odot O$和$\odot M$于P、Q、P'、Q'，则

$$IP\cdot\overline{IP'}=IQ\cdot\overline{IQ'}=r^2。$$

又连结KA'、KC'，据习题十第10题知M为□$IA'KC'$

的对角线交点，再由圆幂定理和中线长定理，知

$$IP'^2+IQ'^2=P'Q'^2-2\overline{IP'}\cdot\overline{IQ'}$$

$$=4MA'^2-2(MA'^2-IM^2)$$

$$=2MA'^2+2IM^2$$

$$=IA'^2+IC^2$$

$$=IA'^2+A'E^2\text{（§33、例7）}$$

$$r^2.$$

于是 $(r^2/IP)^2+(r^2/IQ)^2=r^2$。

故 $1/(R+d)^2+1/(R-d)^2=1/r^2$。

34. 设共线的六点A、A'、B、B'、C、C'适合关系：

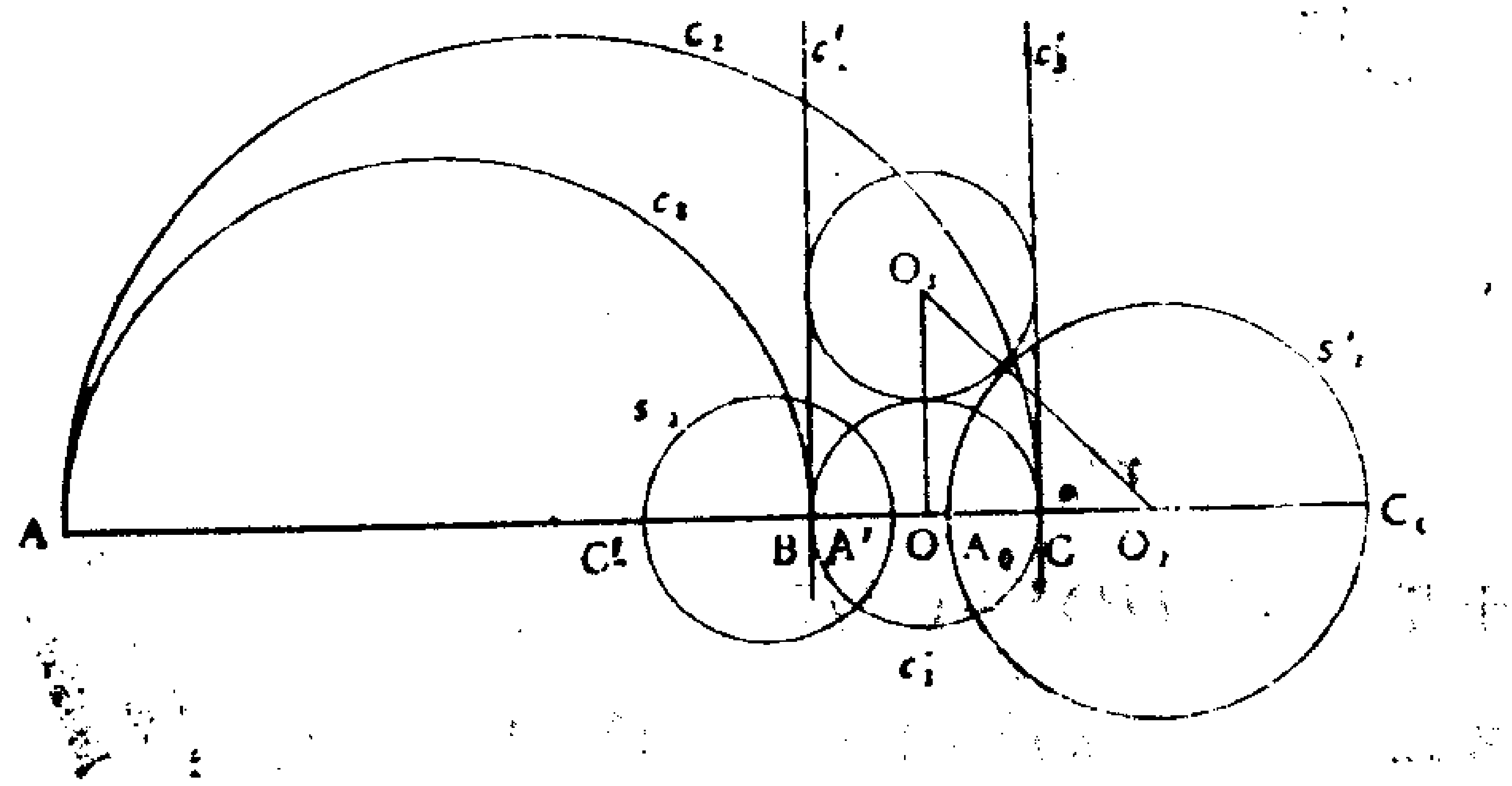
$$\overline{AB}/\overline{AC}:\overline{A'B}/\overline{A'C}=\overline{BC}/\overline{BA}:\overline{B'C}/\overline{B'A}=$$

$$=\overline{CA}/\overline{CB}:\overline{C'A}/\overline{C'B},$$

则直径各为BC、CA、AB、$B'C'$、$C'A'$、$A'B'$的六个圆必有两个公切圆。

证明：（1），令BC、CA、AB为直径所作的圆为c_1、c_2、c_3且BC的中点为O。作以A为反演中心，$\overline{AB}\cdot\overline{AC}$为反演幂的反演变换。则圆$c_1$不变。$c_2$、$c_3$变成直线$c_2'$、$c_3'$。$A'$、$C'$变成$A_0$、$C_0$。且以$A'C'$为直径的圆$s_2$、变成以$A_0C_0$为直径的圆$s_2'$。（其圆心为$O_2$。）

作$\odot O_1$，使它与c_1、c_2'、c_3'均相切，以下将证明$\odot O_1$，与圆s_2'也相切。



图总—34 (a)

(2)，由$AC' \cdot AC_0 = AB \cdot AC, AA' \cdot AA_0 = AB \cdot AC$，

有$AC_0 = AB \cdot AC / AC'$，$AA_0 = AB \cdot AC / AA'$。

令 $\overline{AB}/\overline{AC} : \overline{A'B}/\overline{A'C} = \overline{CA}/\overline{CB} : \overline{C'A}/\overline{C'B} = k$，

由合比可得：

$\overline{AC'} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} / (k \cdot \overline{CB} - \overline{CA})$，

$\overline{AA'} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}(k-1)/(k \cdot \overline{AC} - \overline{AB})$。

(3)令$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径为r_1、r_2，

$\because$ $(r_1+r_2)^2 - OO_2{}^2 = (|BC|/2 - |A_0C_0|/2)^2$

$-(AO_2 - AO)^2$

$= (|AC - AB|/2 + |AC_0 - AA_0|/2)^2 -$

$-[(\overline{AC}_0+\overline{AA}_0)/2-(\overline{AC}+\overline{AB})/2]^2$

$=(\overline{AC}_0-\overline{AB})(\overline{AC}-\overline{AA}_0)$

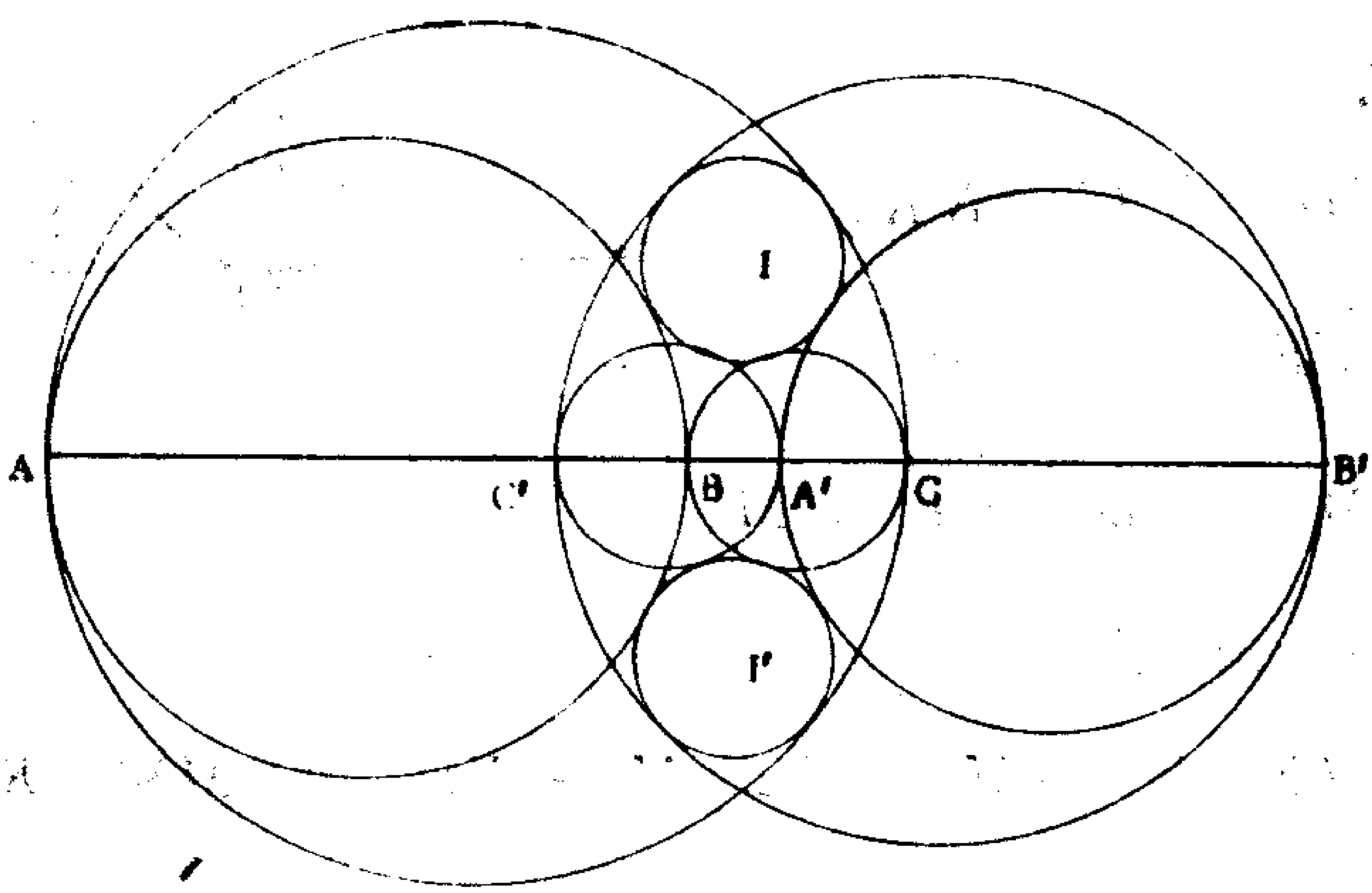
$=(\overline{AB}\cdot\overline{AC}/\overline{AC'}-\overline{AB})(\overline{AC}-\overline{AB}\cdot\overline{AC}/\overline{AA'})$

$=(k\cdot\overline{CB}-\overline{CA}-\overline{AB})[\overline{AC}-(k\cdot\overline{AC}-\overline{AB})/(k-1)]$

$=BC^2=OO_1^2$,

∴ $\odot O_1$与$\odot O_2$相切。

若在所述变换中，B'变成B_0，且以$A'B'$、$B'C'$为直径的圆s_3、s_1变成以A_0B_0、B_0C_0为直径的圆s_3'、s_1'. 由同理可得 $\odot O_1$与s_3'、s_1'也相切。即六 圆c_1、c_2'、c_3'、s_1'、s_2'、s_3'有公切圆$\odot O_1$。



图总—34 (*b*)

(4) ∴ 圆c_1、c_2、c_3、s_1、s_2、s_3与圆c_1、c_2'、

c_3'、s_1'、s_2'、s_3'互为反象。由定理181，六圆c_1、c_2、c_3、s_1、s_2、s_3有公切圆，其图如34(b)。$\odot I$与$\odot I'$为六圆的两公切圆。

35。设O是$\triangle ABC$的外心，连线AO、BO、CO分别交BC、CA、AB于X、Y、Z。求证直径为AX、BY、CZ的圆同切于$\triangle ABC$的九点圆。

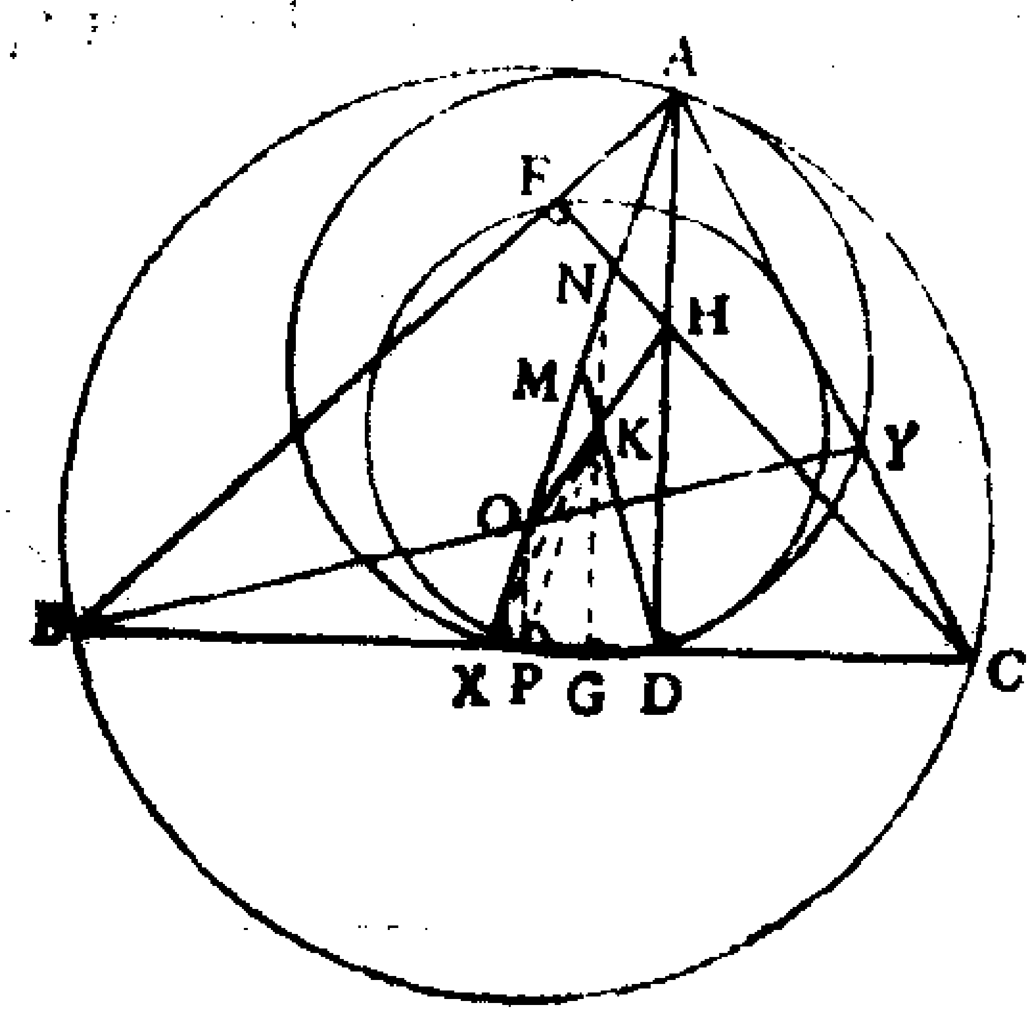
证明：由例题44知$\triangle ABC$的九点圆心K在OH的中点且D在$\odot K$上也在以AX为直径的圆上。

作$OP\perp BC$、$KG\perp BC$且交AX于N。连DK设交AX于N。

有 $OP=AH/2=NK$，

$\therefore$ $KP\parallel AX$，故有

$MX=MD=MA$。即M为AX的中点。



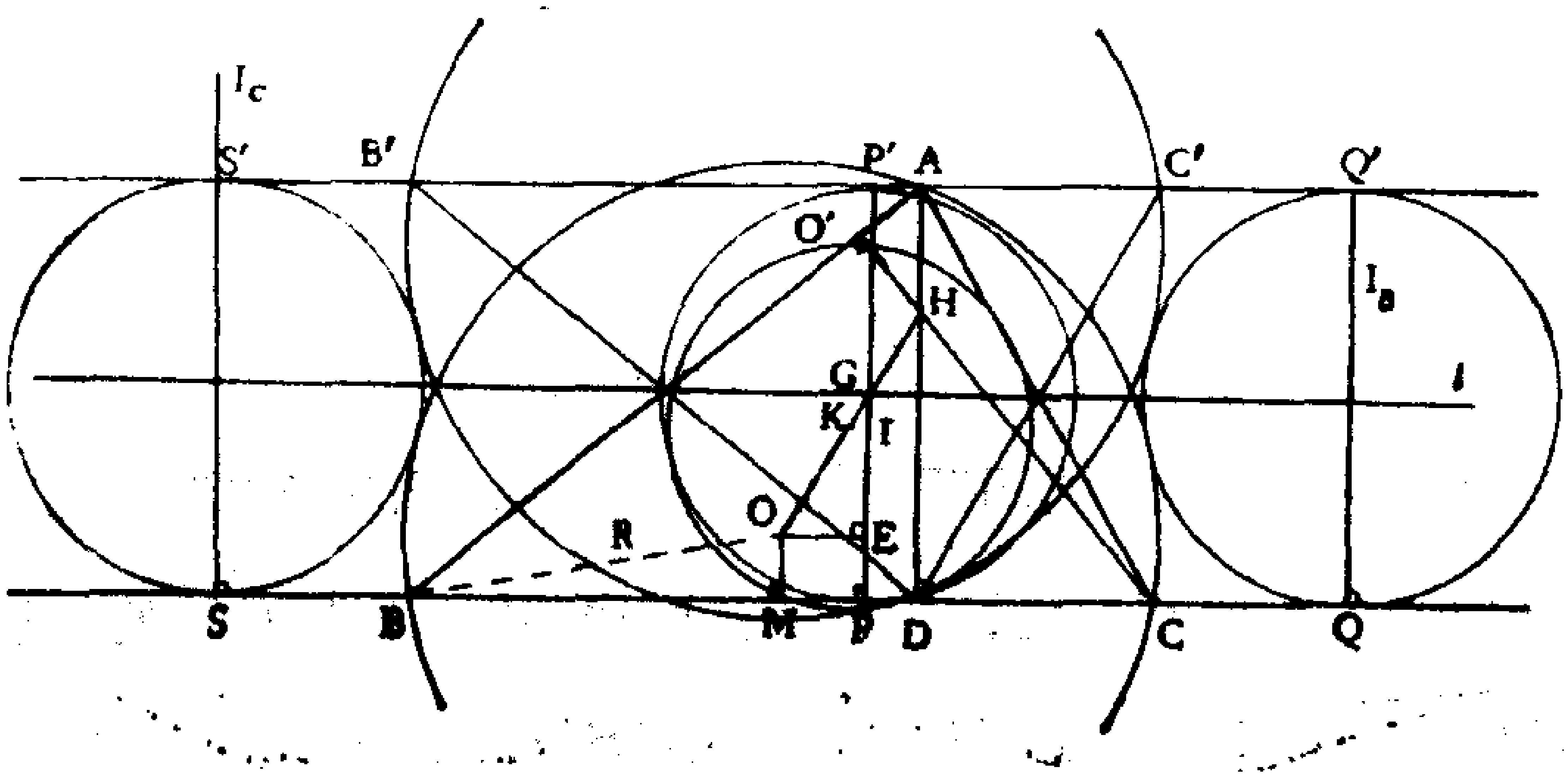
图总—35

$\therefore$ $MK=MN=MA-NA=MD-KD$。故$\odot M$和$\odot K$相切于D。

同理有以BY、CZ为直径的圆亦与$\odot K$相切。

36. 设分别过三角形的内心、旁心作每边的垂线而为该边及过对顶点的平行线所限。以所限线段为直径作圆，共得十二圆。求证这十二圆(1)同切于三角形的外接圆；

(2)可分为三组：切于同边的四圆为一组，每组圆又各有一公切圆，这三个公切圆同与三角形的九点圆相切。



图总—36

证明：(1)令H为垂心、$AD=h$。$\odot O(R)$、$\odot K(R/2)$为$\triangle ABC$的外接圆与九点圆。$\odot G$为以PP'为直径的圆，作$OE\perp PP'$于E。则有

$$OG^2=OE^2+GE^2=MP^2+(h/2-OM)^2=MP^2+$$

$$+h^2/4+OM^2-h\cdot OM \qquad ①$$

$\because$ $MP^2=(s-b-a/2)^2=[(c-b)/2]^2$ ②

$OM^2=R^2-a^2/4$ ③

$h\cdot OM=h\cdot AH/2=(\overline{AH}+\overline{HD})\cdot AH/2$

$=(AH^2-\overline{HA}\cdot HD)/2$

由习题十八第22题，有

$HA\cdot HD=4R^2-(a^2+b^2+c^2)/2$ ④

②－④代入①得

$OG^2=(c-b)^2/4+h^2/4+R^2-a^2/4-[4\cdot OM^2-4R^2+(a^2+b^2+c^2)/2]/2=h^2/4+R^2-bc/2$,

由习题四第11题，$bc=2Rh$,

∴ $OG^2=(R-h/2)^2$,

故 $OG=R-h/2$，得⊙G与⊙O相切。

(2) 切于同边的四圆，其圆心共线于AD的中垂线l上，由(1)知，它们有共切圆⊙O。在直线AP'上作BC的射影$B'C'$。由习题十六第2题知，⊙$DB'C'$的圆心O'必在△ABC的九点圆⊙K上，因为$O'K=R/2$，而⊙O'的半径为R。故⊙$O'(R)$必与⊙$K(R/2)$相切。

37．设O是△ABC的外心，⊙OBC交AB、AC于A'、A''，⊙OCA交BC、BA于B'、B''，⊙OAB交CA、CB于C'、C''。连$A'A''$、$B'B''$、$C'C''$交成一三角形，求证这三角形的外接圆与⊙ABC相切。

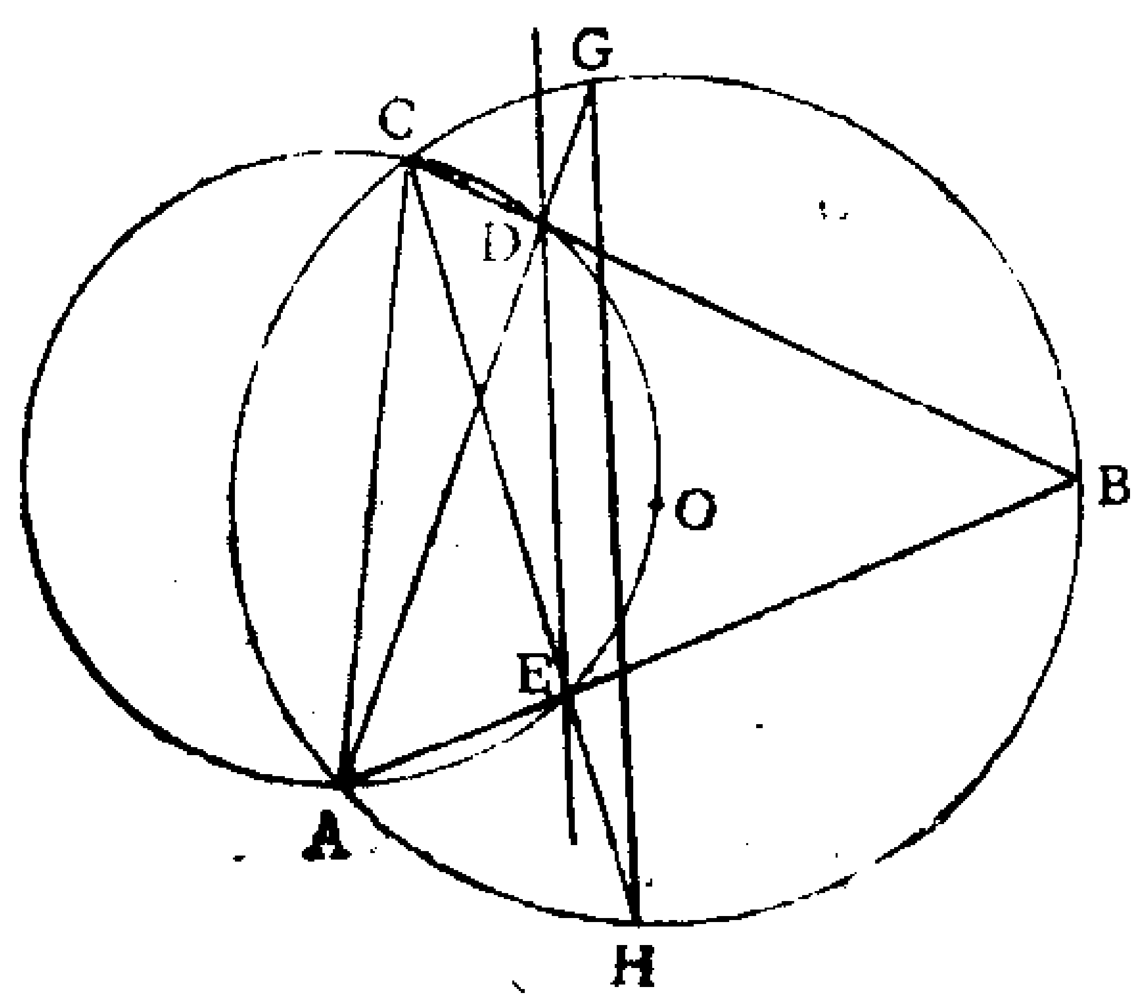
证：

引理1． 设⊙O是⊙ABC，⊙OAC交BC于另点D、

交AB于另点E，又直线AD、CE与$\odot O$交于G、H，那么$GH \parallel DE$。

证明简单，此略。

引理2．承上设，AL、CM为$\odot O$的切线L、M均在DE上。则LH、MG、$\odot O$共点。



图总—37（a）

证：如图(b)，设P为MG与$\odot O$的交点。

$\because$ $\angle MCD=\angle CAE$，$\angle MDC=\angle CAE$，

$\therefore MC=MD$，$\therefore$ $MD^2=MC^2=MG\cdot MP$，

有 MD切$\odot DGP$，$\therefore$ $\angle DGP=\angle PDE$，

$\because$ $\angle DGP+\angle ABP=180°$，

$\therefore$ $\angle PDE+\angle ABP=180°$，

故 P是$\odot BDE$与$\odot O$的交点。

同理可证$\angle H$也经过P。

下面证原题，如图(c)设，

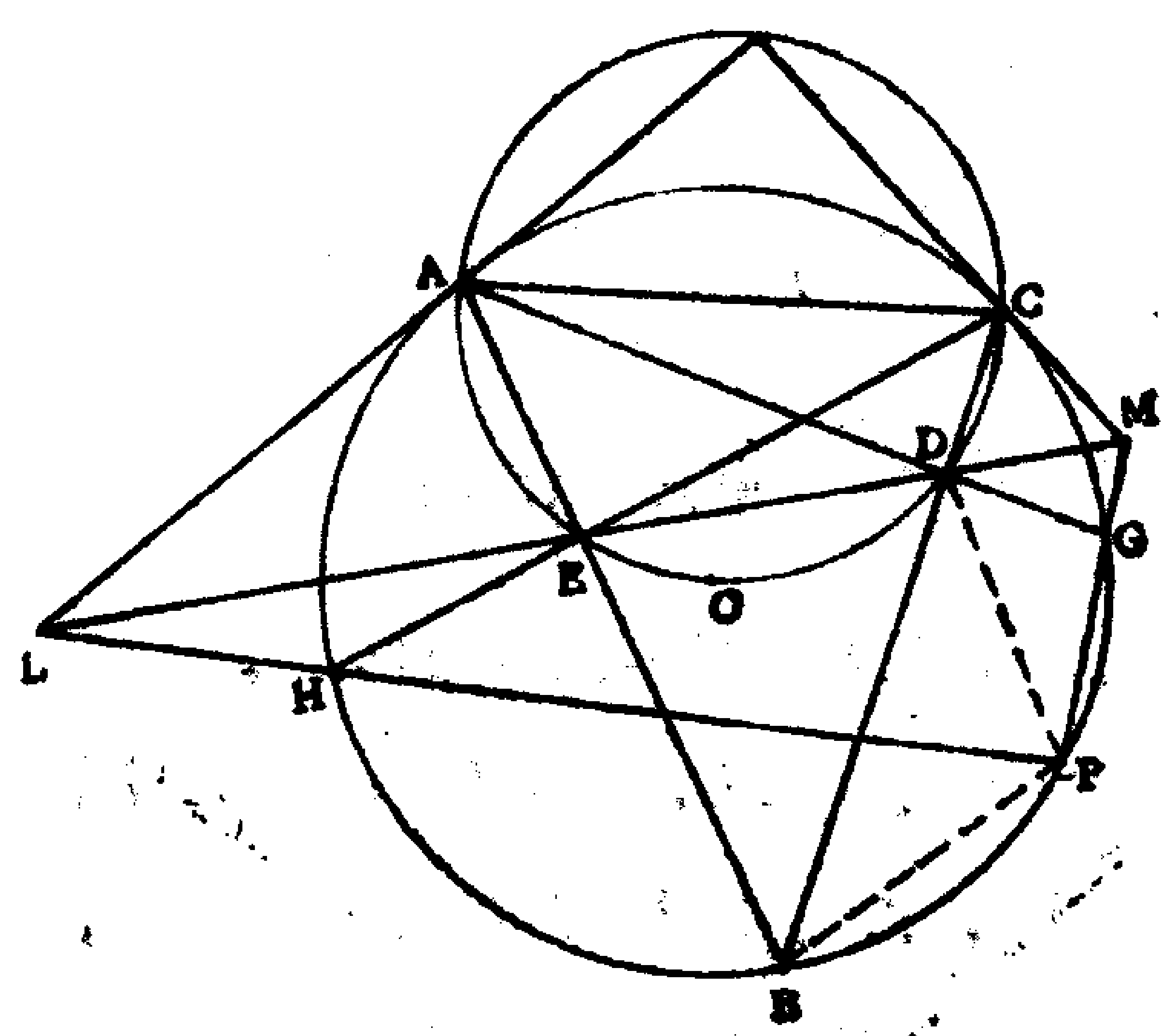
$\because$ O、A、C、B'、B''共圆，

$\therefore$ $\angle OB'B=\angle OCA=(180-\angle AOC)/2$

$=90°-\angle B$

$\therefore$ $\angle OB'B+\angle B=90°$，有 $B'O\perp BC$

$\therefore$ B'在BC边的中垂线上.同理B''、A'、……在AB、AC、……的中垂线上。



图总—37 (b)

$\therefore$ $\angle C'B'D'=\angle B''B'B-\angle OB'B$

$=\angle C-\angle OCA=90°-\angle A$。

∵　$\angle B'D'C'' = 180° - \angle D'B''C'' - \angle D'C''B''$

$= 180° - 2\angle A$

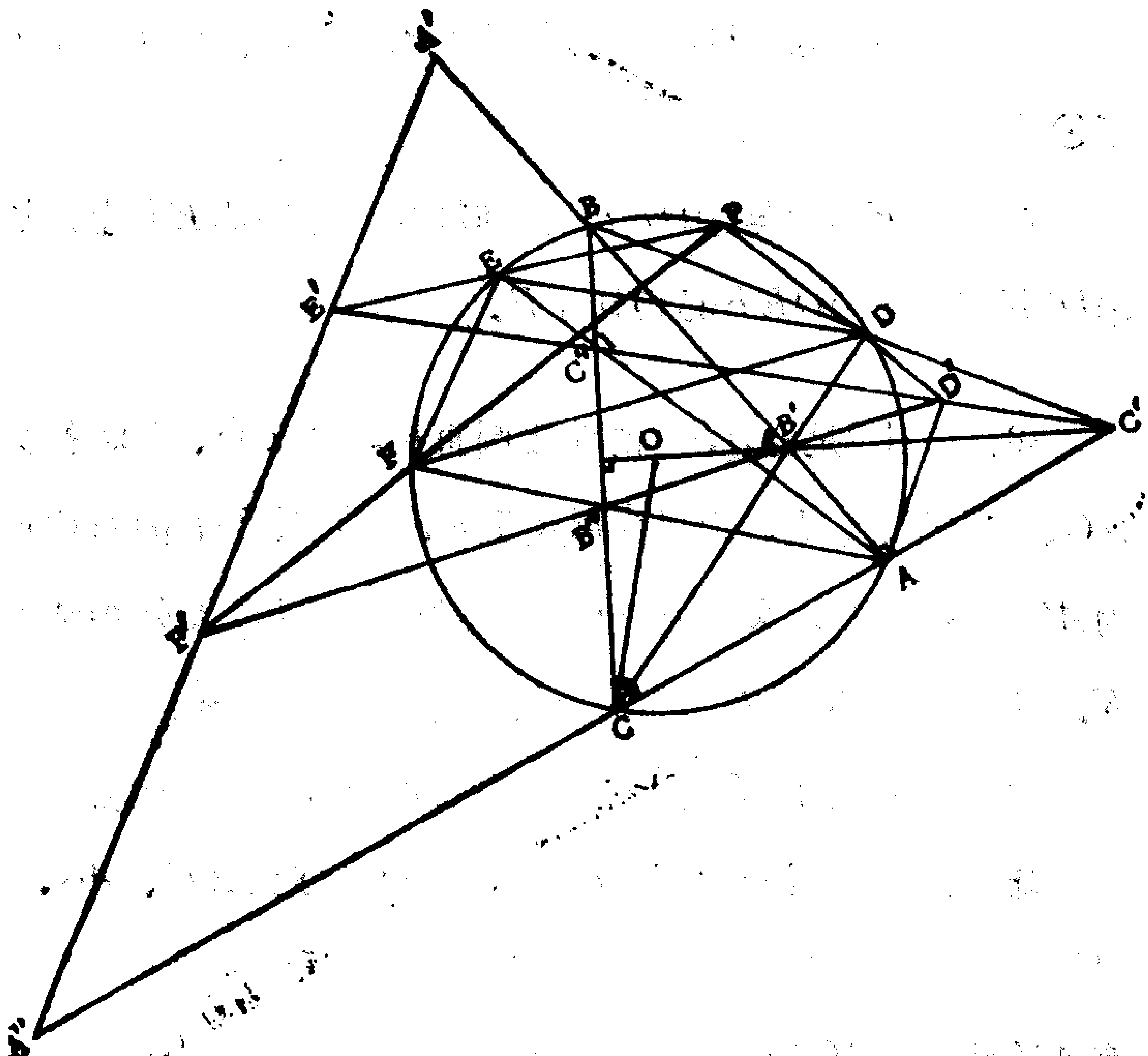
（O、A、B、C'、C''共圆）

∴　$\angle B'C'D' = 90° - \angle A$，$D'B' = D'C'$。

∵　$360° - \angle B'D'C' = 360° - (180° - \angle B'D'C'')$

$= 360° - (180° - 180° + 2\angle A)$

$= 2(180° - \angle A) = 2\angle B'AC'$



图总—37（c）

∴　D'为$\triangle AB'C'$的外心。

有　$D'A=D'B'$，

∴　$\angle D'AB'=\angle D'B'A=\angle C$，

$D'A$切$\odot O$于A，同理，$E'B$、$F'C$也切$\odot O$。

设CB'、AB''、AC''交$\odot O$于D、F、E。

∵　B'、C'均在BC中垂线上，

∴　D必在BC'上。

由引理1、2可知

$\triangle D'E'F'$与$\triangle DEF$位似且$D'D$、$E'E$、$F'F$共点P在$\odot O$上。

即$\odot D'E'F'$与$\odot DEF$的位似中心P在$\odot DEF$上。故$\odot D'E'F'$与$\odot DEF$必相切于P。

38. 设AD是$\triangle ABC$的外接圆直径。连BD、CD各交AC、AB于E、F，命A分别关于EF、DE、DF的对称点为A'、B'、C'，又设$\triangle ABC$的倍位中线AK交外接圆于K。求证A'、B'、C'、D、E、F、K七点共圆。

这圆叫做$\triangle ABC$的七点圆。一三角形可有三个七点圆。

证明：作平行四边形$AFGE$，其对角线为EF、AG。因B、C、E、F四点共圆。故BC与EF互为逆平行线，且有AM是$\triangle ABC$的陪位中线。于是有

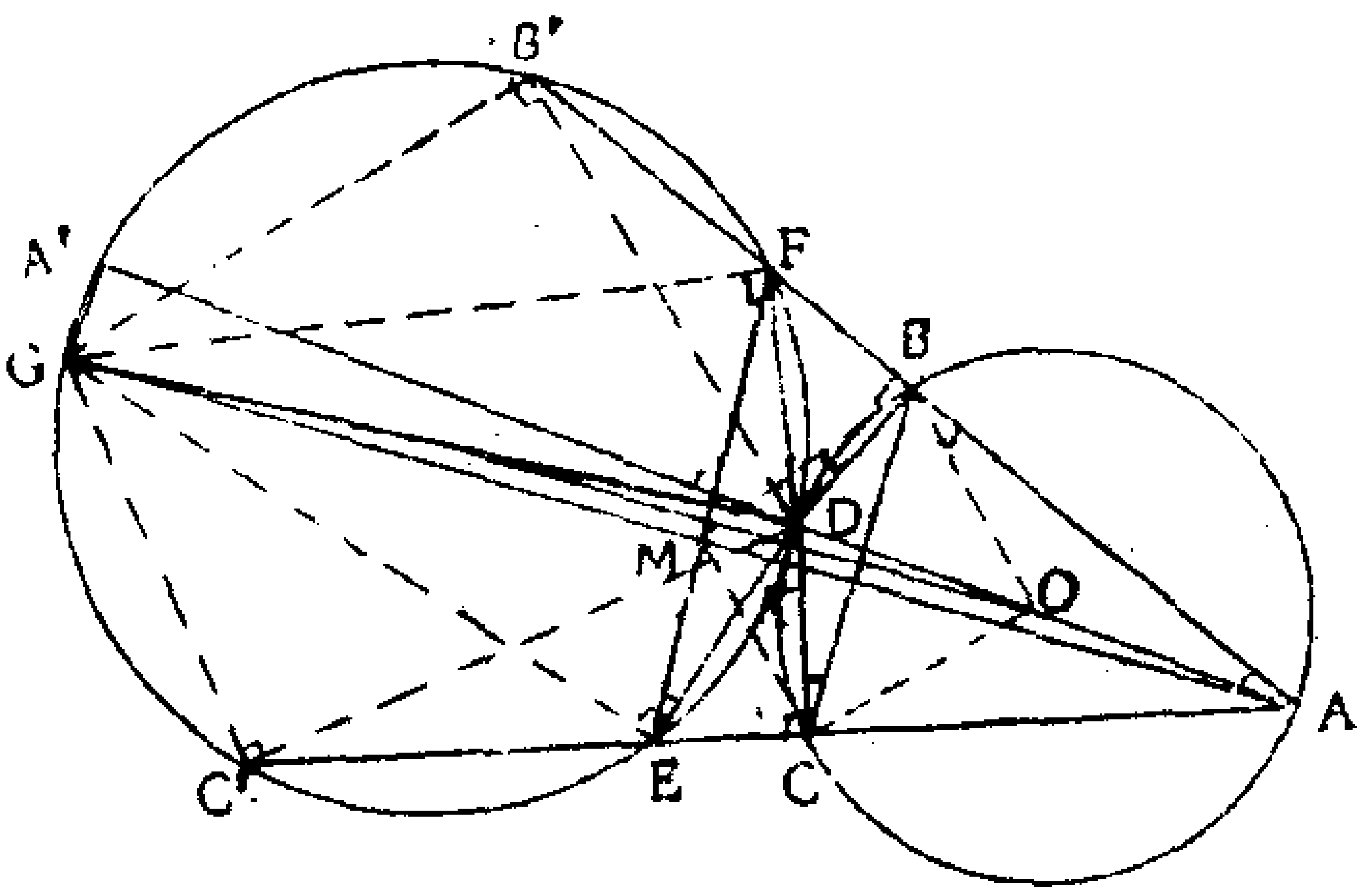
$GE\perp DE$、$GF\perp DF$、$GA'\perp AA'$、$GA\perp DK$。

∴ E、F、A'、K在以DG为直径的圆上。

∵ $GB' /\!/ MB$、$B'D /\!/ BO$、$MB=ME$

且 $\angle MBE=\angle MEB=\angle FCB=\angle DAB=\angle OBA$

∴ $\angle DB'G=\angle OBM=90°$。同理$\angle D'C'G=90°$。



图总—38

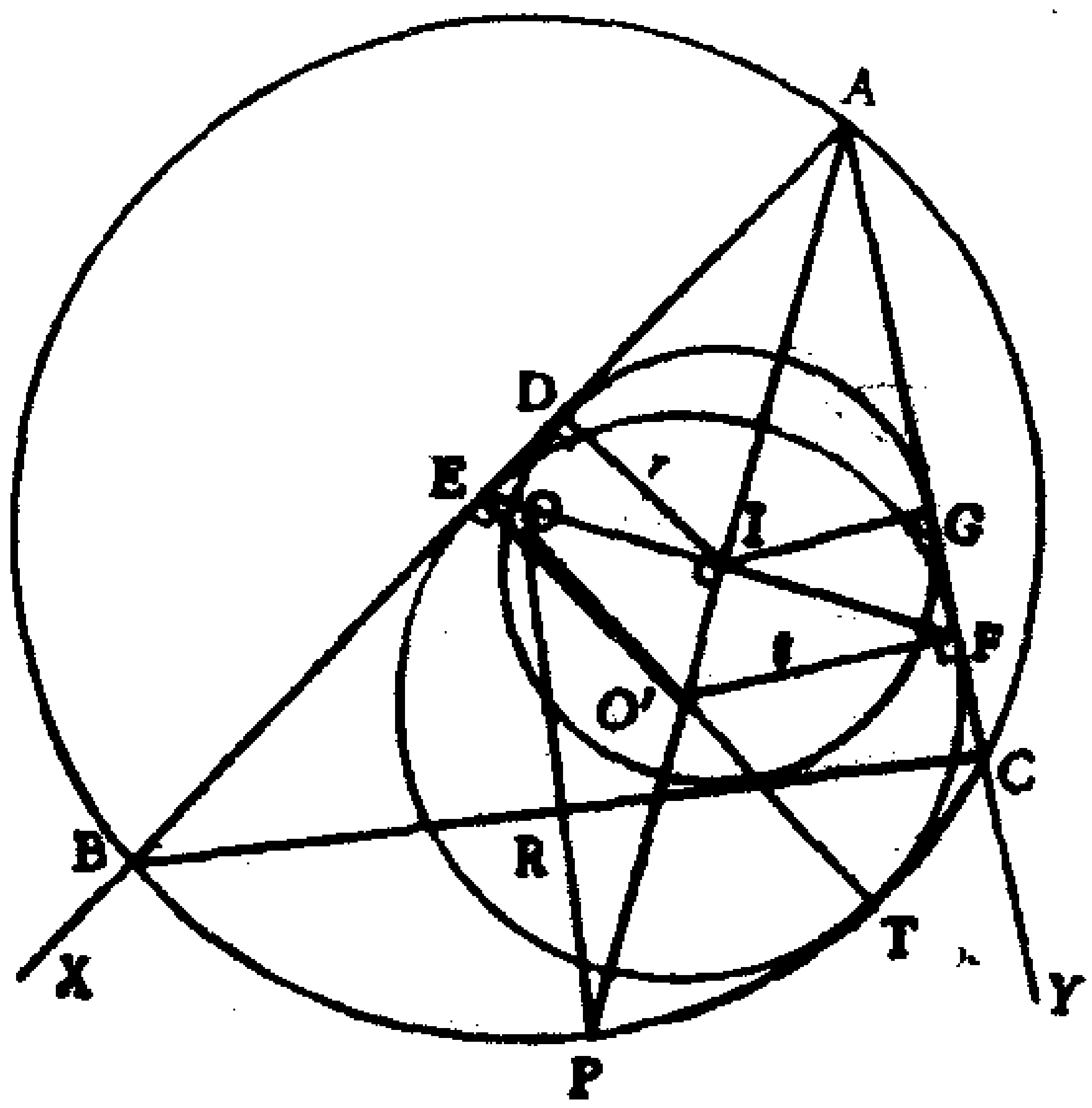
39. 设A是定圆$\odot I$外的定点，过A作$\odot I$的切线AX、AY，又任意作切线交AX、AY于B、C。则$\triangle ABC$的外接圆常切于某一定圆。（Manheim定理）

证明： 作$EF\perp AI$交AX、AY于E、F，过E、F作AX、AY的垂线其交点O'在AI上。过E、F作$\odot O'(t)$则$\odot O'$为定圆。

由$\triangle AID\backsim\triangle AO'E\backsim\triangle EO'I$、定理127及例题55有：

$$OO'^2=R^2-O'P\cdot O'A=R^2-(IP-IO')O'A$$
$$=R^2-IP\cdot O'A+IO'\cdot O'A=R^2-IP\cdot IA\cdot t/r+t^2$$
$$=R^2-2Rr\cdot t/r+t^2=(R-t)^2$$

故　⊙O与⊙O'相切。

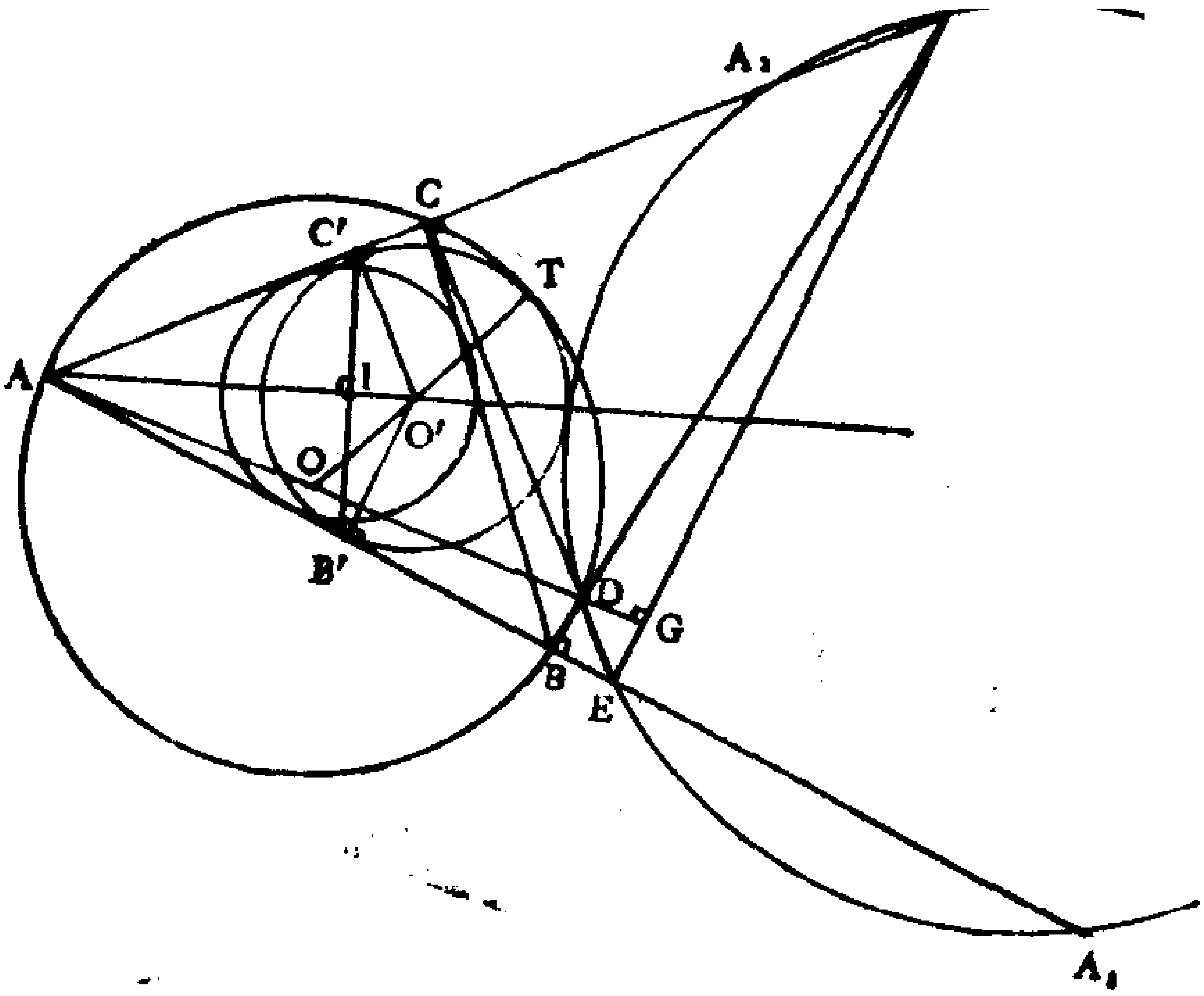


图总—39

40。设I是$\triangle ABC$的内心或旁心，过I且垂直于IA作直线交AB、AC于B'、C'，余类推。以$B'C'$为弦作圆使切于AB及AC，余类推。这样共得十二圆。求证这十二圆

(1)同切于$\triangle ABC$的外接圆；

(2)可分为三组：同切于两边（所在直线）的四圆为一组，每组圆又分别以$\triangle ABC$的三个七点圆为公切圆。



图总—40

证明(1)：同上题。

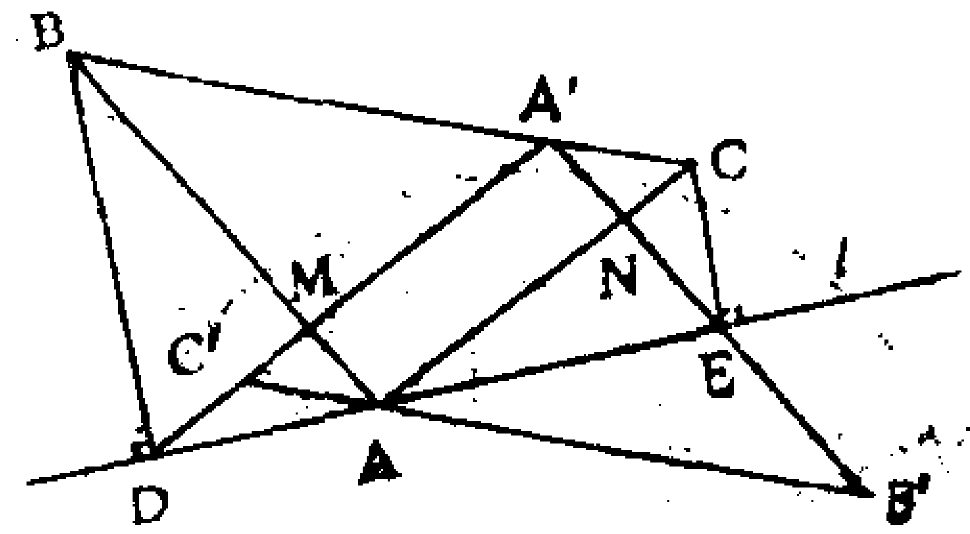
(2)：由38题知：⊙DEF为△ABC的七点圆．且有$AB\cdot AE=AG\cdot AD=AC\cdot AF$．而⊙$BGC$即△$AEF$的九圆。

在以A为反演中心，$AB\cdot AE$为反演幂的反演变换下，⊙DEF与⊙BGC互为反象，由复习题三第21题知，⊙BGC切于△AEF的内切圆．由于在上述变换下，⊙O'的反象就是△AEF的内切圆，由定理181知⊙O'与⊙DEF相切。

41．设自三角形的顶点至某直线引垂线，又过各垂足分

别引对边的平行线，则后三线交成的三角形与原三角形合同.

证明：过A作直线l.则三顶点在l上的垂足为A、D、E，且有$AB \parallel A'B'$，$CA \parallel C'A'$，若DM、BN的交点A'在BC上，则有$BC \parallel B'C'$.



图总—41

由D$M/AN = AM/EN$，D$M/CN = BM/EN$

有 $AM/BM = CN/AN$.

设DM交BC于A''，连结NA''.

$\because$ $\triangle BMA'' \backsim \triangle BAC$. 有$AM/BM = CA''/BA''$,

$\therefore$ $CN/AN = CA''/BA''$.

因而 $NA'' \parallel AB$，故 A'在BC上.

42、在上题中，若某直线通过原三角形的外心，则所得三角形的

(1) 外接圆内切于原三角形的九点圆；

(2) 九点圆内切于原三角形的外接圆.

证(1)：如图设，O_1为$\triangle ABC$中点$\triangle A_1B_1C_1$的外心，过A作BC的平行线交A_1B_1、A_1C_1于B_0、C_0，则A为B_0C_0的中点. 设$B'C'$交$\odot O_A$（以OA为直径）于A_1'. 因$\odot O_A \cong$

$\odot O_1$，故在$\odot O'$上存在一点O'使$A_1'O' \perp\!\!\!\!= O_AO_1$，而$O_AO_1$
$\perp\!\!\!\!= AH/2 \perp\!\!\!\!= OA_1$

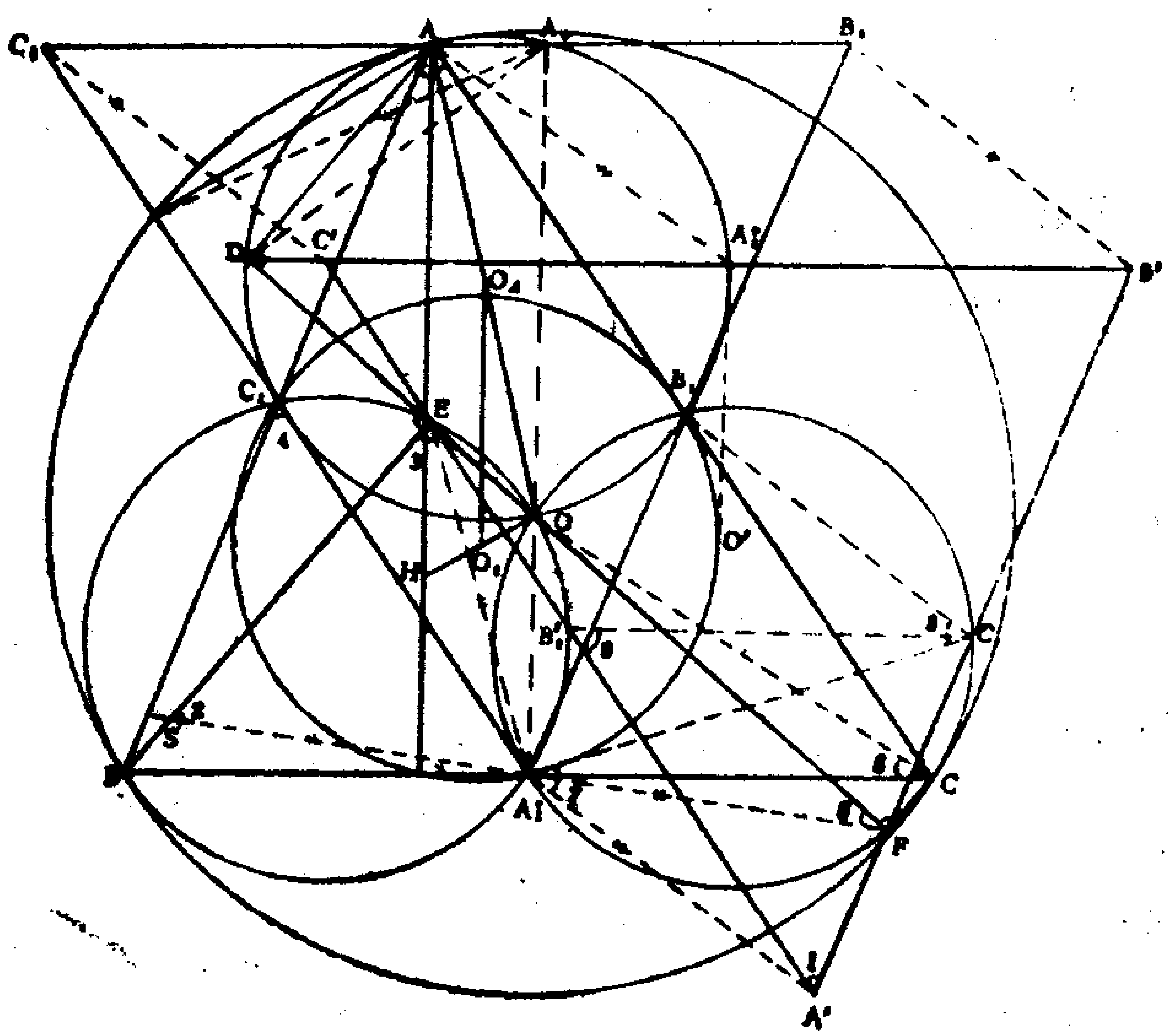
$\therefore$ $O'A_1' \perp B'C'$且$O'A_1' = OA_1$ ……………①

由等圆等周角的弦相等，得$AA_1' = A_1E = A_1F$。延长FA_1交BE于S。$\angle FES = 90°$，$A_1F = A_1E$，

$\therefore$ A_1为SF中点。

有 $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4$（$B$、$A$、$O$、$E$、$C_1$共圆）

$\therefore$ $\angle 2 = \angle A = \angle 1$。



图总—42

故 S、A'、F、E共圆且A_1为圆心。

$\therefore\ A_1A' = A'F,\ AA_1' = A_1A' = B_0B' = C_0C'$,

$\therefore\ AA_1' \parallel B_0B'$.

$\because\ A$为B_0C_0中点，$\therefore\ A_1'$为$B'C'$中点…………②

由 ①、②可知O'为$\triangle A'B'C'$外心（$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$）

$\therefore\ \odot O_1$与$\odot O'$（即$\odot A'B'C'$）内切。

（2）：如图设，因$\angle 7 = \angle 8 = \angle C = \angle C' = \angle 9$，得$\angle 7 = \angle 9$，$\therefore A_1$、$A'$、$C_1'$、$B_1'$共圆，即$A_1$在$\odot A'B_1'C_1'$上。

$\because\ \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，

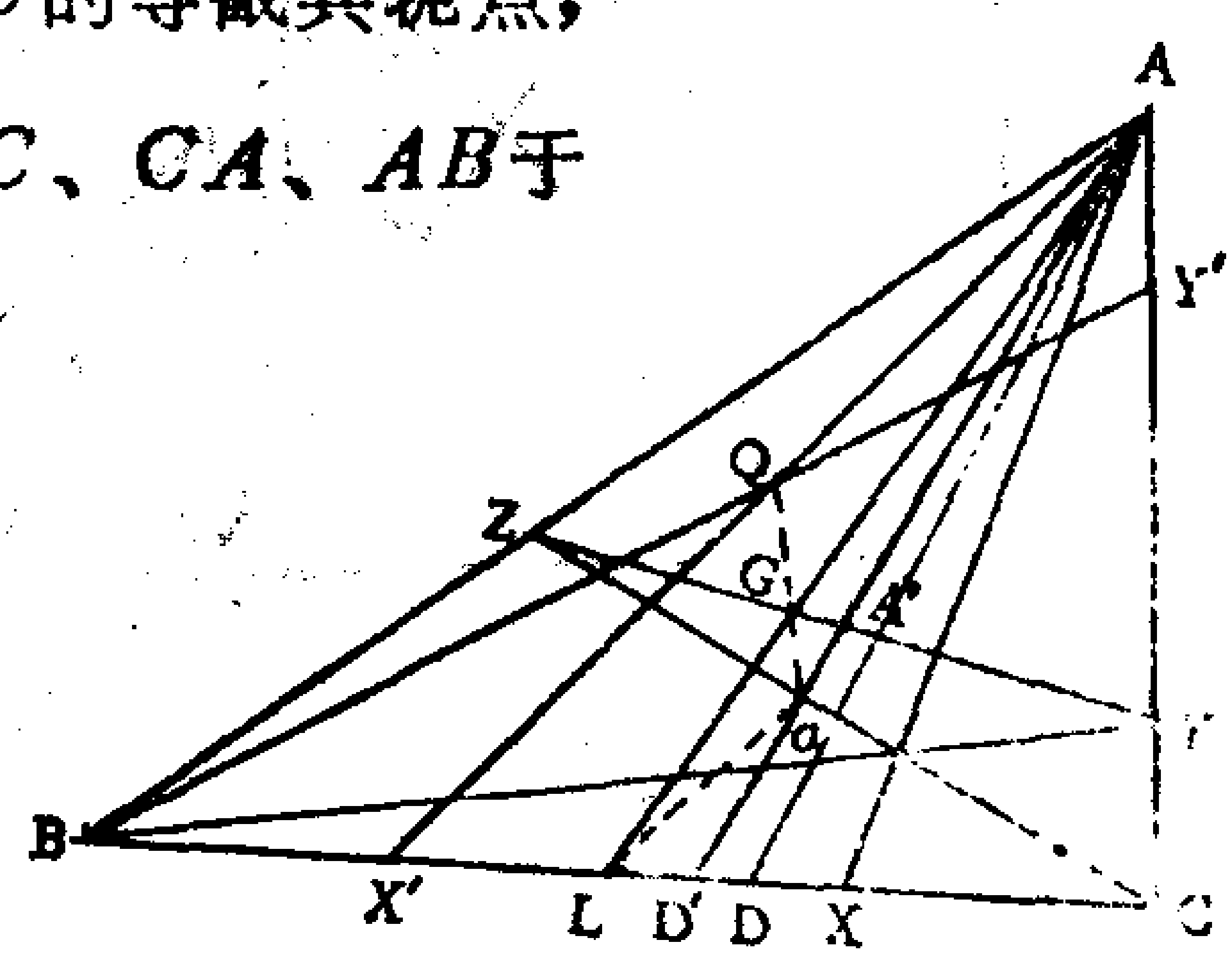
$\therefore$将$\odot A'B_1'C_1'$按HA向上平移A_1O，就与$\triangle A'B'C'$九点圆重合，随之A_1就变到O且在$\triangle A'B'C'$九点圆上。

故$\odot O$与$\triangle A'B'C'$内切。

43. 设P、Q是$\triangle ABC$的等截共轭点，连AP、BP、CP各交BC、CA、AB于X、Y、Z。命YZ、ZX、XY的中点各为A'、B'、C'，$\triangle ABC$的重心为G，求证：

（1）AA'、BB'、CC'三线会于一点O；

（2）O、G、Q三点共线，且$\overline{QG} = \overline{GO}/2$。



图总—43

证：延长QG至O使$GO=QG/2$

$\therefore\ D'L/D'X'=OL/AX'=(AQ/2)/AX'$

$=AQ/2AX'$，

$\therefore\ D'L/LX'=AQ/(2AX'-AQ)$，

$D'L=LX'\cdot AQ/(2AX'-AQ)$

$=LX/(2AX'/AQ-1)$

$=[(XB-XC)/2]/2[(AQ+QX')/AQ-1]$

$=(XB-XC)/2(2QX'/AQ+1)$。

又 $(QX'/QA)\cdot(Y'A/Y'C)\cdot(BC/BX')=1$

$\therefore\ QX'/QA=Y'C\cdot X'B/Y'A\cdot BC$

$=YA\cdot XC/YC\cdot BC$。

$\therefore\ D'L=(XB-XC)/(4YA\cdot YC/YC\cdot BC+2)$

$=YC\cdot BC(XB-XC)/2(2YA\cdot YC+YC\cdot BC)$。

$DB/DC=YA\cdot AB/AC\cdot AZ$

$\therefore\ (DB-DC)/(DB+DC)$

$=(YA\cdot AB-AC\cdot AZ)/(YA\cdot AB+AC\cdot AZ)$

$\therefore\ 2DL/BC$

$=(YA\cdot AB-AC\cdot AZ)/(YA\cdot AB+AC\cdot AZ)$

$\therefore\ 2DL=BC\cdot[YA(1+ZB/AZ)-AC]/[YA\cdot$

$\cdot(1+ZB/AZ)+AC]$

又 $(ZB/ZA)\cdot(YA/YC)\cdot(XC/XB)=1$

$$\therefore\ 2DL=BC\frac{YA(1+YC\cdot XB/YA\cdot XC)-AC}{YA(1+YC\cdot XB/YA\cdot XC)+AC}$$

$$=BC\frac{YA\cdot XC+YC\cdot XB-AC\cdot XC}{YA\cdot XC+YC\cdot XB+AC\cdot XC}$$

$$=BC\frac{YC(XB-XC)}{2YA\cdot XC+YC\cdot BC}$$

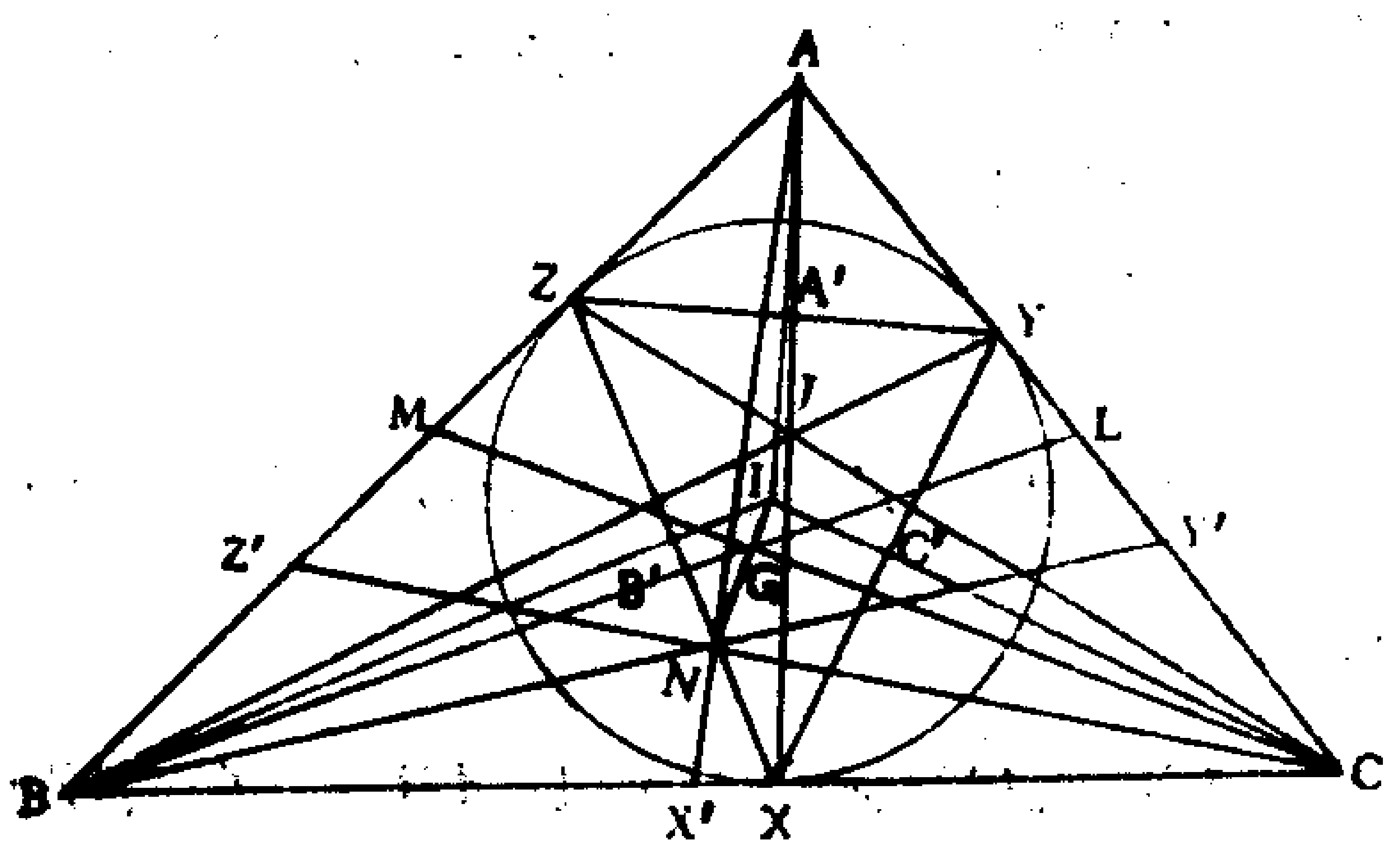
$\therefore$ $D'L=DL$（以上皆为有向线段）

$\therefore$ D'与D重合即AA'过O；同理BB'过O，CC'过O。

故（1）三直线AA'、BB'、CC'共点O；

（2）$\overline{QG}=2\overline{GO}$。

44. 三角形的重心G、内心或旁心I、对应的奈格耳点N三者共线，且$\overline{IG}=\overline{GN}/2$。



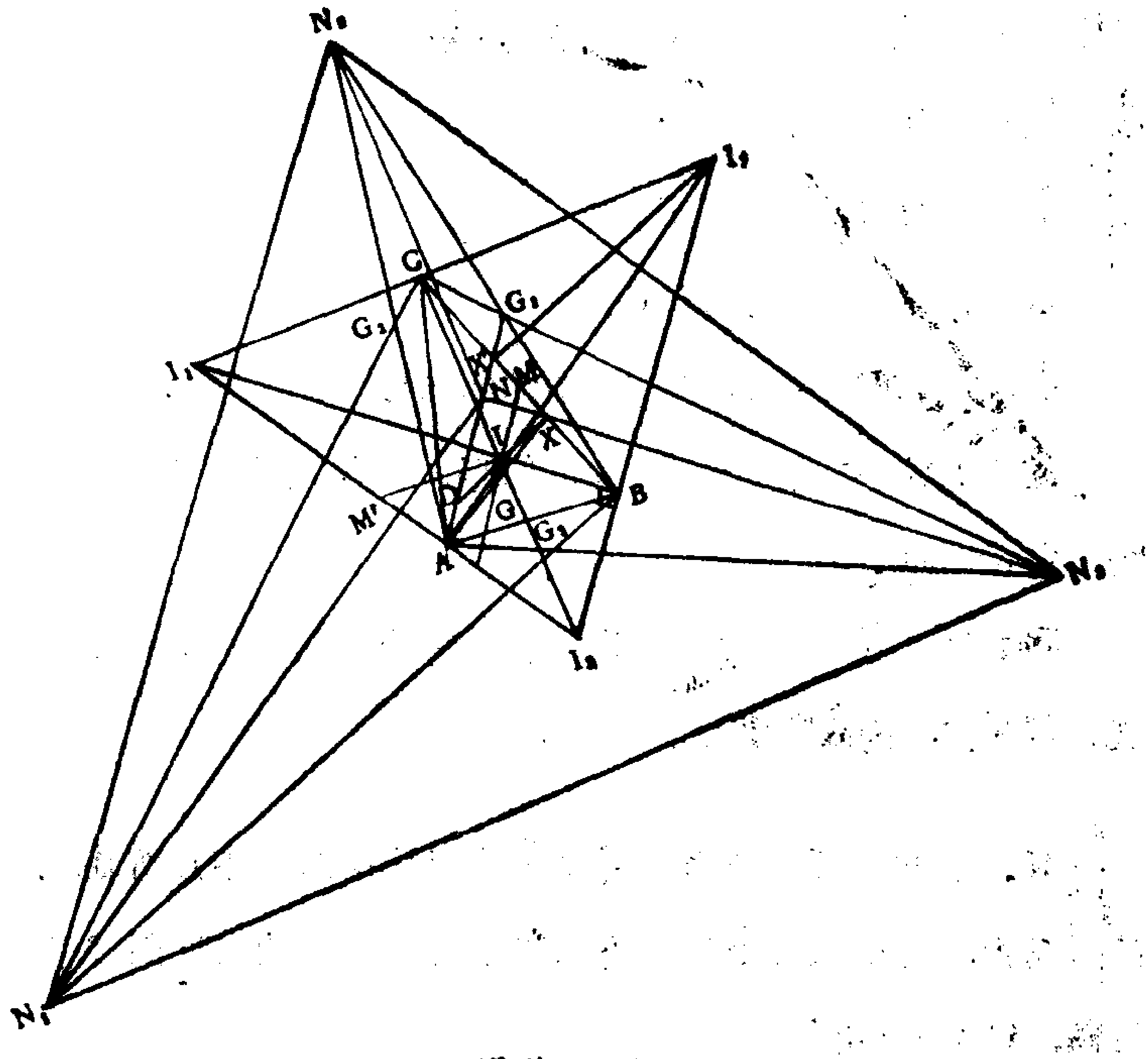
图总—44

证明： 由习题十五第24题知，J是$\triangle ABC$的葛耳刚点。

而N是J的等截共轭点。

命YZ、ZX、XY的中点各为A'、B'、C'，则内心(或旁心)I恰为AA'、BB'、CC'的交点。由上题知，N、G、I三者共线，且$\overline{IG}=\overline{GN}/2$。

45. 三角形的四个奈格耳点组成垂心组，而四个葛耳刚点分别为四个奈格耳点所连成四个三角形的陪位重心。



图总—45

证明：令I、I_i，G、G_i，N、N_i（$i=1$、2、3）分别为$\triangle ABC$的内心或旁心，葛耳刚点、奈格耳点。由上题知，

$NN_1N_2N_3$与$II_1I_2I_3$是关于$\triangle ABC$的重心为中心，以2∶1为相似比的位似形。

由习题二第25题知，I、I_1、I_2、I_3为一垂心组。故N、N_1、N_2、N_3亦为一垂心组。

令I在BC上的射影为X，$BX=CX'$，且XI交AX'于D，又M、M'分别为BC、I_2I_3的中点。有$IX'\perp BC$。及

$ID/I_1X'=IA/I_1A=r/r_1=IX/I_1X'$，

故 I是DX的中点，∴ $IM\parallel NG_1$

∵ $\triangle II_2I_3\backsim\triangle ICB$，

∴ $\angle M'II_2=\angle MIC$，

由此得 IM是$\triangle II_2I_3$的一陪位中线。

又$\triangle NN_2N_3$与$\triangle II_2I_3$为位似形。故NG_1为$\triangle NN_2N_3$的一陪位中线。

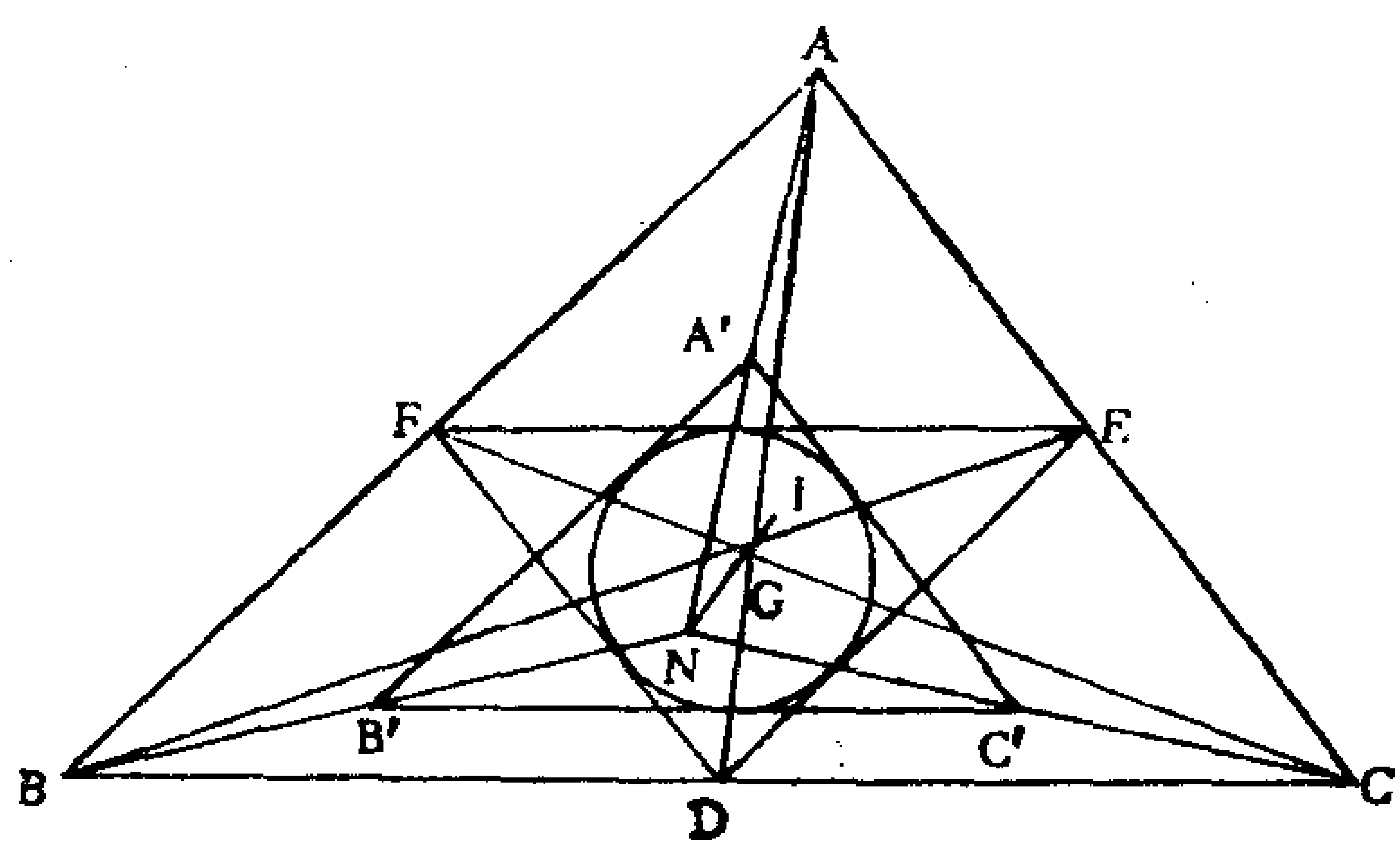
同理可得N_2G_1、N_3G_1也为$\triangle NN_2N_3$的陪中线。故G_1为$\triangle NN_2N_3$的陪位重心。

46. 三角形任一奈格耳点至各顶点连结线的中点所连成的三角形，与原三角形的中点三角形有一共同的内切圆或旁切圆。（$SpiRer$定理）

因此，三角形的中点三角形的内切圆及旁切圆又叫做原三角形的斯皮克圆。

证明：令N为奈格耳点，则$\triangle A'B'C'$为$\triangle ABC$以N为中心，以1/2为相似比的位似形；$\triangle DEF$为$\triangle ABC$以G为中心，以$-1/2$为相似比的位似形。由于$\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$。故其内切圆相等。且在上述位似变换下。由44题有$I$、$G$、$N$三者共线，及$IG = GN/2$，故当以$N$为中心时，$I$变换至$NI$的中点；而当以$G$为中心时，$I$亦变换在$NI$的中点。即$\triangle A'B'C'$与$\triangle DEF$有共同的内切圆。

关于旁切圆情况可类似处理。



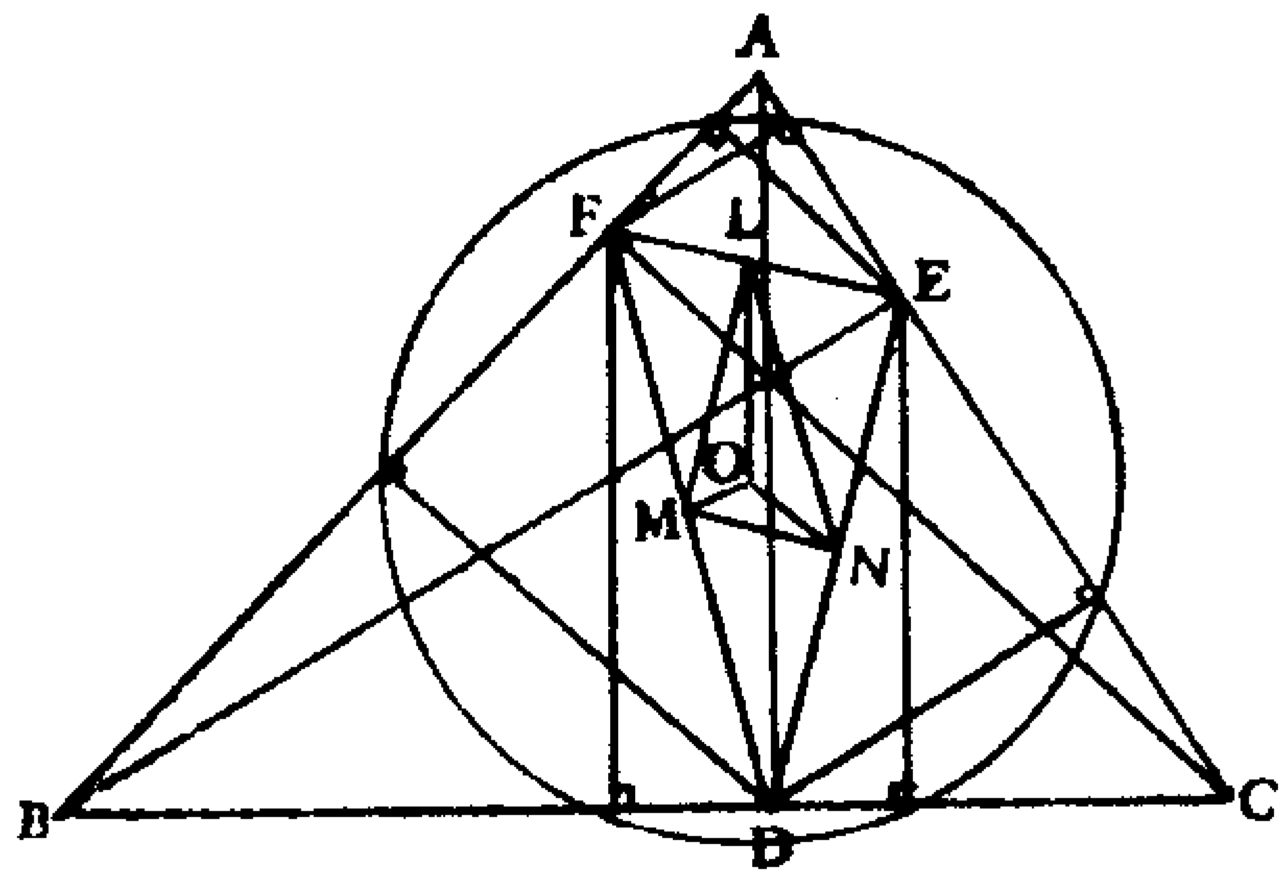
图总—46

47．三角形的泰罗圆心是垂三角形的斯皮克圆心之一。

证明：设O为泰罗圆心，H为垂心，L、M、N为EF、FD、DE的中点，由复习题一第24题知，H为$\triangle DEF$的内心。

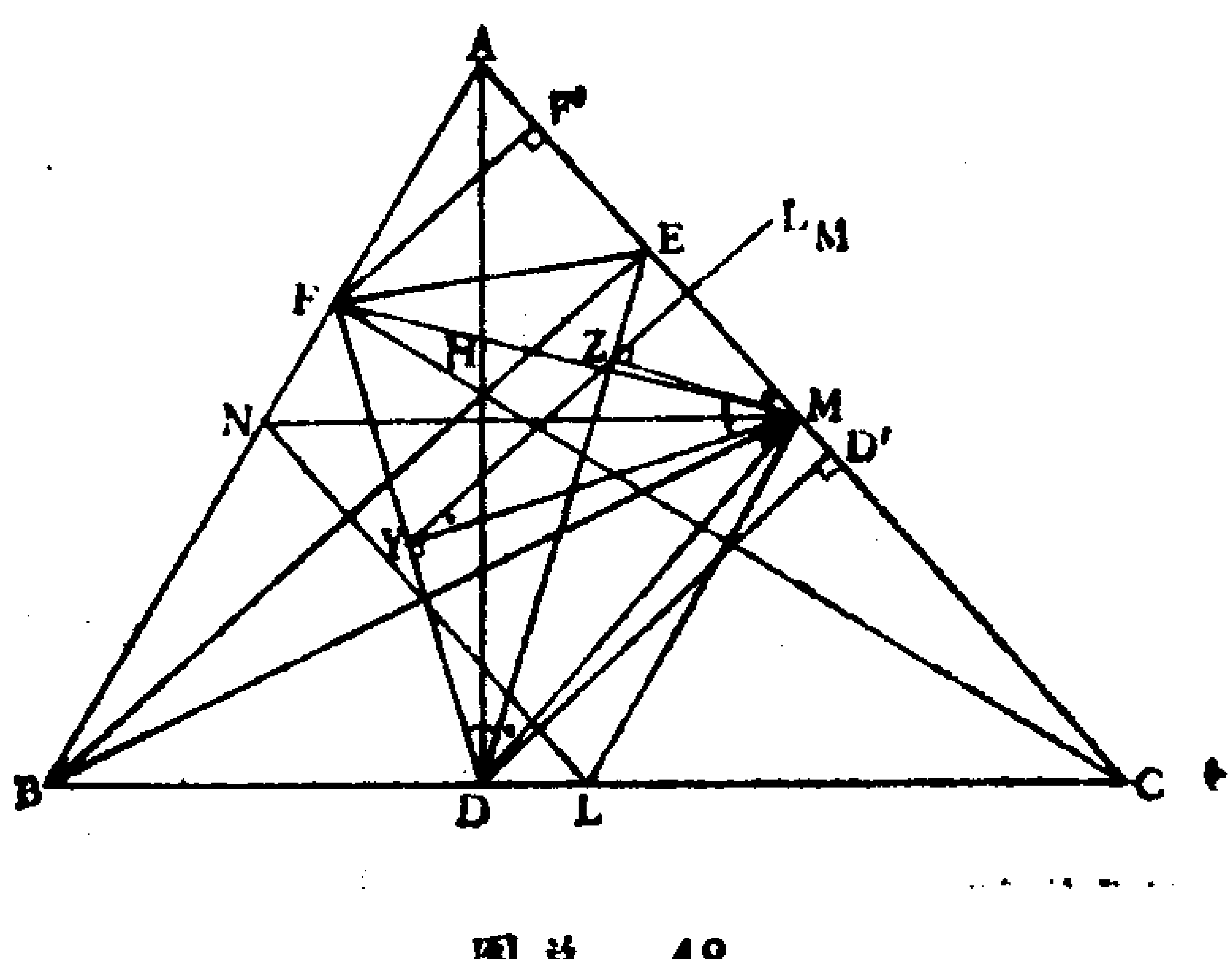
由习题十六第28题得$LO \parallel HD$、$MO \parallel HE$、$NO \parallel HF$。故有OL、OM、ON分别为$\angle NLM$、$\angle LMN$、$\angle MNL$的

分角线，即O是$\triangle LMN$的内心。可得O是$\triangle DEF$的斯皮克圆心。



图总—47

48. 三角形各边中点对于垂三角形的三条西摩松线，及各高线足对于中点三角形三条西摩松线，会于原三角形的泰罗圆心。



图总—48

证明：六点D、E、F、L、M、N在$\triangle ABC$的九点圆上。且有$MF=MD=AC/2$。故M在FD上的射影Y为FD的中点。

作$MZ\perp DE$。有M、D、Y、Z四点共圆，可得

$\angle ZYM=\angle ZDM$，$\angle YMZ=\angle YDZ$，

$\angle ZME=\angle YMD$。

故有 $l_M\perp AC$，$l_M\perp NL$。由于l_M过DF的中点，故亦过$D'F'$的中点，即l_M过$\triangle ABC$的泰罗圆心。

同理有l_N、l_L亦过$\triangle ABC$的泰罗圆心。

由复习题五第55、57题，l_D、l_E、l_F亦过$\triangle ABC$的泰罗圆心。

49. 三角形的外心、泰罗圆心、垂三角形的垂心三者共线。

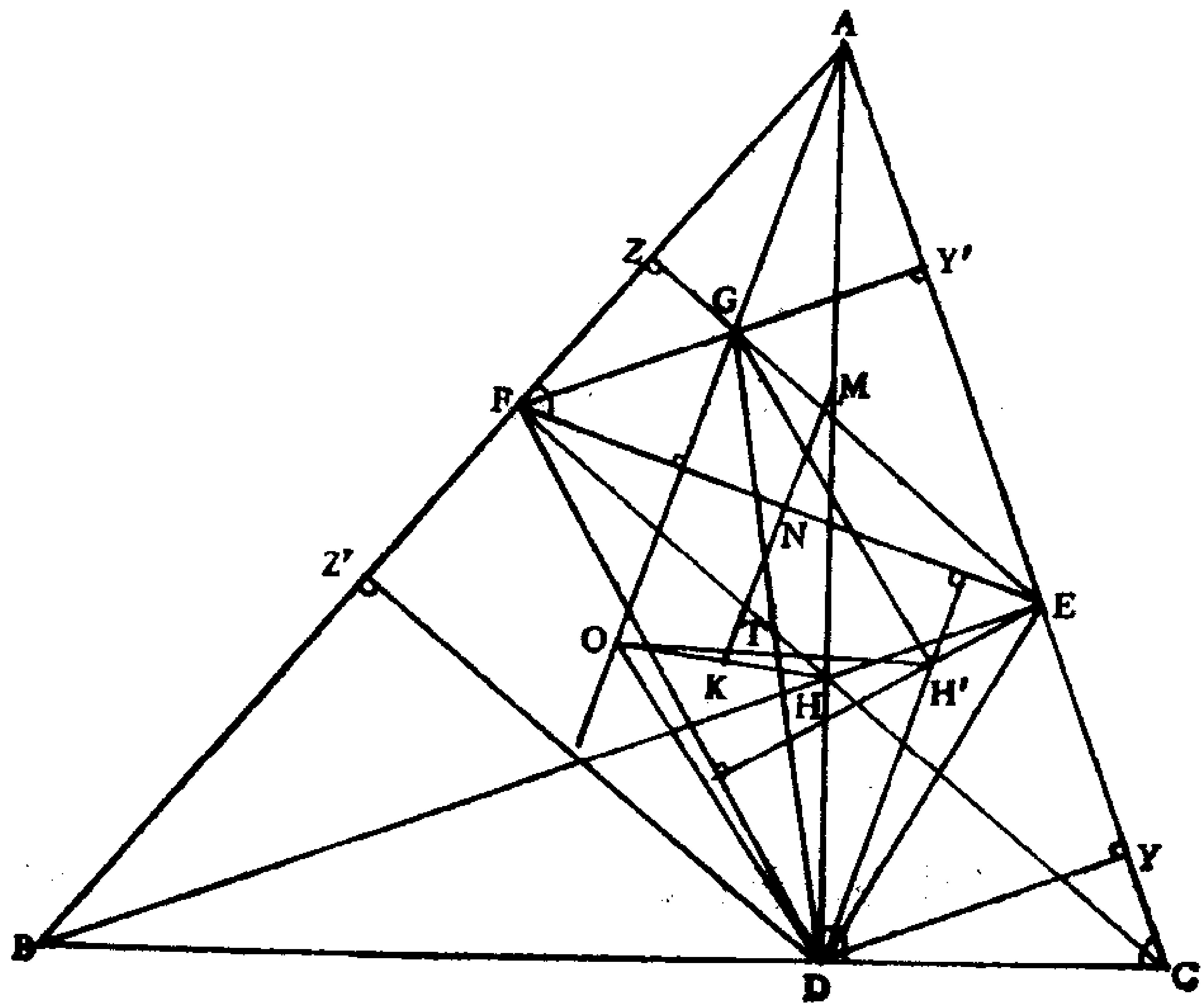
证明：令O、H'、T为$\triangle ABC$的外心、垂三角形的垂心、泰罗圆心，则T为YY'与ZZ'的中垂线的交点，即GD的中点。

令AH的中点为M，K为$\triangle ABC$的九点圆圆心，则K在OH的中点。$\therefore MK\parallel AO$且$MK=AO/2$。

由M、G，K、H'分别为$\triangle AEF$、$\triangle DEF$的外心与垂

心。且$MK\perp EF$，有$MN=AG/2$，及$DH'/2=KN=OG/2$，

$\therefore$ $OG \mathrel{\underline{\parallel}} DH'$，故有$ODH'G$为平行四边形，而泰罗圆心$T$为$GD$的中点，故$O$、$T$、$H'$共线。



图总—49

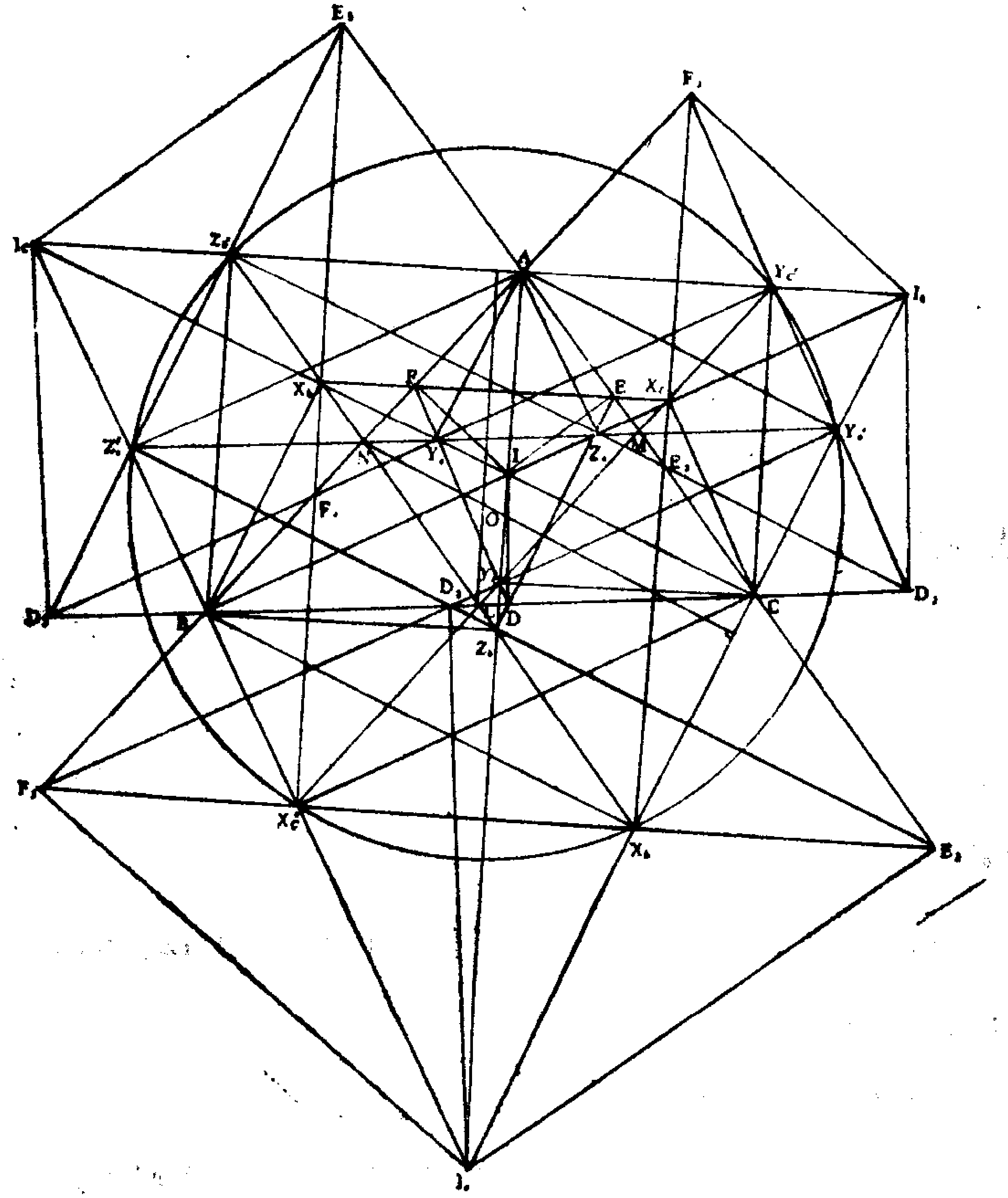
50。三角形的内心及旁心的垂足三角形，凡四形，每两形有两双边各相垂直，共得十二个垂足。求证这十二个点分布在

（1）原三角形的六条内外平分角线上，每线两点；

（2）原三角形的三条中横线上，每线上四点；

（3）四个圆上，每圆上六点，这四圆与原三角形的四个

斯皮克圆同心，且每圆分别正交于原三角形的内切圆及旁切圆中的三圆。



图总—50

证明(1)，过B、C作II_a、II_b的垂线。令垂足为X_a、

X_c、则B、I、F、X_b，C、I、E、X_c均四点共圆。

$$\therefore\quad \angle X_bFB=\angle X_bIB=(\angle B+\angle C)/2=\angle X_cIC$$

$$=\angle X_cEC,$$

$$\text{又}\quad \angle AFE=\angle AEF=(180^\circ-\angle A)/2=$$

$$=(\angle B+\angle C)/2,$$

故有E、F、X_b、X_c四点共线。

令C在I_cI_a上的射影为X_c'，可类似地证得E_3、F_3、X_b、X_c'四点共线。

以上表明，X_b是EF与E_3F_3的交点。即互相垂直的两直线的垂足。

同理可得，本题所给的十二个垂足，即A、B、C射影于不相邻的两内、外角的平分线上的射影。它们分别命名为Y_a、Z_a、Y_a'、Z_a'，Z_b，X_b、Z_b'、X_b'，X_c、Y_c、X_c'、Y_c'。

（2）令L、M、N为BC、CA、AB的中点，由$AZ_a'BZ_a$、AY_aCY_a'均是矩形，

有 $\angle AZ_a'Z_a=\angle ABZ_a=\angle Z_aBC$。

$\therefore$ Z_a、Z_a'在中横线NM上。同理，Y_aY_a'也在NM上。

（3）由于$\triangle ABC$是$\triangle I_aI_bI_c$的垂足三角形。故A、B、C在有关各边上的六个射影共圆，此圆为$\triangle I_aI_bI_c$的泰勒圆。

由于$BZ_b'Y_c'C$为梯形。故$Z_b'Y_c'$的中垂线过BC的中点L，且平行于AI，即该泰罗圆的圆心在$\angle NLM$的平分线上。故$\triangle LMN$的内心为该泰罗圆的圆心。即此心与$\triangle ABC$的斯皮克圆同心。

由直角三角形$\triangle I_aI_bA$、$\triangle I_aI_bB$，

有 $I_aY_a'\cdot I_aI_b=I_aA^2$、$I_aX_b'\cdot I_aI_b=I_aB^2$，

于是 $I_aY_a'\cdot I_aX_b'=(I_aA\cdot I_aB/I_aI_b)^2$。

在$\triangle I_aBD_1$与$\triangle I_aI_bA$中，由习题二第21题，有

$\angle I_aBD_1=90°-\angle CBI=90°-\angle B/2=\angle I_aI_bA$。

故 $\triangle I_aBD_1\backsim\triangle I_aI_bA$。

于是$I_aD_1/I_aB=I_aA/I_aI_b$，即 $I_aA\cdot I_aB/I_aI_b=I_aD_1$，

$\therefore$ $I_aY_a'\cdot I_aX_b'=I_aD_1{}^2$。

点I_a对于$\odot O$的幂等于旁切圆$\odot I_a$半径I_aD_1的平方，故$\odot O$与$\odot I_a$正交。

同理，其余三圆的有关六点为 Z_b'、Y_a、X_b、Z_a、X_c、Y_c'，Y_a'、X_c、Z_a、Y_c、Z_b、X_b'，X_c'、Z_b、Y_c、X_b、Y_a、Z_a'。

51。设I是$\triangle ABC$的内心或旁心，N是对应的奈格耳点。连AN、BN、CN分别交BC、CA、AB于X、Y、Z，引$IP\perp BC$、$IQ\perp CA$、$IR\perp AB$于P、Q、R，命P、Q、R在

AX、BY、CZ上的射影为P'、Q'、R'，使$\overline{AA'}=\overline{P'X}$，$\overline{BB'}=\overline{Q'Y}$，$\overline{CC'}=\overline{R'Z}$。求证：$\odot A'B'C'$与$\odot ABC$相切，且$N$是这两圆的相似中心之一。

证：设I为$\triangle ABC$的内心，I_1为$\triangle ABC$的旁心（对$\angle A$）则A是内切$\odot I$与旁切$\odot I_1$的外相似心，由位似性质可知，在$\odot I$上存在一点P''使A、P''、X共线且$IP''\parallel I_1X$（由复习题一第13题知X在$\odot I_1$上即$\odot I_1$切BC于X）。所以$IP''\perp BC$，因而P''、I、P共线，即$P''P$为$\odot I$的一直径。因此P'必在$\odot I$上，同理Q'、R'也在$\odot I$上。

$$\because\ NX/AX=S_{NBC}/(S_{NBC}+S_{NCA}+S_{NAB})$$
$$=1/(1+AZ/ZB+AY/YC)$$
$$=1/(1+BR/AR+CQ/QA)$$
$$=1/[(s-a)/(s-a)+(s-b)/(s-a)+$$
$$+(s-c)/(s-a)]$$
$$=(s-a)/s\ (2s=a+b+c),$$

$$AP''/AX=(ha-2r)/ha\ (h_a\text{为}BC\text{边高},r\text{为}\odot I\text{半径})$$
$$=1-2r/h_a=1-as\cdot 2r/ash_a$$
$$=1-a/s=(s-a)/s,$$

$\therefore\ NX=AP''$，由此可得$AN=P''X$，$A'N=P''P'$，

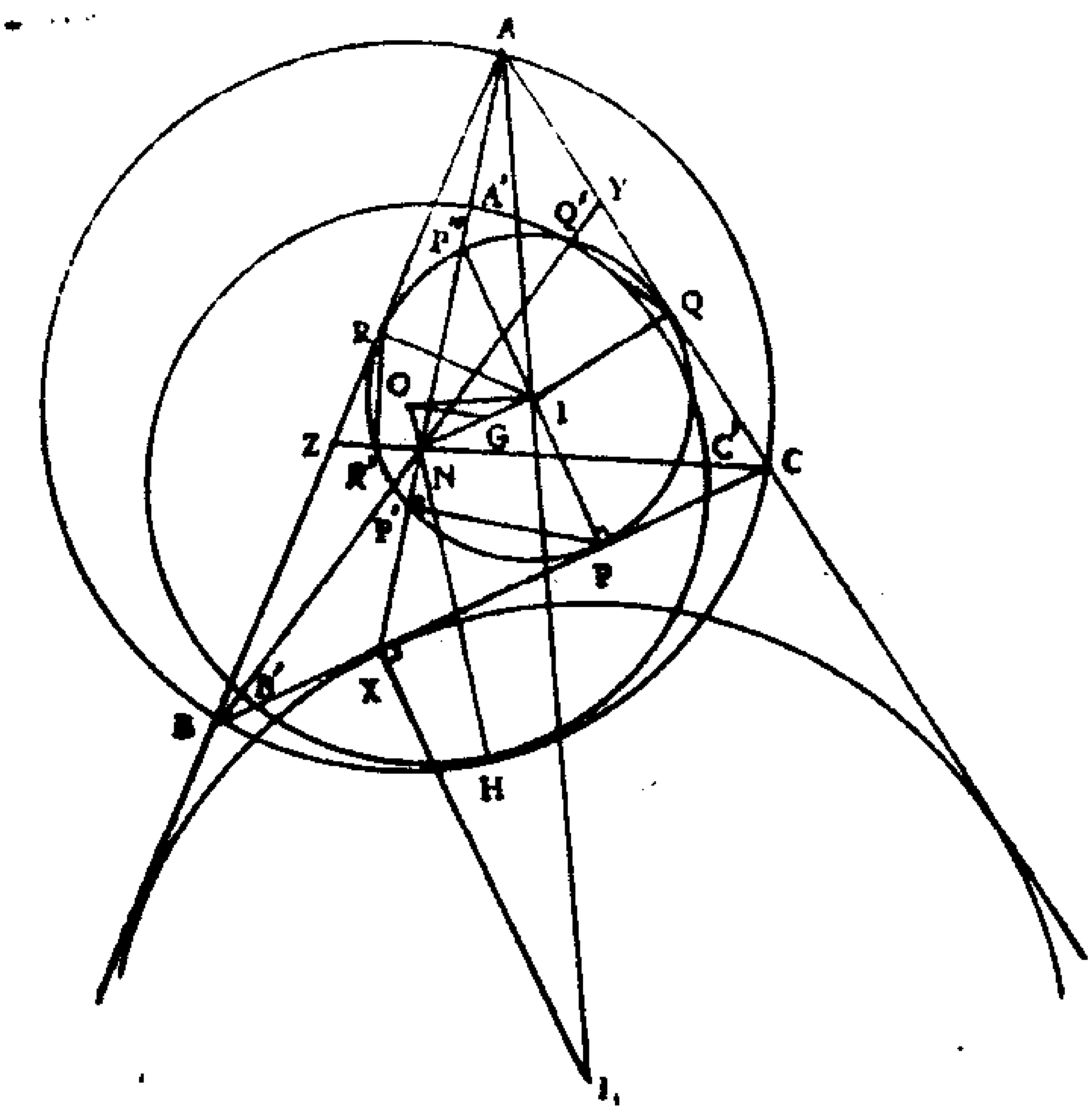
故 $NA\cdot NA'=XP''\cdot P'P''=P''P'^2$ （射影定理）

$$=4r^2.$$

同理$NB\cdot NB'=NC\cdot NC'=4r^2$。

由此可见$\odot ABC$与$\odot A'B'C'$以N为中心，$4r^2$为反演幂的互为反象。……………………①

故N是$\odot ABC$与$\odot A'B'C'$相似中心之一。



图总—51

设O、G为$\triangle ABC$的外心，重心，

则$ON^2=NG^2+GO^2-2NG\cdot GO\cos\angle NGO$

$$=NG^2+GO^2+2NG\cdot GO\frac{GO^2+GI^2-OI^2}{2GO\cdot GI}$$

$$=4GI^2+GO^2+2(GO^2+GI^2-OI^2)$$（利用44题）

$=(R-2r)^2$（利用习题十八第24题），

$\therefore\ ON=R-2r$。

延长ON交$\odot O$于H，则$NH=R-(R-2r)=2r$，

$NH\cdot NH=4r^2$。

由①可知H也在$\odot A'B'C'$上。

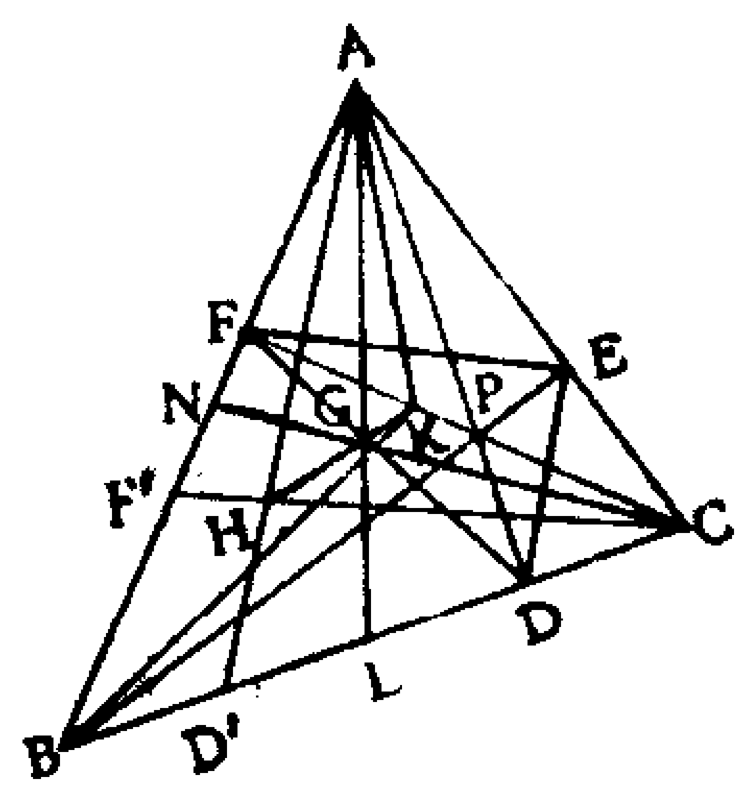
所以$\odot ABC$与$\odot A'B'C'$的交点H在ON（即他们两圆心连线）上，

故　$\odot ABC$与$\odot A'B'C'$相切于H。

52。三角形的陪位重心K、重心G、垂心等截点H三者共线，且$KG=GH/2$。

垂心等截点即垂心的等截共轭点。

证明：P是垂心，DE、EF、FD分别是AB、BC、CA的逆平行线；



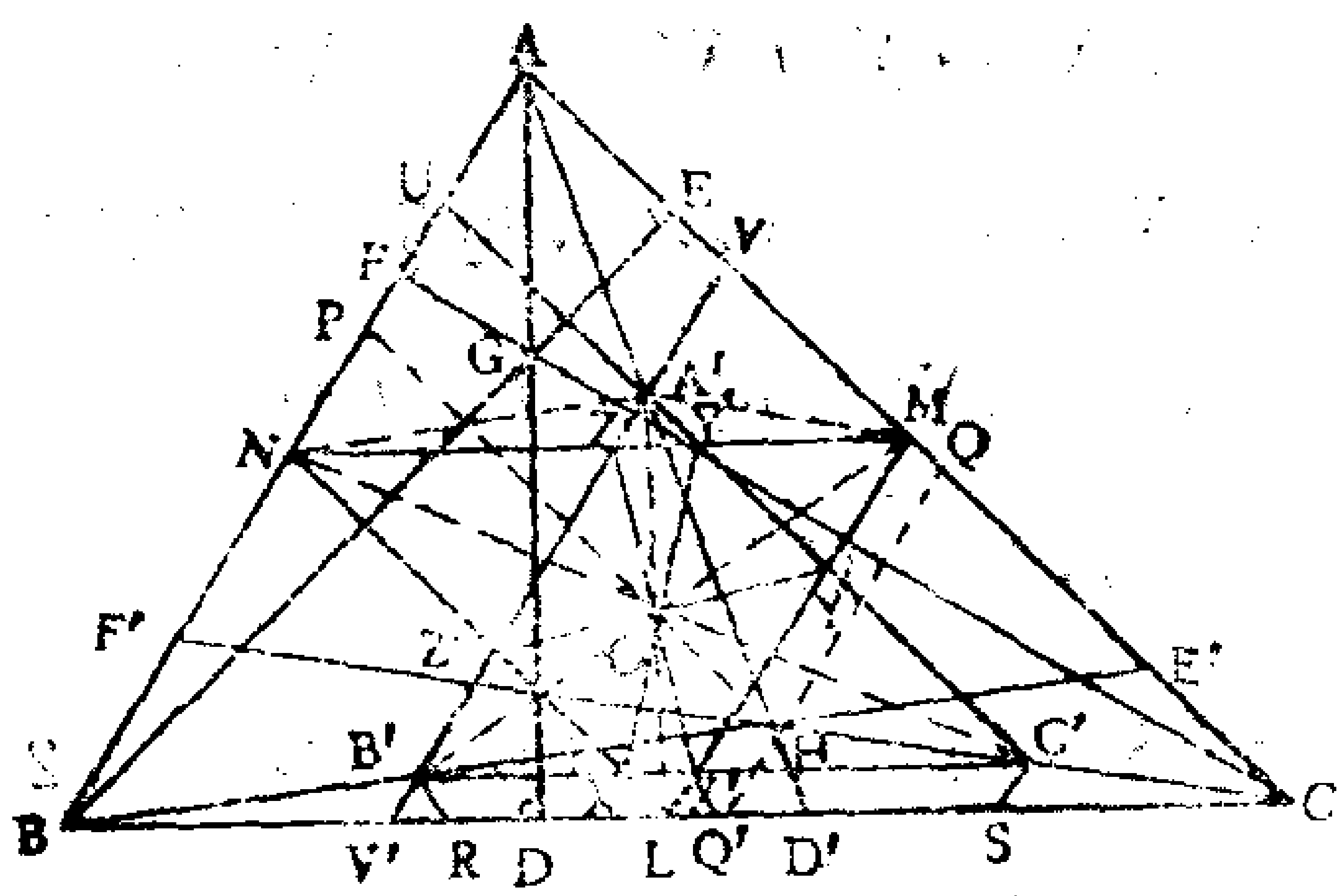
图总—52

过A、B分别作过EF、FD的中点的直线，则由定理149知，其交点为陪位中心K；

令D'、F'分别是D、F的等截点，则AD'与CF'的交点H为垂心P的等截点，由第13题知，K、G、

H三点共线，且$KG=GH/2$。

53。三角形的中点三角形，及垂心等截点至三顶点连结线的中点所连成的三角形，二者的边相互交于共圆的六点，这圆同为二者的余弦圆。



图总—53

证明：$\triangle LMN$为$\triangle ABC$的中点三角形。$\triangle A'B'C'$为垂心等截点H至三顶点连结线的中点所连成的三角形。过H作$HP\parallel AC$、$HQ\parallel AB$。

有$\triangle CHQ\backsim\triangle CF'A$，$\triangle BHP\backsim\triangle BE'A$

又$\triangle MVA'\backsim\triangle CQH$，$\triangle NUA'\backsim\triangle BPH$

$\therefore\quad 2LZ'=2MV=CQ=CA\cdot CH/CF'$

$2LY=2NU=BP=BA\cdot BH/BE'$

又 $LX=RB'=CE'\cdot BB'/BE'$，

$LX' = SC' = BF' \cdot CC' / CF'$

故有 $2LZ' \cdot LX = CA \cdot CE' \cdot CH \cdot BB' / CF' \cdot BE'$

$2LY \cdot LX' = BA \cdot BF' \cdot BH \cdot CC' / BE' \cdot CF'$

$\because$ $CA \cdot CE' = CA \cdot AE = BA \cdot AF = BA \cdot AF'$

又 $BB' = BH/2$，$CC' = CH/2$

$\therefore$ $LZ' \cdot LX = LY \cdot LX'$ 故X、X'、Y、Z'四点共圆。

有 YZ'是$X'X$的逆平行线，故也是MN的逆平行线。

同理有ZX'、XY'分别是NL、LM的逆平行线。

$\because$ $NZ = BV' = BQ'/2$，

$X'C' = LS = LC - SC = (BC - Q'C)/2 = BQ'/2$

故有NC'与ZX'互相平分于O。

同理MB'与XY'；LA'与YZ'均互相平分于O，故O为$\triangle LMN$的陪位重心。

由例题47知，X、X'、Y、Y'、Z、Z'六点共圆且为$\triangle LMN$与$\triangle A'B'C'$的余弦圆。

54. 两平行线l与l'交三直线x、y、z于X、Y、Z及X'、Y'、Z'。过这些交点各作所在线的垂线，设前三垂线交成$\triangle ABC$，后三垂线交成$\triangle A'B'C'$。求证这两三角形的外接圆相切。

证明： 因$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三双对应边各平行，

由P 169 习题 14 第 24 题 有AA'、BB'、CC' 相交于一点 S；

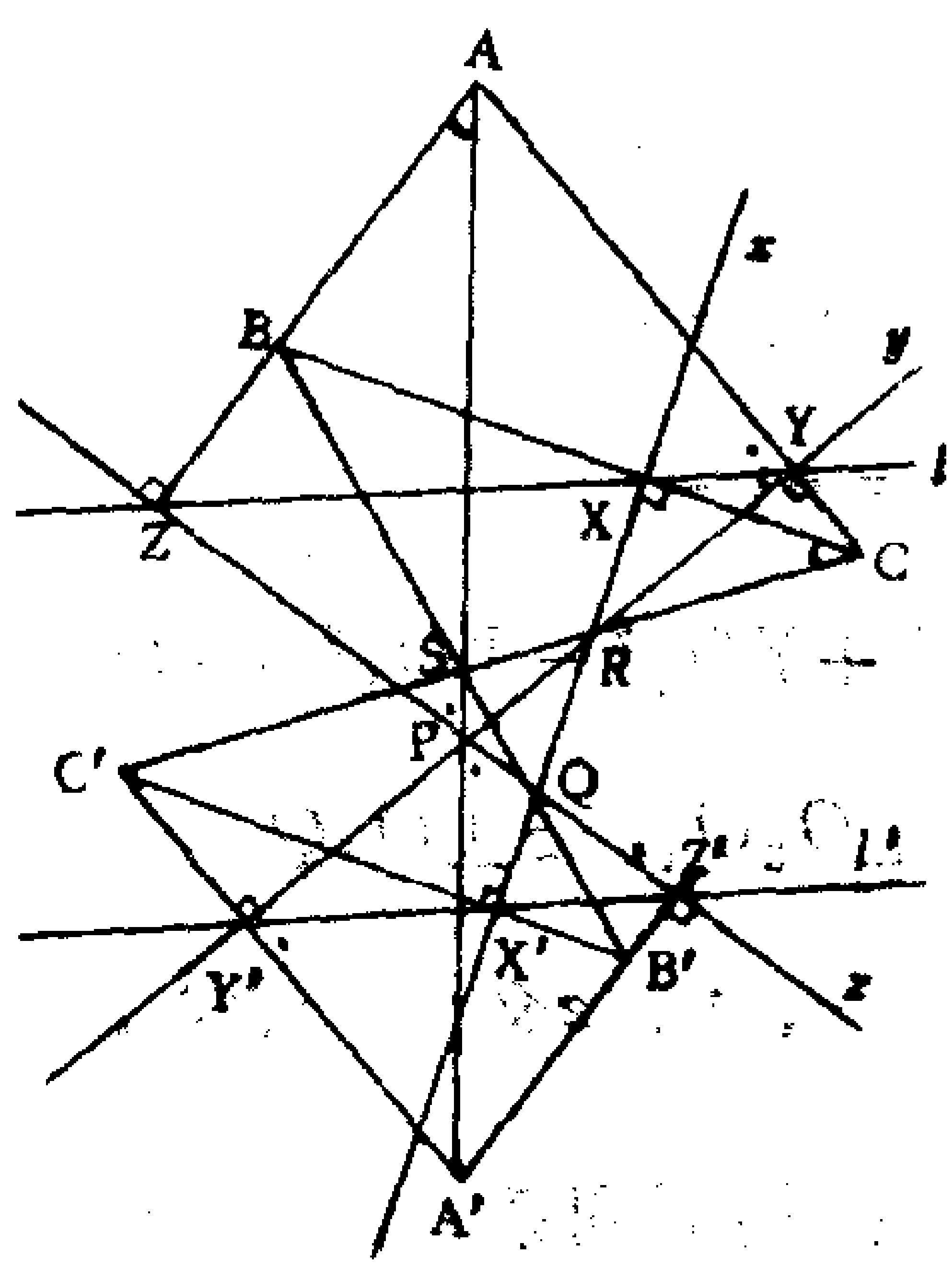
∵ A、Y、P、Z与A'、Y'、P、Z'四点共圆，

∴ $\angle APZ = \angle AYZ = \angle A'Y'Z' = \angle APZ'$.

故 A、S、P、A共线；同理有B、S、Q、B'与C、S、R、C'均共线；

∵ C、Y、X、R四点共圆。

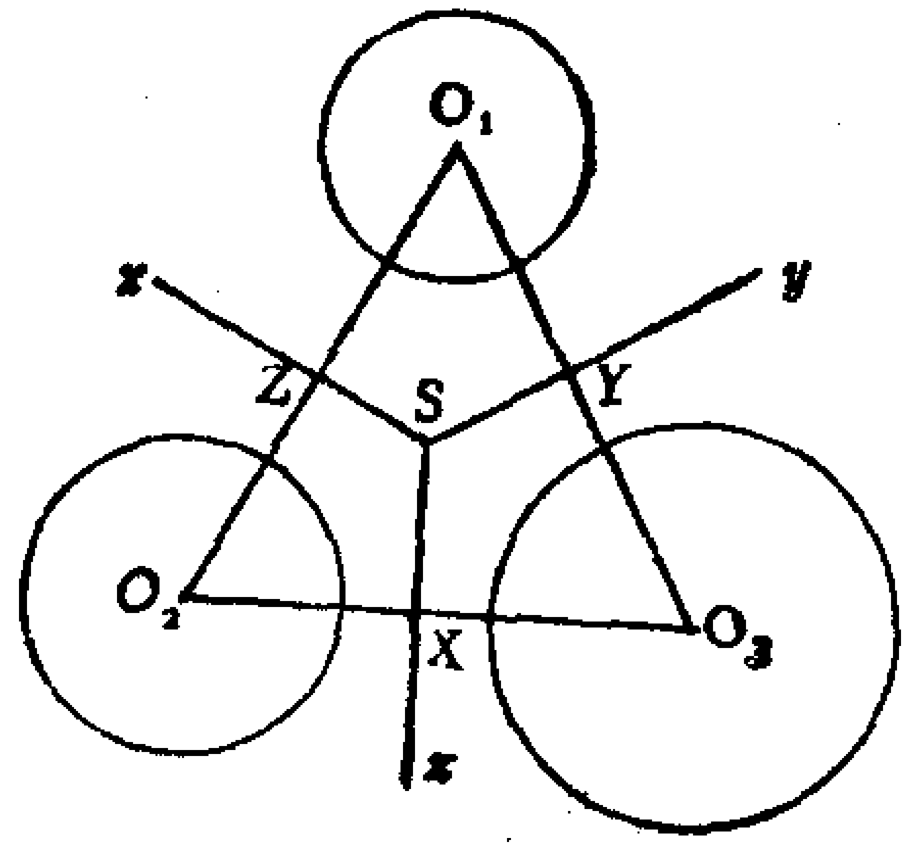
∴ $\angle ZAP = \angle BAS = \angle XYR = \angle BCS$。故有$B$、$A$、$C$、$S$共圆；同理$B'$、$A'$、$C'$、$S$也共圆。



图总—54

55. 圆心不共线的三圆，它们两两的等幂轴共点。

这点叫做三圆等幂心。



图总—55

证明：设x、y、z为三等幂轴且交$\triangle O_1O_2O_3$于X、Y、Z。则

$$\begin{cases} O_3X - O_2X = r_3 - r_2 \\ O_2Z - O_1Z = r_2 - r_1 \\ O_1Y - O_3Y = r_1 - r_3 \end{cases}$$

$\therefore$ $XO_3{}^2 - XO_2{}^2 + YO_1{}^2 - YO_3{}^2 + ZO_2{}^2 - ZO^2{}_1 = 0$

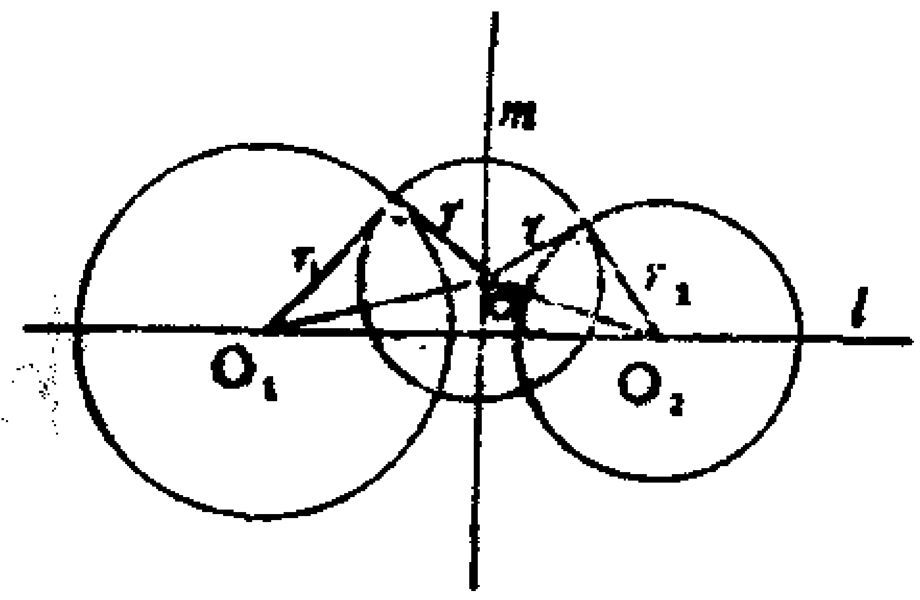
又 $x \perp O_2O_3$，$y \perp O_3O_1$，$z \perp O_1Q_2$

由定理148得 x、y、z交于一点S。

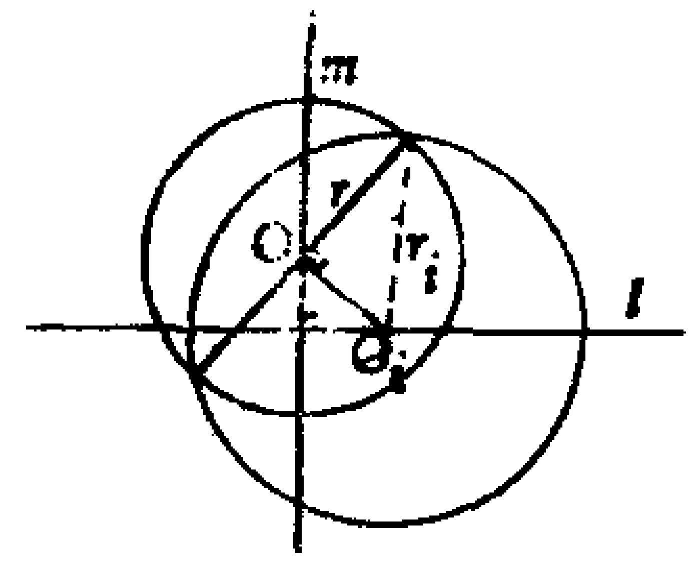
56。圆心共线且具下列条件之一的一组圆必是共轴圆系。

(1) 同正交于一定圆；

(2) 均径割一定圆。



(1)



(2)

图总—56

证明(1)：

∴ $OO_i^2-r_i^2=r^2$(定值)，又O_i在一直线l上，故圆$\odot O_i(i=1,2\cdots\cdots)$是以$m$为等幂轴的共轴圆。

(2)：∵$\odot O_i$ ($i=1,2\cdots\cdots$) 的弦是$\odot O$的直径，故有$OO_i^2-r_i^2=-r^2$(定值)，

又O_i在直线l上，故$\odot O_i$是以m为等幂轴的共轴圆系。

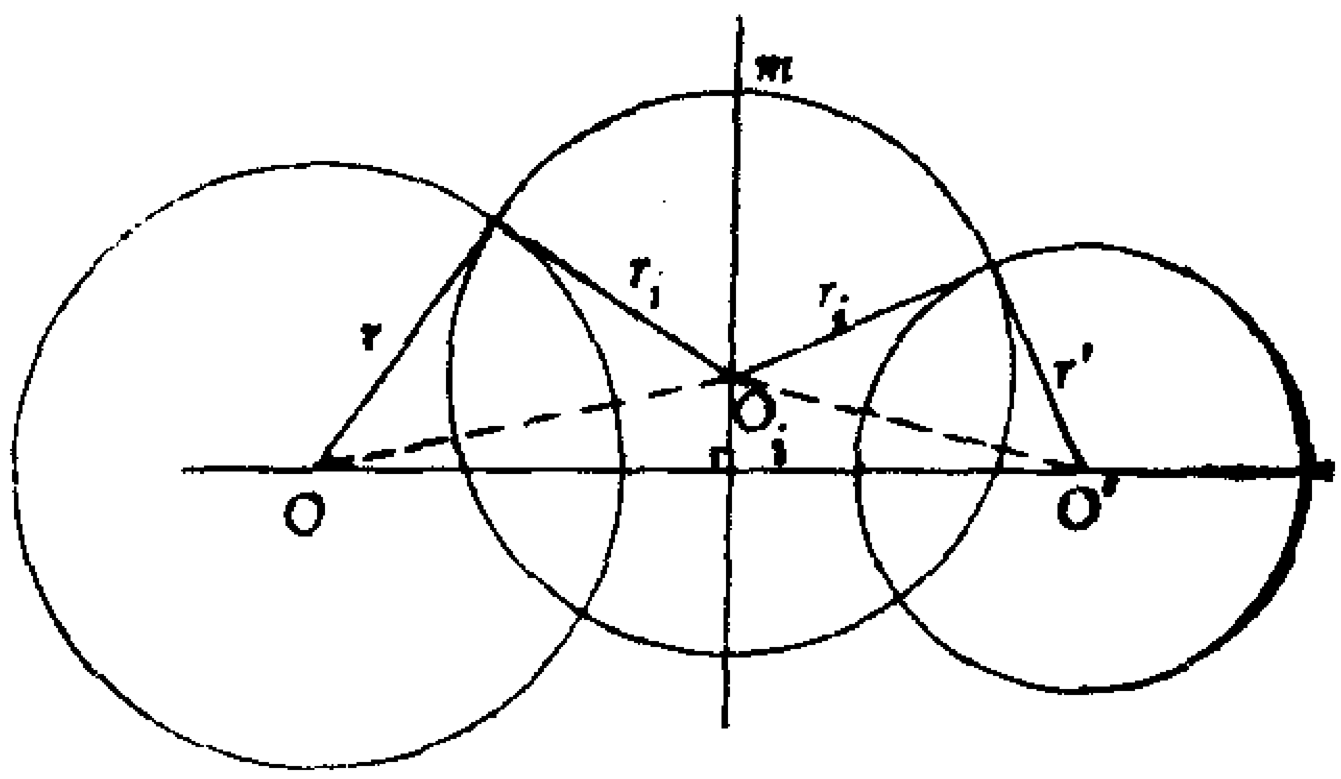
57．具有下列条件之一的一组圆必是共轴圆系：

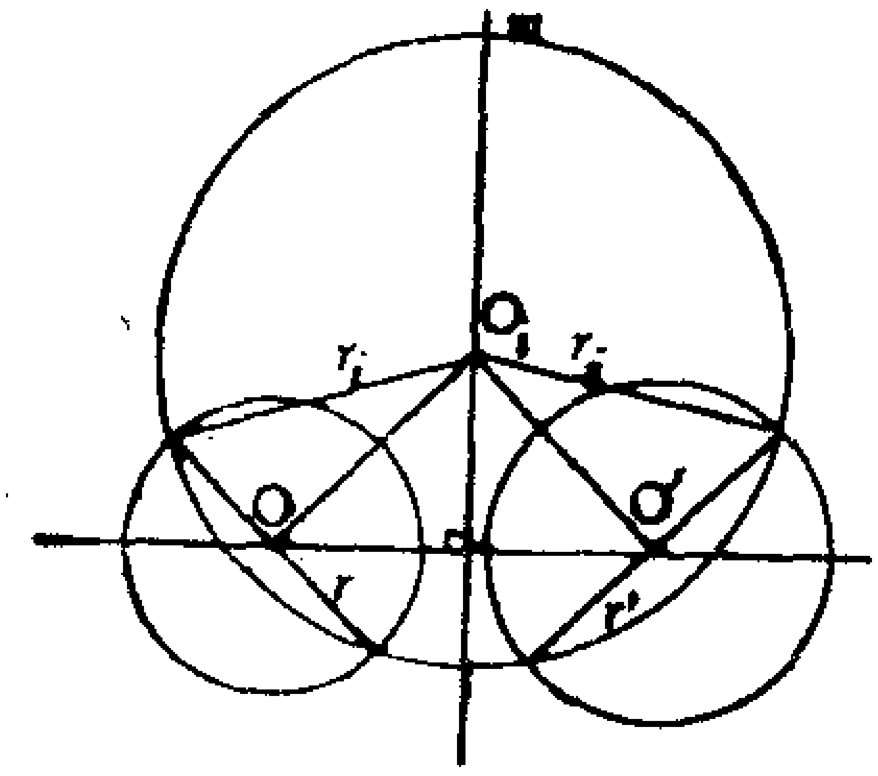
(1) 同正交于两定圆；

(2) 均径割两定圆；

(3) 同正交于一定圆且均径割另一定圆。

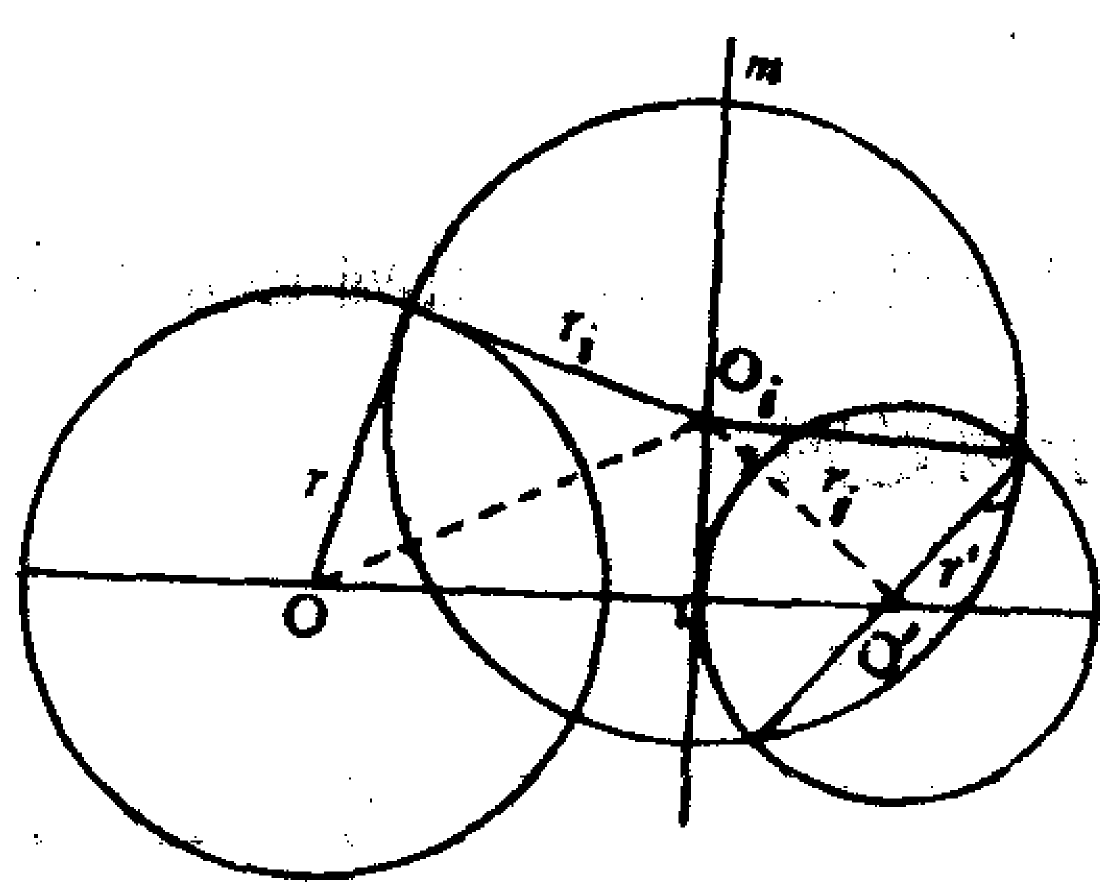
证明(1)：设$\odot O_i(r_i)$同正交于两定圆$\odot O(r)$与$\odot O'(r')$，则$O_iO^2-O_iO'^2=r^2+r_i^2-(r'^2+r_i^2)=r^2-r'^2$为定值。所以$O_i$在垂直于$OO'$的直线$m$上。由上题(1)知，$\odot O_i(r_i)$是共轴圆系。





图总—57

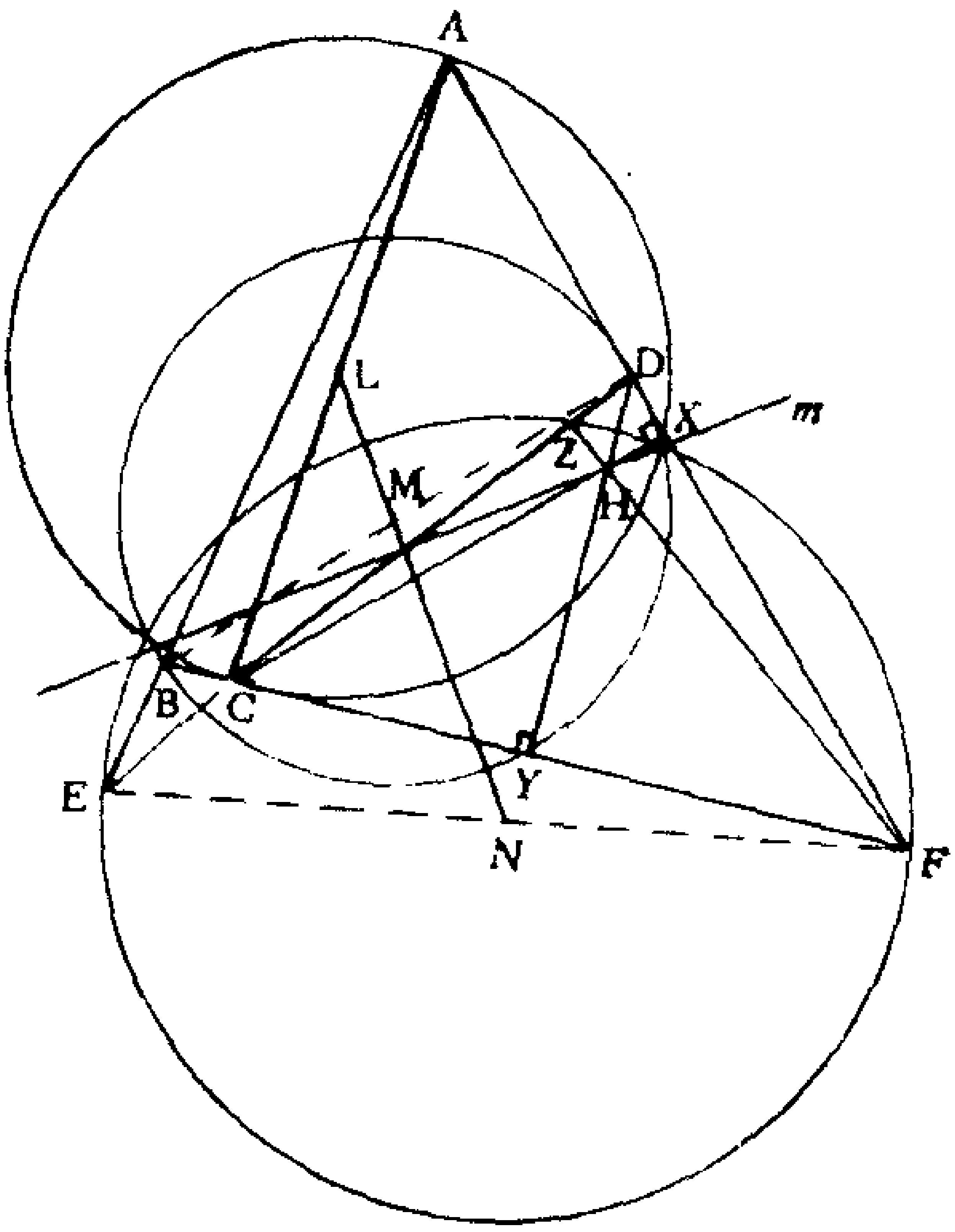
(2)：设圆$\odot O_1(r_1)$同径割两定圆$\odot O(r)$、$\odot O'(r')$，则$O_1O^2-O_1O'^2=(r_1^2-r^2)-(r_1^2-r'^2)=r'^2-r^2$为定值，所以$O_1$在垂直于$OO'$的直线$m$上。由上题(2)知，$\odot O_1(r_1)$是共轴圆系。



图总—57(3)

(3)：设圆$\odot O_1(r_1)$正交定圆$\odot O(r)$而径割定圆$\odot O'(r')$，则$O_1O^2-O_1O'^2=(r^2+r_1^2)-(r_1^2-r'^2)=r^2+r'^2$为定值，所以$O_1$在垂直于$OO'$的直线$m$上。由上题知，$\odot O_1(r_1)$是共轴圆系。

58. 以一完全四边形的对角线各为直径所作的三圆共轴，它们的等幂轴就是完全四边形的垂心线。（*Gauss*定理）



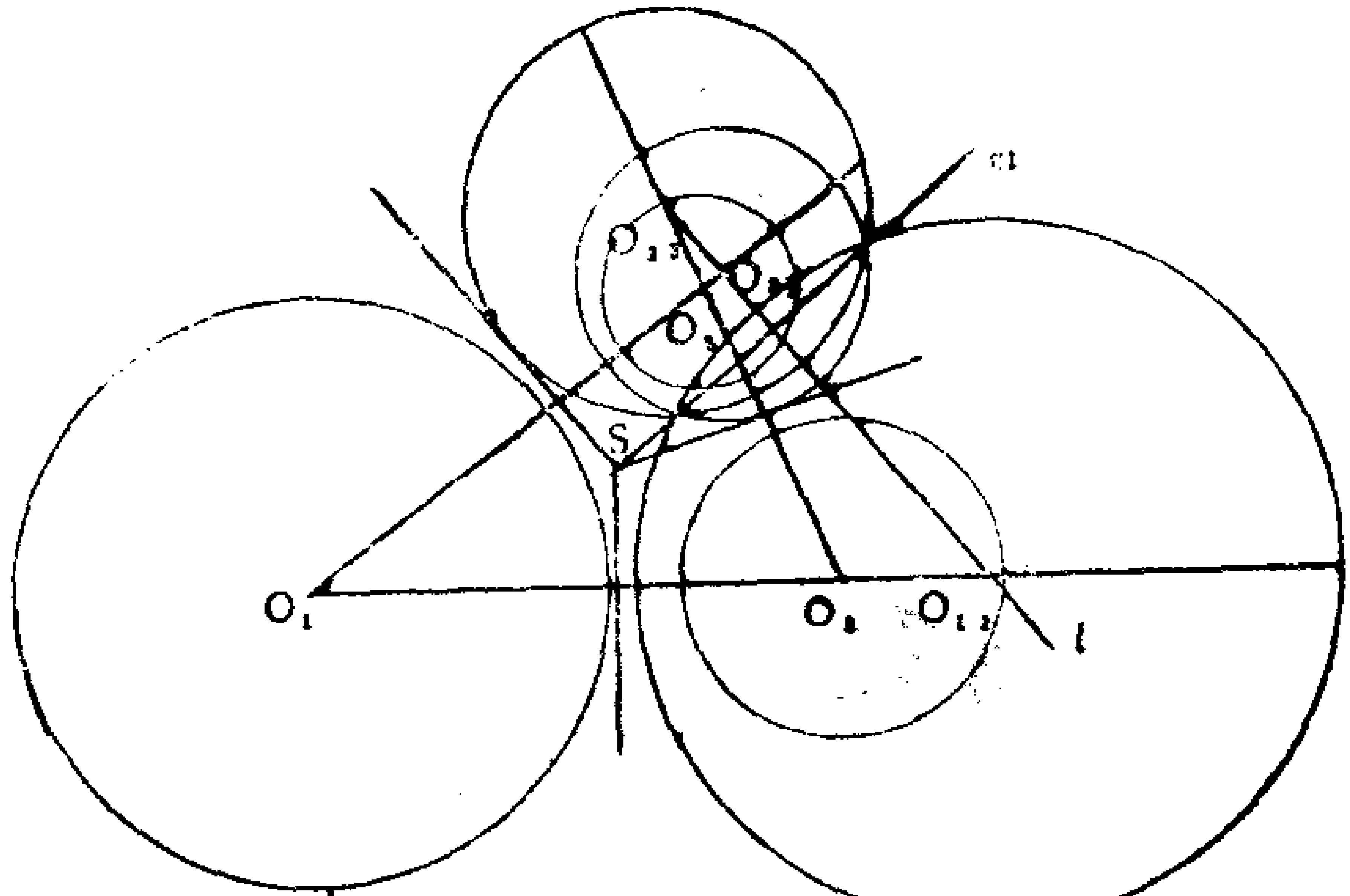
图总—58

证明：设H是$\triangle CDF$的垂心。X、Y、Z为各垂线的垂足。则X、Y、Z分别在$\odot L$、$\odot M$、$\odot N$上。

H对$\odot L$、$\odot M$、$\odot N$的幂分别是$HC\cdot HX$、$HD\cdot HY$、$HF\cdot HZ$且由垂心性质有$HC\cdot HX=HD\cdot HY=HF\cdot HZ$，即$H$对$\odot L$、$\odot M$、$\odot N$等幂。

由习题14第23题有L、M、N为牛顿线，由复习题三45题知完全四边形的垂心线垂直于牛顿线。故三圆$\odot L$、$\odot M$、$\odot N$共轴，其等幂轴就是完全四边形的垂心线。

59. 不同心的三圆，它们两两的相似圆共轴。



图总—59

证明： 由习题21第15题，若 O_{12}、O_{23}、O_{31} 分别是三圆$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$的两两相似圆，则$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_{12}$；$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_{23}$；$\odot O_3$、$\odot O_1$、$\odot O_{31}$均为共轴圆。

由第55题，上述六圆有等幂点S。

60. 三角形的外接圆、九点圆、重圆共轴或同心。

证明： 设$\odot O(R)$、$\odot K(R/2)$、$\odot G(r)$分别是$\triangle ABC$的外接圆、九点圆与重圆。则由习题16第23题有 $AD\perp DL$ 且$DL=a/2$。又由例题44的推论有 O、G、K、H四点共线且$\overline{OG}=2\overline{GK}$，$\overline{OH}=3\overline{OG}$。

设GO交$\odot K$、$\odot O$于P、Q，

则 $GP\cdot GQ=(KP-KG)(GO+OQ)=(R/2-OG/2)(OG+R)=(R^2-\overline{OG}^2)/2$

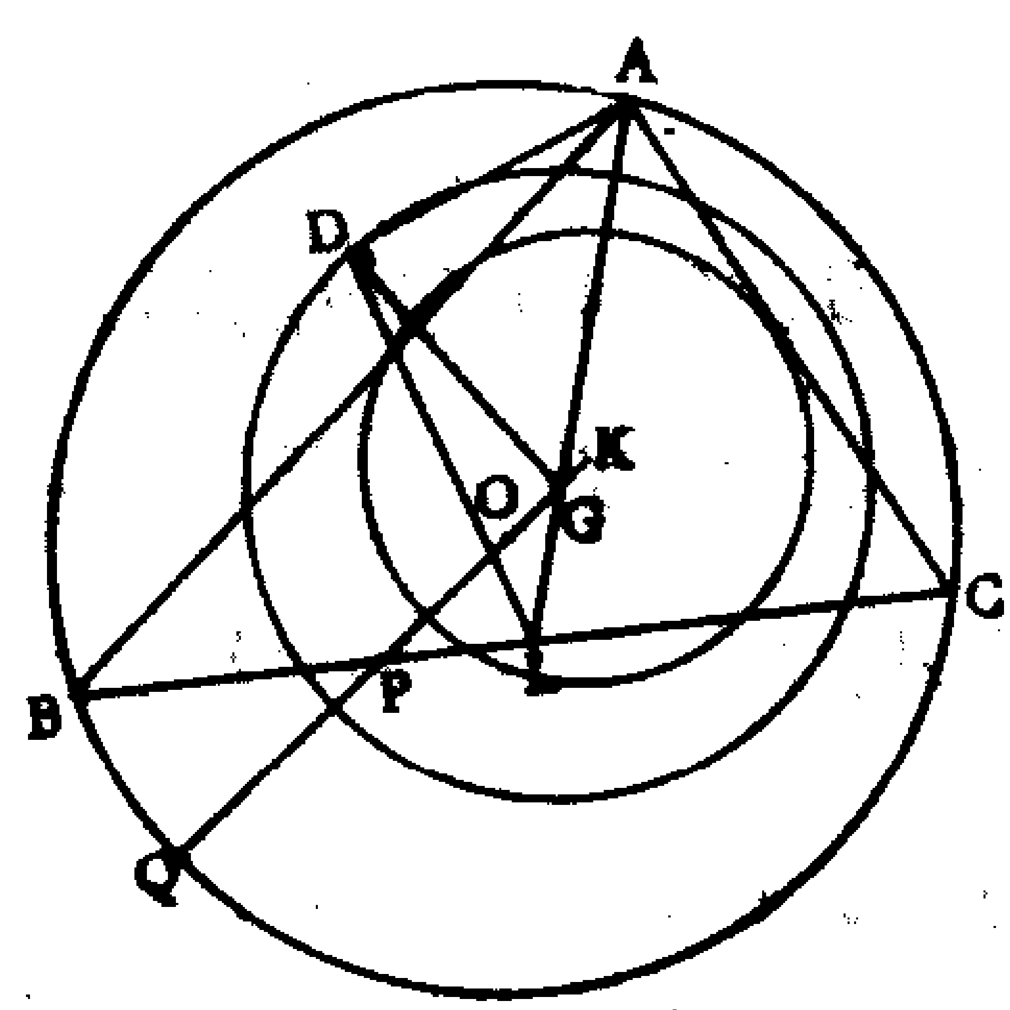
由习题十八第24题(1)有$OG^2=R^2-(a^2+b^2+c^2)/9$

$\therefore\ GP\cdot GQ=(a^2+b^2+c^2)/18$；

由习题十八第20题(2)有

$r^2=\mathrm{D}G^2=2\mathrm{D}L^2/3+\mathrm{D}A^2/3-2AL^2/9=2\mathrm{D}L^2/3+(AL^2-\mathrm{D}L^2)/3-2AL^2/9=\mathrm{D}L^2/3+AL^2/9=(a/2)^2/3+(b^2/2+c^2/2-a^2/4)/9=(a^2+b^2+c^2)/18$

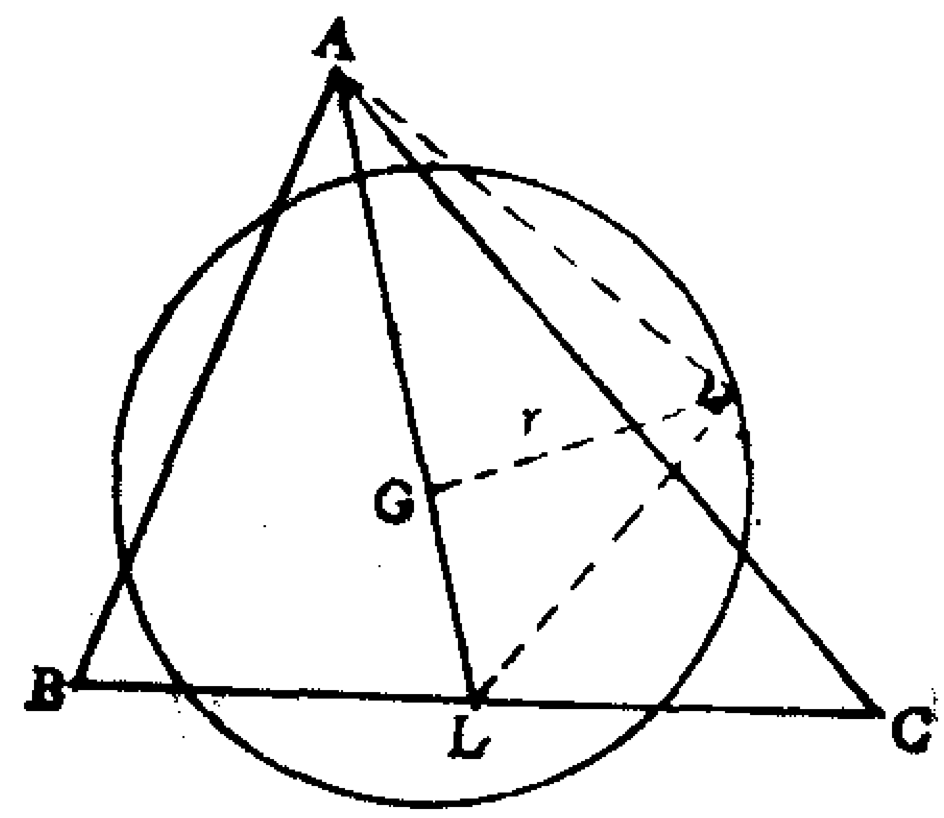
$\because\ GP\cdot GQ=r^2$，由定理172知$\odot G(r)$是$\odot O(R)$、$\odot K(R/2)$的反演基圆且$\odot O(R)$与$\odot K(R/2)$互为反象，由习题二十九第16题知，三圆$\odot O$、$\odot K$、$\odot G$共轴或同心。



图总—60

61. 以一固定线段为一边的所有三角形，它们的重圆组成共幂圆系。

所谓**共幂圆**系是这样的一组圆：其中每两圆的等幂轴会于一点。



图总—61

证明：如图设BC为定线段，$\odot G(r)$为动$\triangle ABC$的重圆，由上题可求得

$r^2=(a^2+b^2+c^2)/18$

$\because LG^2=LA^2/9=[(b^2+c^2)/2-a^2/4]/9$

$\therefore r^2-LG^2=(2a^2+a^2)/36=a^2/12$

即 L对$\odot G(r)$的幂为定值$a^2/12$，由此可见L为诸$\odot G(r)$的等幂点。

62. 设三点A、B、C对于$\odot O$的幂为a、b、c，则直线ABC或$\odot ABC$切于$\odot O$的必要且充分之条件为：

$\pm BC\sqrt{a}\pm CA\sqrt{b}\pm AB\sqrt{c}=O$……………①

证：（1）充分性。假设①成立。当A、B、C同在一直线l上时。

作$OD\perp AB$于D，在OD上取一点T，使$AT=AT_1$，

$\because \quad AT^2-BT^2=AD^2-BD^2=AO^2-BO^2$

$=AT_1{}^2-BT_2{}^2,$

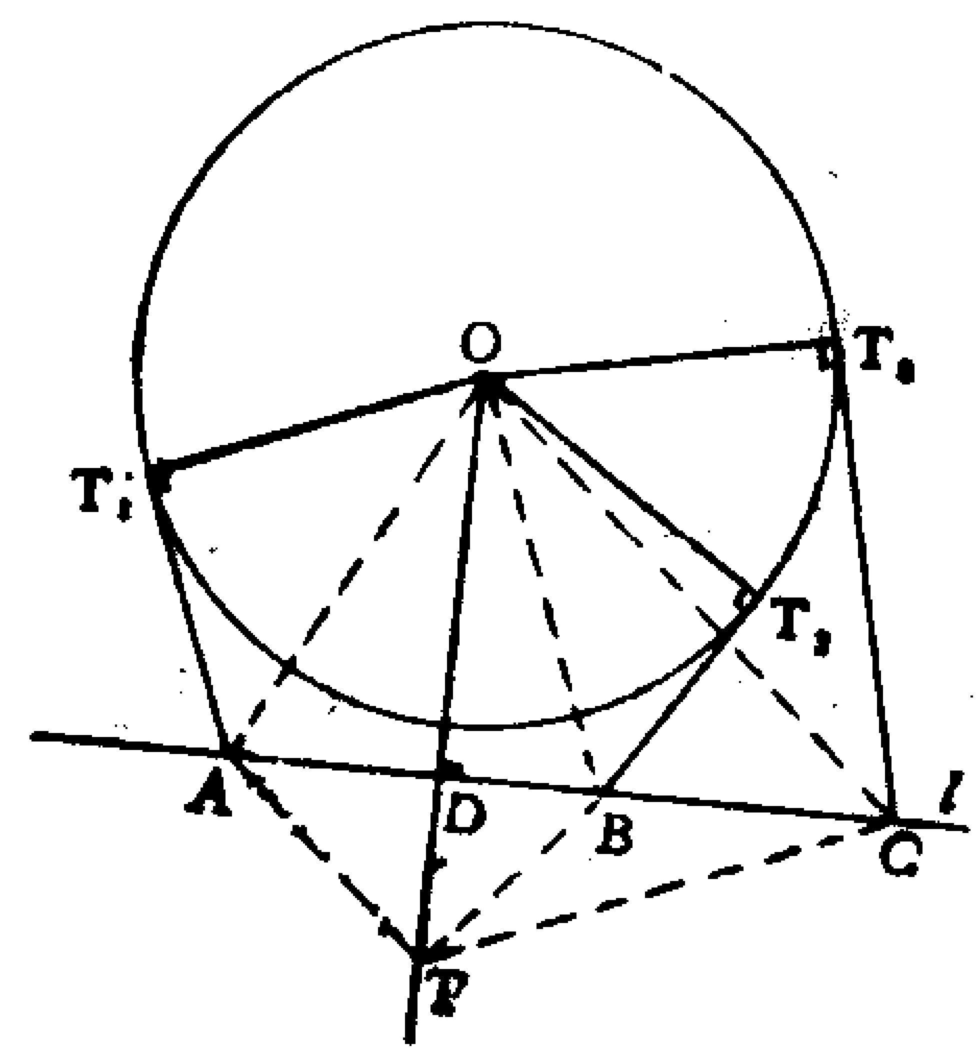
$\because \ AT=AT_1,$

$\therefore \ BT=BT_2.$

同理可证$CT=CT_3$。

$\therefore \quad \pm BC\cdot AT\pm CA\cdot BT\pm AB\cdot CT=0$

由复习题三第29题及复习题一第29题可知A、B、C、T共线。



图总—62(a)

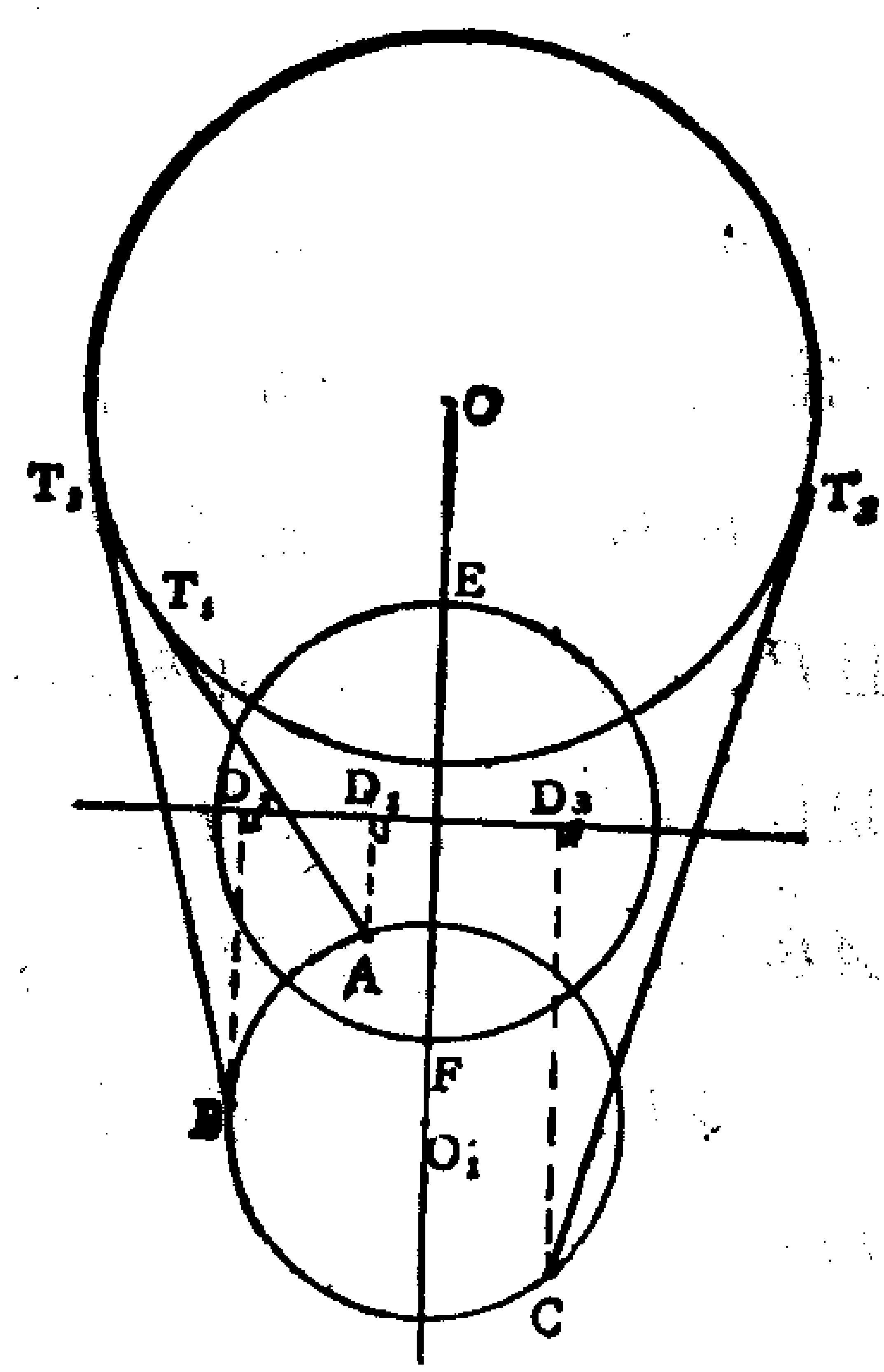
必要性。利用复习题一第29题易证。

(2)充分性。当A、B、C在$\odot O_1(r_1)$上时，设l为$\odot O$与$\odot O_1$的等幂轴，E、F为它们的极限点(见例题67的注2)。

由定理153的推论可知

$a=2\overline{AD}_1\cdot\overline{O_1O},$

$AE^2=2\overline{AD}_1\cdot\overline{O_1E}$(把$E$点看作"圆"，它与$\odot O$、$\odot O_1$同以$l$为等幂轴)。



图总—62(b)

$\therefore\quad a/AE^2=\overline{O_1O}/\overline{O_1E}$;

同理可求得 $b/BE^2=c/CE^2=\overline{O_1O}/\overline{O_1E}$。

$\therefore$ 可令$\sqrt{a}/AE=\sqrt{b}/BE=\sqrt{c}/CE=k$

$\therefore\quad \pm BC\cdot kAE\pm CA\cdot kBE\pm AB\cdot kCE=0$

即$\pm BC\cdot AE\pm CA\cdot BE\pm AB\cdot CE=0$

由复习题三第29、30题证明，可知A、B、C、E四点共圆。同理F也在$\odot O_1$上。

若$\odot O$与$\odot O_1$不相切，则$EF\neq 0$。

$\therefore$ EF必为$\odot O_1$直径，这与E、F为$\odot O$与$\odot O_1$的极限点矛盾。故$\odot O$与$\odot O_1$必相切。

必要性随之可得（此时E、F重合于$\odot O$与$\odot O_1$的切点）。

63．在三角形中，凡与外心共线的任一双等角共轭点，它们的垂足圆恒与九点圆相切。

证明： O是三角形ABC的外心，P、Q是一对等角共轭点且P、O、Q共线，由例题46知，P、Q在$\triangle ABC$上的六垂足D、D′、E、E'、F、F'共圆。令L、M、N为BC、CA、AB的中点，则$\odot LMN$为$\triangle ABC$的九点圆。

令L、M、N在直线PQ上的射影为X、Y、Z。P、M在LO、NZ上的射影分别为G、H。则有$\triangle POG\backsim\triangle MNH$，故有

$GP/OP=HM/NM \qquad \therefore LD/OP=ZY/NM$.

设P、Q在$\triangle ABC$上的垂足圆为$\odot O'$并令L、M、N对于$\odot O'$的幂为l、m、n，有

$l=LD\cdot LD'=(OP\cdot ZY/NM)\cdot(OQ\cdot ZY/NM)$,

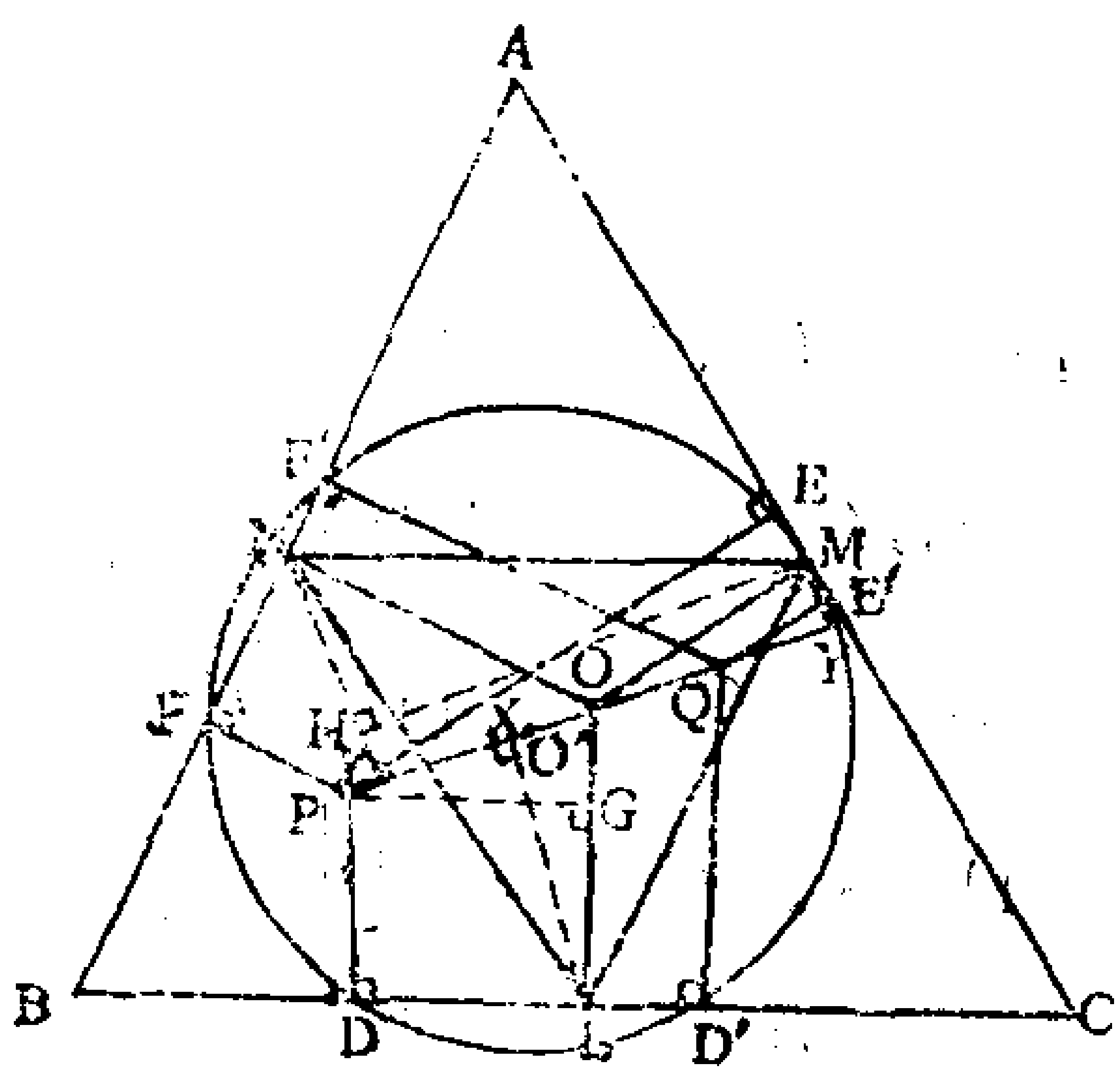
$\therefore \quad MN\sqrt{l}=\sqrt{OP\cdot OQ}\cdot YZ$。同理可得：

$LM\sqrt{n}=\sqrt{OP\cdot OQ}\cdot XY$，$NL\sqrt{m}=\sqrt{OP\cdot OQ}\cdot ZX$。

故 $\pm MN\sqrt{l}\pm NL\sqrt{m}\pm LM\sqrt{n}$

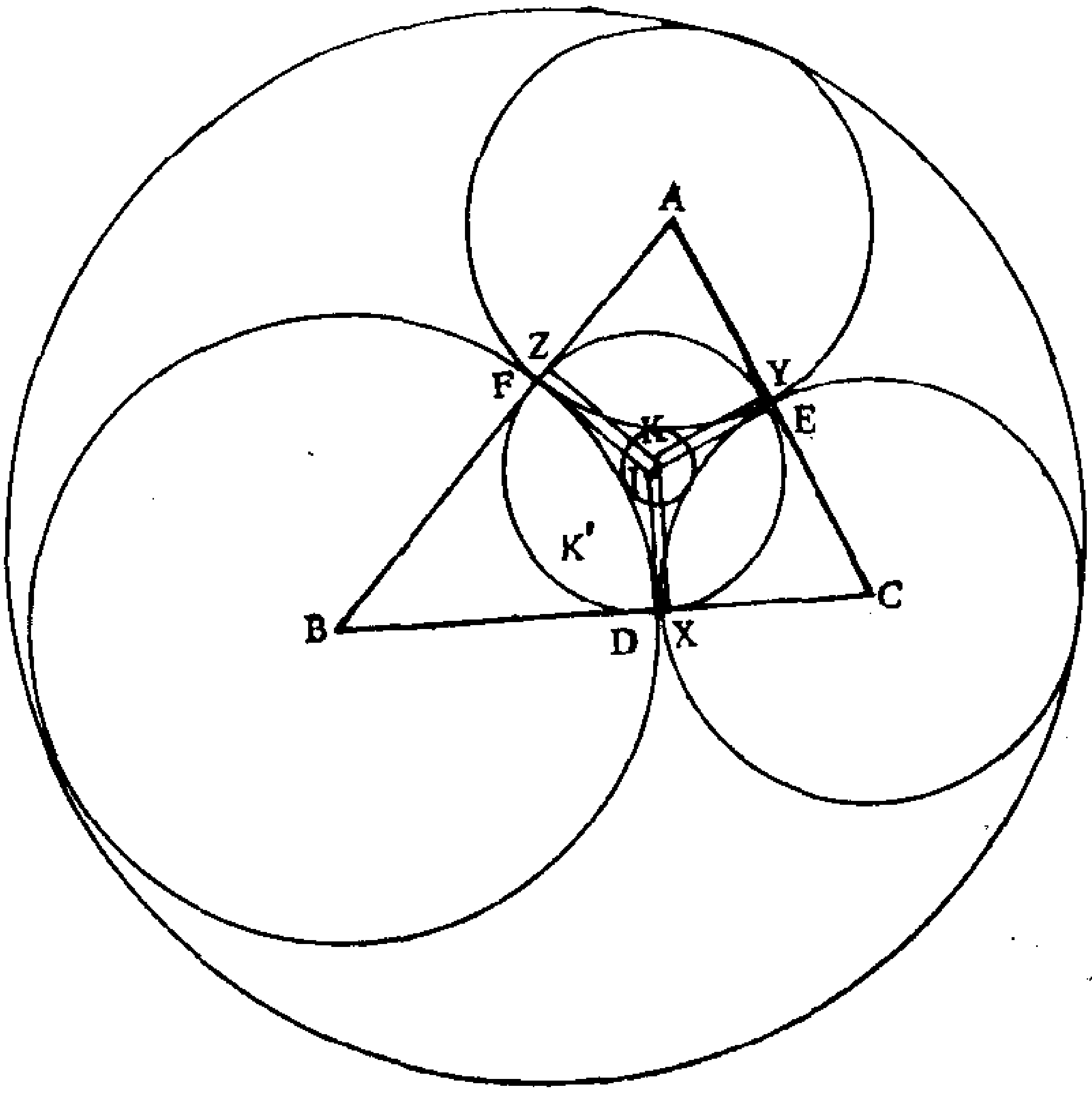
$=\sqrt{OP\cdot OQ}(\pm YZ\pm ZX\pm XY)=0$。

由上题知，$\odot LMN$与$\odot O'$相切。



图总—63

64. 设$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆，$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$同正交于$\odot I$，$\odot K$、$\odot K'$是$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$的公切圆。求证K、K'对于$\triangle ABC$的垂足圆均与$\odot I$相切。



图总—64

证明：设$\odot I$切$\triangle ABC$的三边于D、E、F，$\odot K$的半径为r，K对于$\triangle ABC$的三垂足为X、Y、Z、

$\because$ $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$分别过D、E、F中的两点，

$\therefore$ $BK = BD + r$，$CK = CD + r$。

有 $(BD + r)^2 - BX^2 = (CD + r)^2 - CX^2$，

故 $(BD + CD + 2r)(BD - CD) = (BX + CX)(BX - CX)$，

$\therefore$ $(a + 2r)(c - b) = a(c - b + 2XD)$，

故 $XD = r(c - b)/a$。

同理　$YE=r(a-c)/b$，$ZF=r(b-a)/c$。

∵　A、Y、K、Z四点共圆且AK为直径，由正弦定理

得　$YZ=AK\sin A=(AE+r)\sin A$

$=(s-a+r)\sin A$。

同理　$ZX=(s-b+r)\sin B$，

$XY=(s-c+r)\sin C$。

因为XD、YE、ZF是X、Y、Z对于⊙I的幂，令⊙ABC的半径为R，则有

$YZ\cdot XD+ZX\cdot YE+XY\cdot ZF=\sin A\cdot r(c-b)(s-a+r)/a+\sin B\cdot r(a-c)(s-b+r)/b+\sin c\cdot r(b-a)(s-c+r)/c$

$=r\cdot[(c-b)(s-a+r)+(a-c)(s-b+r)+(b-a)(s-c+r)]/2R=0$。

由62题知⊙XYZ与⊙I相切。

对于其除有关情况可类似处理。

65．四圆c_1、c_2、c_3、c_4有一公切圆k的必要且充分条件为：

$$\pm t_{41}\cdot t_{23}\pm t_{42}\cdot t_{31}\pm t_{43}\cdot t_{12}=0$$

式中的t_{ij}表c_i与c_j的公切线长，其为外公切线或内公切线，要看c_i、c_j与k系同态相切或异态相切而定(两圆与同一圆

相切，若均系外切或内切，则称为**同态相切**；如果系一外切一内切，便称为**异态相切**。）。（Casey定理）

当 k 未出现时，注意上式中的 t_{ij} 须符合下列三种情况之一，

1°都是外公切线；

2°有一足码相同的同是内公切线，其余都是外公切线；

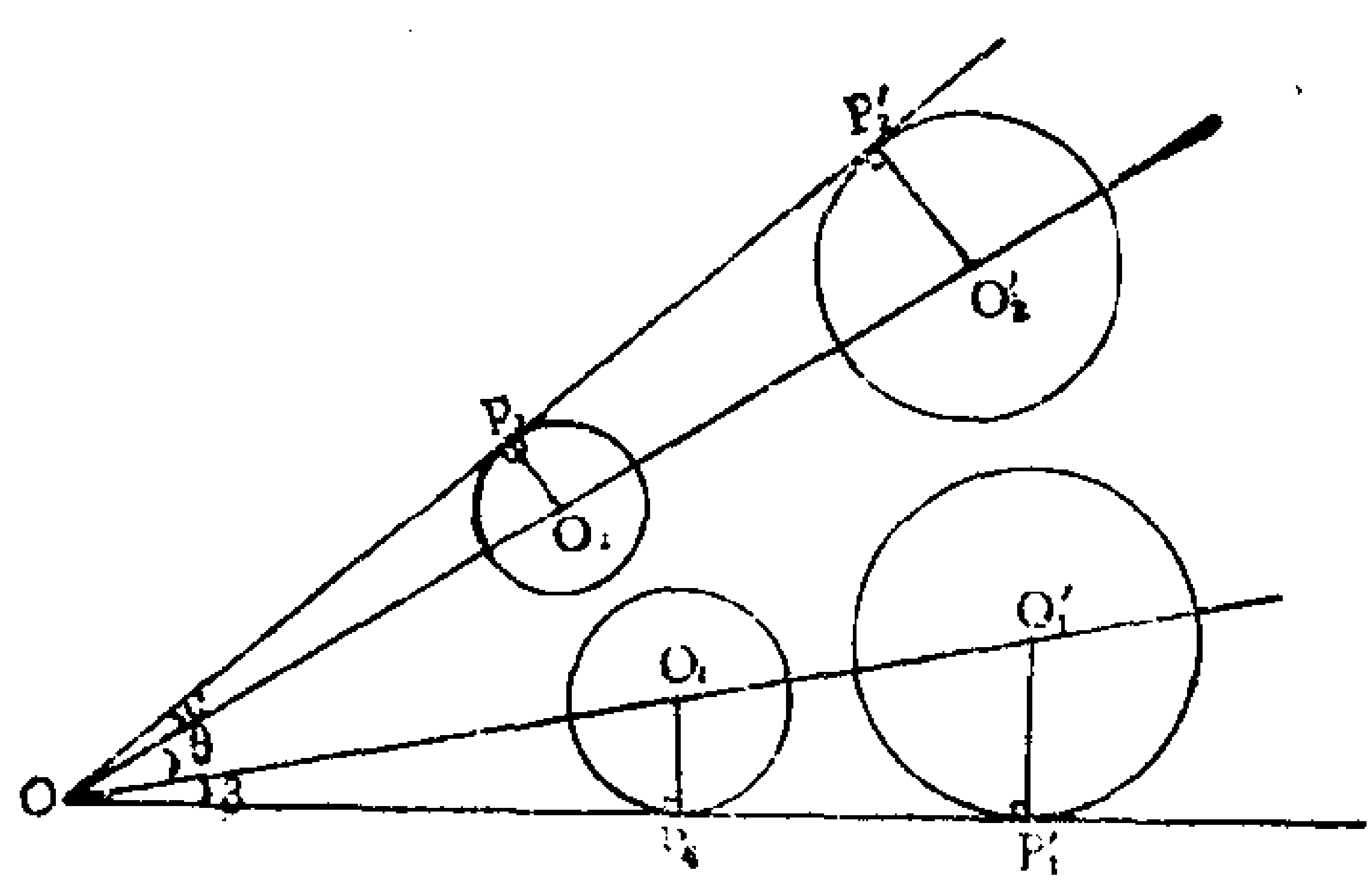
3°其中一项的两条同是外公切线，其他两项的四条都是内公切线。

万一 c_i 与 c_j 无公切线，可用下两式代替：

$$t_{ij}=\sqrt{d_{ij}^2-(r_i-r_j)^2},\quad t_{ij}=\sqrt{d_{ij}^2-(r_i+r_j)^2}$$

前者表外公切线，后者表内公切线，其中 r_i，r_j 是两圆的半径，d_{ij} 是圆心距。

引理：二圆经反演后，公切线平方与两圆的半径积之比不变。



图总—65(a)

证：如图设，以O为中心，q为反演幂，对$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$反演成$\odot O_1'(r_1')$、$\odot O_2'(r_2')$。

$$\therefore \quad t_{12}^2/r_1r_2=[O_1O_2^2-(r_1\pm r_2)^2]/r_1r_2=$$
$$=[OO_1^2+OO_2^2-2OO_1\cdot OO_2\cos\theta-(r_1\pm r_2)^2]/r_1r_2$$
$$=(OP_1^2+OP_2^2\pm 2r_1r_2-2OO_1\cdot OO_2\cos\theta)/r_1r_2$$
$$=(OP_1^2+OP_2^2)/OP_1\operatorname{tg}\beta OP_2\operatorname{tg}\alpha\pm 2-2\cos\theta/\sin\beta\sin\alpha$$
$$=(OP_1/OP_2+OP_2/OP_1)\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha\pm 2-2\cos\theta/\sin\beta\sin\alpha$$

…………………………………①

$$\because \quad OP_1\cdot OP_1'=OP_2\cdot OP_2'=q$$
$$\therefore \quad OP_1/OP_2=OP_2'/OP_1' \quad\text{…………………………②}$$

同理可证

$$t_{12}'^2/r_1'r_2'=(OP_1'/OP_2'+OP_2'/OP_1')\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha$$
$$\pm 2-2\cos\theta/\sin\beta\sin\alpha \quad\text{…………………………③}$$

由①、②、③便得

$$t_{12}^2/r_1r_2=t_{12}'^2/r_1'r_2'.$$

下面证原题：

必要性：设有公切圆k，据习题二十五第18题可作一点O，使O对$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$的视角相等。

现在以O为中心，任取一反演幂，施行反演变换，将$\odot O_1(r_1)$及圆k变成$\odot O_1'(r_1')$及圆k'。

不难知$r_1' = r_2' = r_3'$。

∴ $\odot O_1'O_2'O_3'$与$\odot O_4'(r_4' - r_1')$相切。

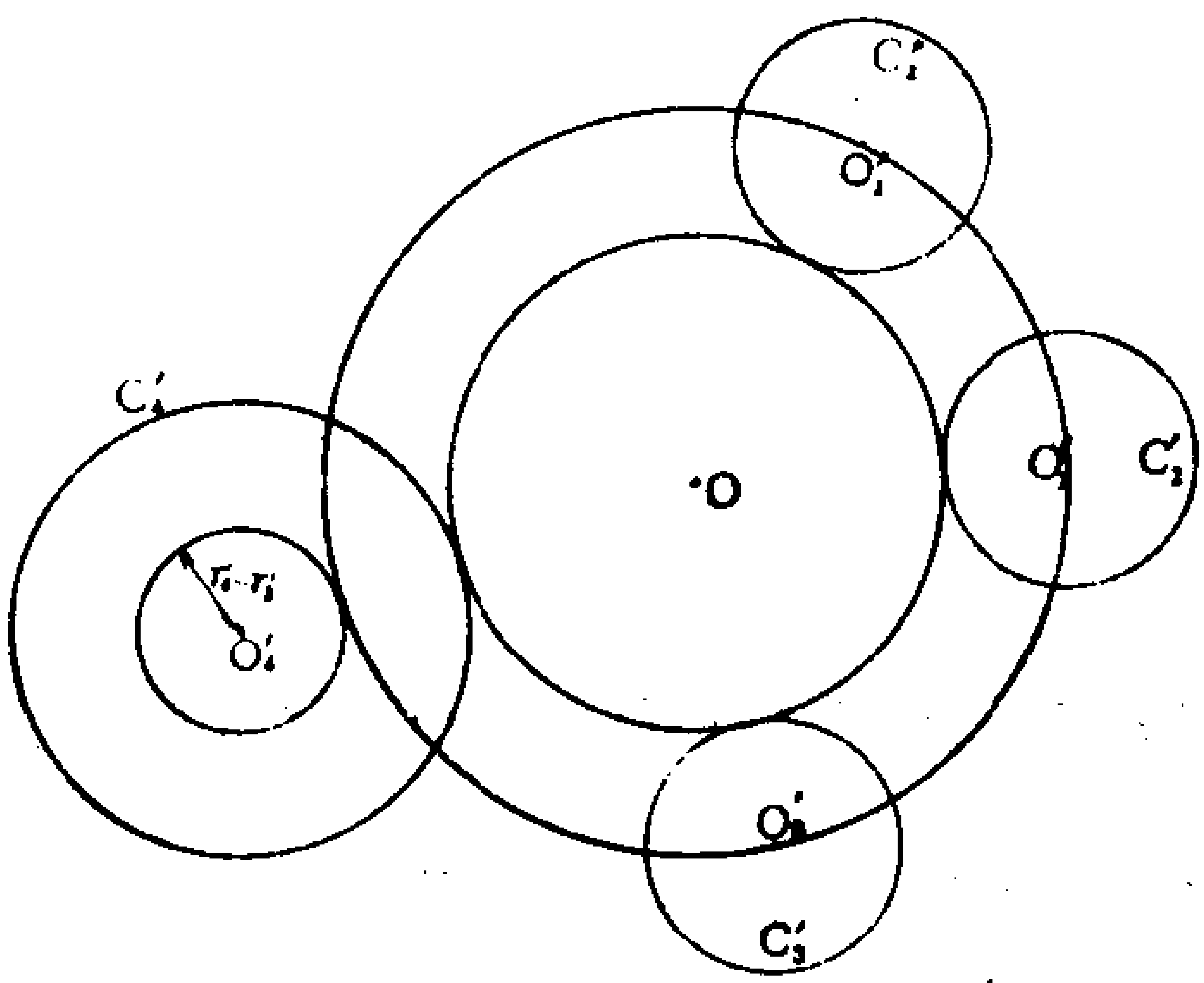
由62题知

$\pm\sqrt{O_1'O_4'^2 - (r_4 - r_1)^2}\,O^{2\prime}O_3' \pm$

$\sqrt{O_2'O_4'^2 - (r_4' - r_1')}\,O_1'O_3' \pm$

$\sqrt{O_3'O_4'^2 - (r_4' - r_1')^2}\,O_1'O_2' = 0$,

即$\pm t_{14}' \cdot t_{23}' \pm t_{24} \cdot t_{13}' \pm t_{34}' \cdot t_{21}' = 0$。



图总—65(b)

据引理，由$t_{14}'/\sqrt{r_1'r_4'} = t_{14}/\sqrt{r_1 r_4}$，……，将此代入上式简化便得：

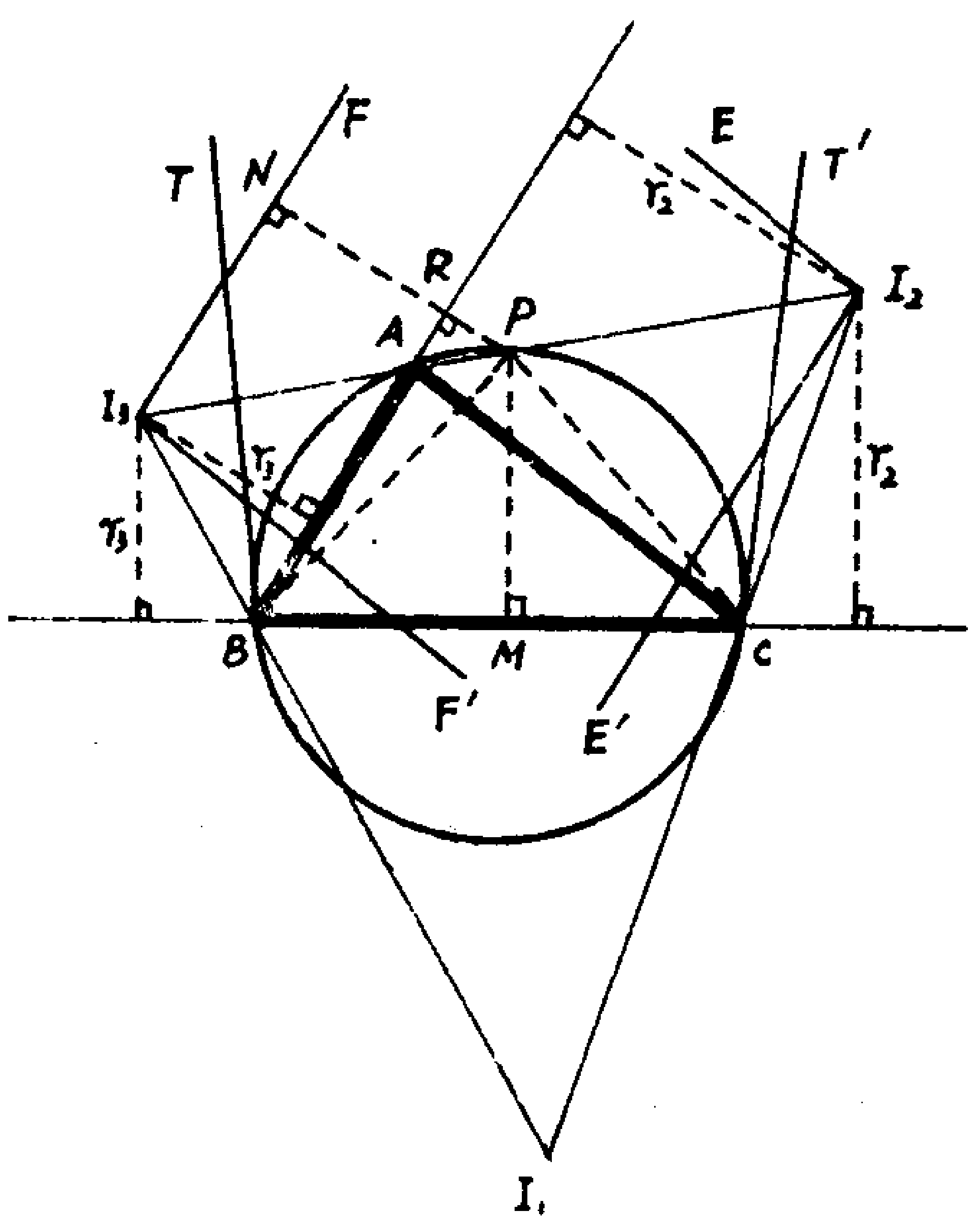
$\pm t_{14} \cdot t_{23} \pm t_{24} \cdot t_{13} \pm t_{34} \cdot t_{41} = 0$。

充分性：从必要性的证明中可得：$\odot O_1'O_2'O_3'$与$\odot O_4'(r_4' - r_1')$相切，令$\odot O_1'O_2'O_3'$为$\odot O(\rho)$

∴ $\odot O(\rho+r_1')$与$\odot O_1'(r_1')$、$\odot O_2'(r_1')$、$\odot O_3'(r_1')$相切，与$\odot O_4'(r_4')$也相切。

由此可见$\odot O_1'$、$\odot O_2'$、$\odot O_3'$、$\odot O_4'$有公切圆$\odot O(\rho+r_1')$。故$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$必有公切圆。

66. 在$\triangle ABC$中，设I_i、$I_j(i, j=0, 1, 2, 3; i\neq j)$是与$A$共线的内心或旁心，分别通过$I_i$、$I_j$作$AB$、$AC$的平行线，又各过$B$、$C$作外接圆的切线，试证这所作六线连同$BC$同切于一圆，这圆的中心是$AI_i$与外接圆的交点。余类推。



图总—66

证：如图，设$I_2E\parallel AC$、$I_2E'\parallel AB$、$I_3F\parallel AB$、$I_3F'\parallel AC$，BT与CT'切于$\odot ABC$，I_2I_3交$\odot ABC$于另一点P。

由复习题一第18题知

$PB=PC=PI_2=PI_3$，

$\therefore\quad PM=(r_2+r_3)/2$。

$\because\quad \angle TBP=\angle PCB=\angle PBC$

$\therefore\quad P$到BT的距离等于PM。

同理P到CT'的距离也等于PM，

即P到BC、BT、CT'的距离皆为$PM(r_2+r_3)/2$…①

又　$I_2E\parallel AC$、$I_2E'\parallel AB$，

$\therefore\quad \angle PI_2E=\angle PAC$（内错角），

$\angle PI_2E'=\angle I_3AB$（同位角）。

又　AI_2是$\angle A$的外角平分线

有　$\angle PI_2E=\angle PI_2E'$，

$\therefore\quad P$到I_2E、I_2E'的距离等于$PI_2\sin[(\pi-A)/2]$。

同理P到I_3F、I_3F'的距离等于$PI_3\sin[(\pi-A)/2]$。

而　$PI_2=PI_3$

$\therefore\quad P$到四直线I_2E、I_2E'、I_3F、I_3F'的距离相等。

…………………………………②

作$PN\perp I_3F$于N，而交BA于R，则$PR\perp BA$。

∵ P为I_2I_3中点，

∴ $PR=(r_2-r_3/2$，

$PN=(r_2-r_3)/2+RN$

$=(r_2-r_3)/2+r_3$

$=(r_2+r_3)/2$……………………………………③

由①、②、③得知I_2E、I_2E'、I_3F、I_3F'、BT、CT'、BC七直线同切于$\odot P[(r_2+r_3)/2]$。

余类推。

67．设$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆，AI、BI、CI交外接圆于L、M、N。作$\odot L$、$\odot M$、$\odot N$使分别切于BC、CA、AB，试证这所作三圆与$\odot I$有一公切圆。

证：如图，设AE_2、AF_1切于$\odot M$、$\odot N$，余类推。

∵ $\angle F_1AN'=2\angle NAN'=2\overset{\frown}{NB}/2=2\overset{\frown}{AB}/4$

$=\angle ACB$。

同理有$\angle E_2AM'=\angle ABC$，

∴ $\angle F_1AN'+\angle N'AM'+\angle M'AE_2=$

$\angle ACB+\angle A+\angle ABC=180°$，

故 F_1、A、E_2共线，

∴ E_2F_1为$\odot M$、$\odot N$公切线，余类推。

又 $E_2F_1 = AE_2 + AF_1$

$$= AM_1 + AN_1 = (AB + AC)/2,$$

而 $DL_1 = (DB - DC)/2$

$= [(BC + BA - CA)/2 - (CB + CA - AB)/2]/2$

$= (AB - AC)/2,$

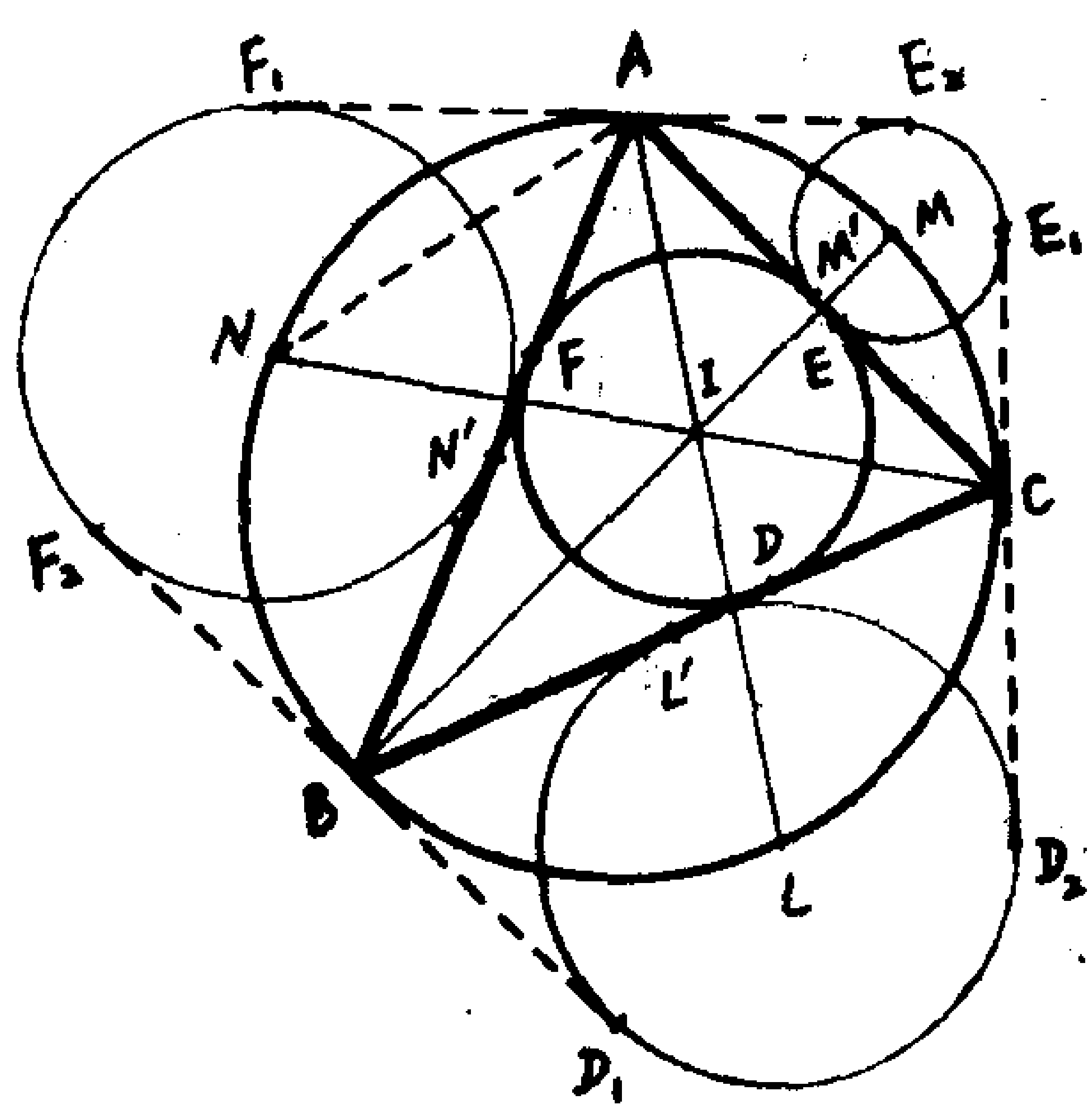
∴ $E_2F_1 \cdot DL_1 = (AB^2 - AC^2)/4.$

同理 $F_2D_1 \cdot EM_1 = (BC^2 - AB^2)/4.$

$D_2E_1 \cdot FN_1 = (BC^2 - AC^2)/4$

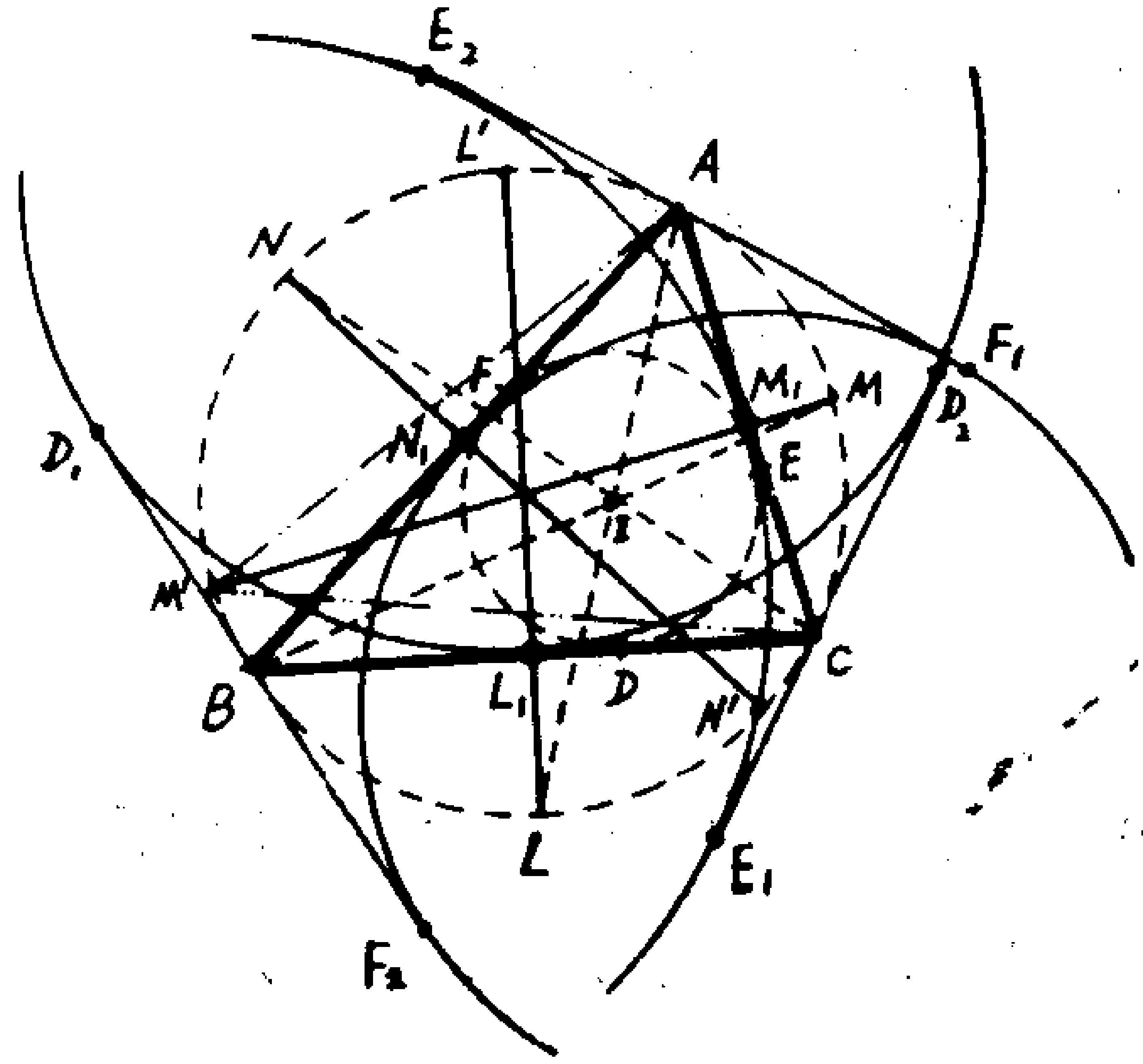
∴ $F_1E_2 \cdot DL_1 + F_2D_1 \cdot EM_1 - D_2E_1 \cdot FN_1 = 0$

由65题得⊙L、⊙M、⊙N有公切圆。



图总—67

68. 承上题，设LL'、MM'、NN'是外接圆的直径。更作$\odot L'$、$\odot M'$、$\odot N'$使分别切于BC、CA、AB，试证这所作三圆与$\odot I$也有一公切圆。



图总—68

证：如图，设$\odot L'$切BC于L_1，不难知L_1为BC中点，其余类推。

AE_2、AF_1切于$\odot M'$、$\odot N'$

$\because \angle E_2AC = 2\angle M'AC = 2[(180° - \angle AM'C)/2]$

$= 180° - \angle ABC$，

$\therefore \angle E_2AB = \angle E_2AC - \angle A$

$= 180° - \angle ABC - \angle A$

$= \angle C$，

同理$\angle F_1AC=\angle B$,

$\therefore \angle E_2AB+\angle BAC+\angle F_1AC$

$=\angle C+\angle A+\angle B$

$=180°$。

故E_2F_1为$\odot M'$、$\odot N'$的公切线。

$\because E_2F_1=AN_1+AM_1=(AB+AC)/2$,

$DL_1=(AB-AC)/2$,

$\therefore E_2F_1\cdot DL_1=(AB^2-AC^2)/4$。

余下，类似上一题，此略。

69。设$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆，AI、BI、CI分别交BC、CA、AB于D、E、F。以AD、BE、CF各为弦作圆使分别切于BC、CA、AB，试证这所作三圆与$\odot I$有一公切圆。

证：如图设，$\odot ABC$半径$OA=R$。作$DO_1\perp BC$交AO于O_1，则

$\angle O_1DA=90°-\angle ADB$

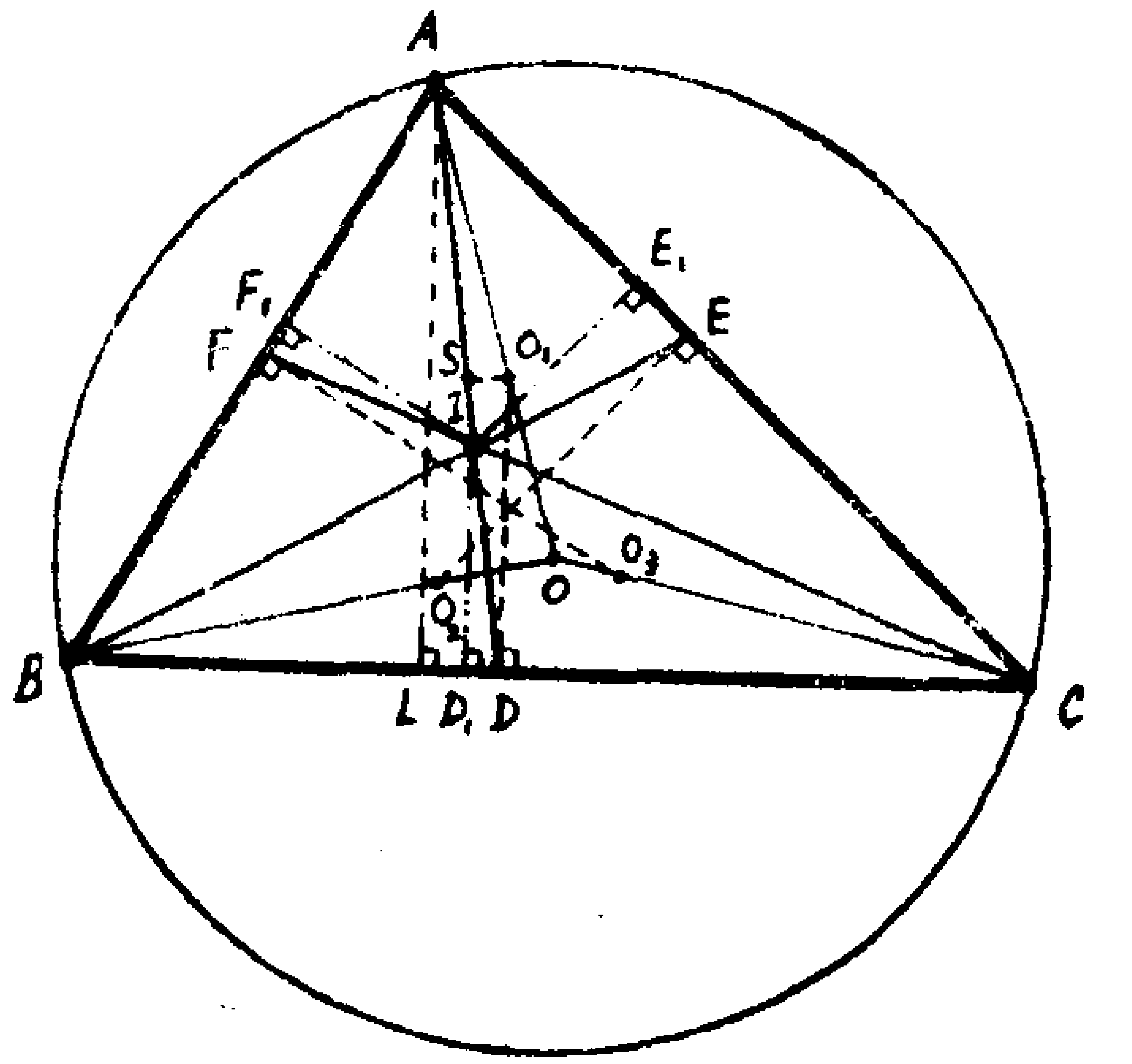
$=90°-(\angle C+\angle A/2)$

$=(\angle B-\angle C)/2$,

而$\angle O_1AD=(\angle B-\angle C)2$,

$\therefore \angle O_1DA=\angle O_1AD$。

由此可见$\odot O_1(O_1A)$就是以AD为弦而切于BC的圆，令$O_1A = r_1$，余下类推。



图总—69

设AL为BC边的高，作$O_1S \perp AD$于S，

$\because \triangle ADL \backsim \triangle ASO_1$，

$\therefore AL/AD = \frac{1}{2}AD/AO_1$，

$\therefore r_1 = AD^2/2AL$

$= [bc - bca^2/(b+c)^2]/(bc/R)$

$= R[1 - a^2/(b+c)^2]$。

同理$r_2 = R[1 - b^2/(c+a)^2]$。

$\because O_1O_2{}^2 = OO_1{}^2 + OO_2{}^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \text{Cos}\angle AOB$

$= (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)$

$\cdot (R-r_2)(2R^2-c^2)/2R^2$

$=[a^2R/(b+c)^2]^2+[b^2R/(c+a)^2]^2$

$-[a^2b^2(2R^2-c^2)]/(b+c)^2(c+a)^2$，

$\therefore t_{12}{}^2=O_1O_2{}^2-(r_1-r_2)^2$

$=O_1O_2{}^2-[a^2R/(b+c)^2-b^2R/(c+a)^2]^2$

$=a^2b^2c^2/(b+c)^2(c+a)^2$，

故$t_{12}=abc/(b+c)(c+a)$（代$\odot O_1$、$\odot O_2$外公切线）.

而$FF_1=BF_1-BF=(a+c-b)/2-ac/(a+b)$

$=(a-b)(a+b-c)/2(a+b)$，

$\therefore t_{12}\cdot FF_1=abc(a-b)(a+b-c)/2(a+b)$

$\cdot (b+c)(c+a)$。

同理：$t_{23}\cdot DD_1=abc(b-c)(b+c-a)/2(a+b)$

$\cdot (b+c)(c+a)$，

$t_{31}\cdot EE_1=abc(a-c)(a+c-b)/2(a+b)$

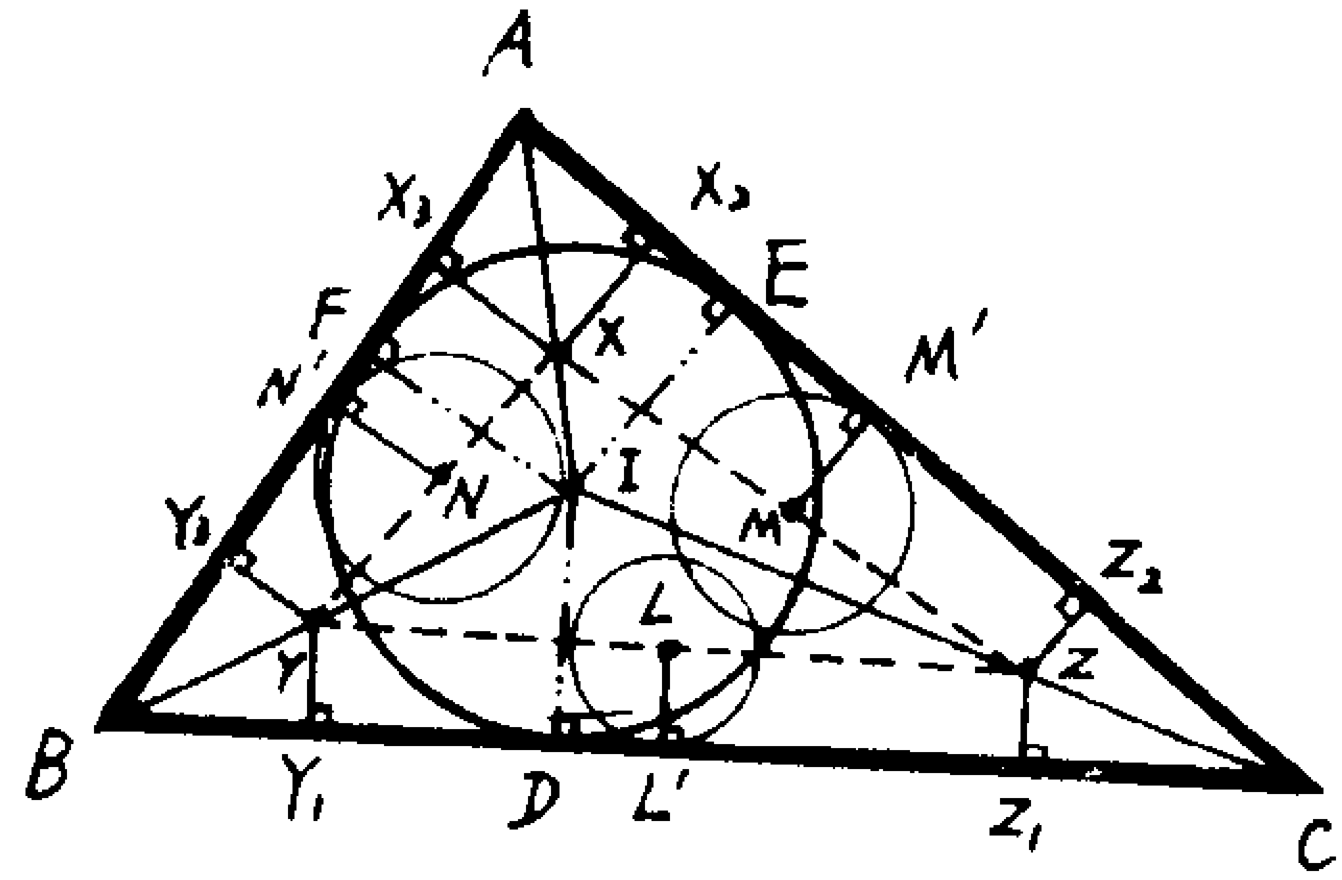
$\cdot (b+c)(c+a)$。

$\therefore t_{12}\cdot FF_1+t_{23}\cdot DD_1-t_{31}\cdot EE_1=0$，

故由65题知：$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot I$有一公切圆。

70。设$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆。在AI、BI、CI三线上各任取一点X、Y、Z两两相连，并以YZ、ZX、XY的中点各为心作圆使分别切于BC、CA、AB，试证这

所作三圆与$\odot I$有一公切圆。



图总—70

证： 如图，设L、M、N为YZ、ZX、XY的中点。

$\odot M$、$\odot N$的外公切线记为t_{MN}，余下类推。

有 $t_{MN}=\sqrt{MN^2-(MM'-NN')^2}$

$=\sqrt{MN^2-[(ZZ_2+XX_2)/2-(YY_3+XX_3)/2]^2}$

$=\sqrt{MN^2-[(ZZ_2-YY_3)/2]^2}$

$=\sqrt{(YZ/2)^2-[(ZZ_1-YY_1)/2]^2}$

$=Y_1Z_1/2=(DZ_1+DY_1)/2$,

而$DL'=(DZ_1-DY_1)/2$,

$\therefore t_{MN}\cdot DL'=(DZ_1{}^2-DY_1{}^2)/4$.

同理 $t_{NL}\cdot EM'=(EZ_2{}^2-EX_2{}^2)/4$,

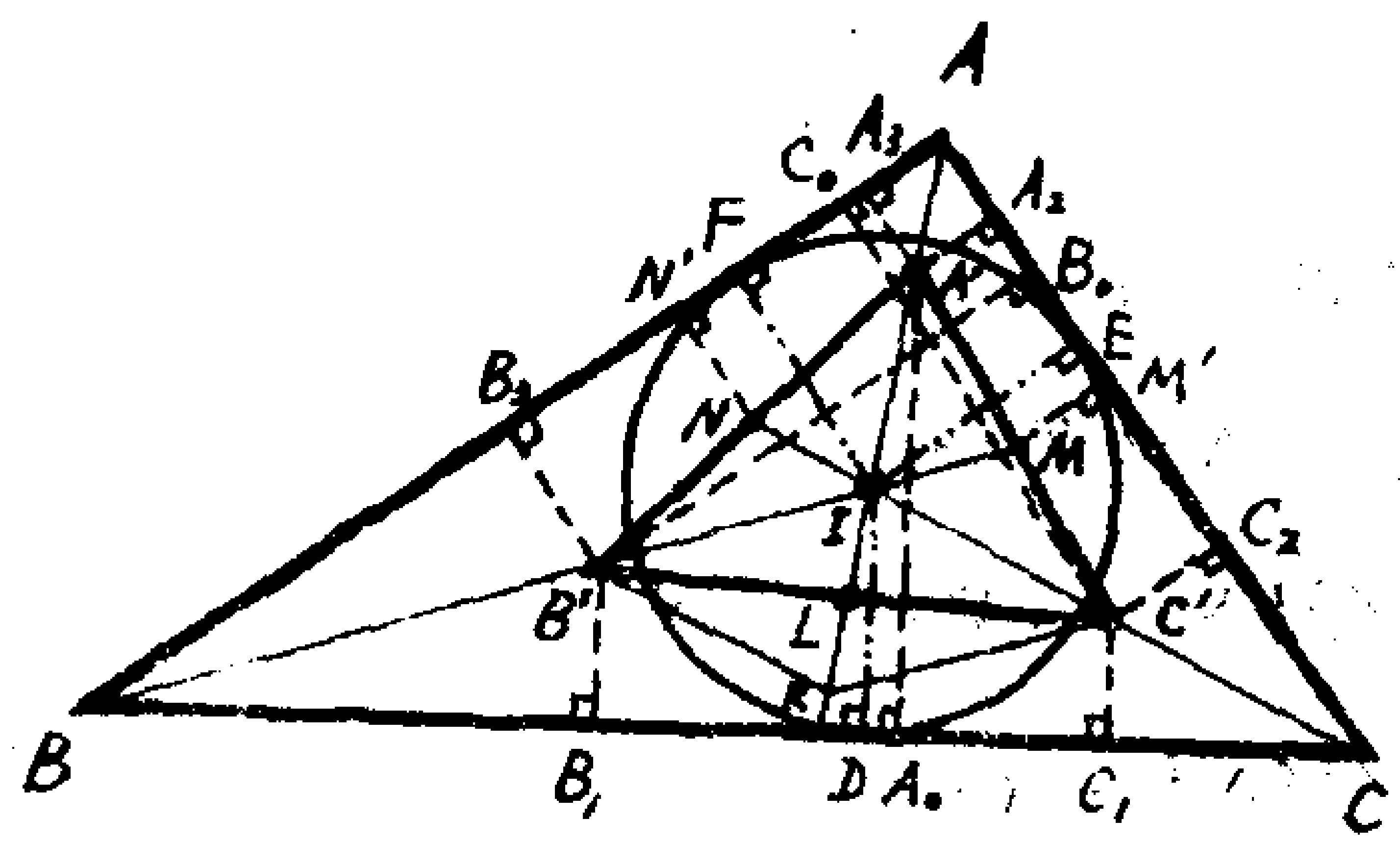
$t_{LM}\cdot FN'=(FY_3{}^2-FX_3{}^2)/4$.

而$DZ_1=EZ_2$，$DY_1=FY_3$，$EX_2=FX_3$,

$\therefore -t_{MN}\cdot DL'+t_{NL}\cdot EM'+t_{LM}\cdot FN'=0$,

故由65题得$\odot I$、$\odot L$、$\odot M$、$\odot N$有一公切圆。

71. 设$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆，在AI、BI、CI三线上各取一点A'、B'、C'，使I是$\triangle A'B'C'$的重心（怎样作？）。试证各以A'、B'、C'为心且分别切于BC、CA、AB的三圆与$\odot I$有一公切圆。



图总—71

关于$\triangle A'B'C'$的作法如下：

在AI上任取一点R，作$RB' \parallel IC$交IB于B'，$RC' \parallel IB$交IC于C'，RI延长线上取一点A'，使$IA' = IR$。

则$\triangle A'B'C'$就是所要求作的。

现在证明：

设$\odot A'$切BC于A_0，余下类推。

$\odot B'$与$\odot C'$的外公切线为$t_{B'C'}$，

$t_{B'C'} = \sqrt{B'C'^2 - (B'B_0 - C'C_0)^2}$。

$\because B'I : IM = C'I : IN = 2 : 1$,

$$\therefore \begin{cases} B'B_0 = 3IE - 2MM' \\ C'C_0 = 3IF - 2NN', \end{cases}$$

故$B'B_0 - C'C_0 = 2(-MM' + NN')$

$$= -(A'A_2 + C'C_2) + (A'A_3 + B'B_3)$$

$$= B'B_3 - C'C_2$$

$$= B'B_1 - C'C_1,$$

$\therefore t_{B'C'} = \sqrt{B'C'^2 - (B'B_1 - C'C_1)^2}$

$$= B_1C_1.$$

同理$t_{C'A'} = C_2A_2$，$t_{A'B'} = A_3B_3$。

$\because B_0E = 2EM'$（由于$BI = 2IM$）

$$= EC_2 - EA_2 (M'为C_2A_2中点),$$

$\therefore t_{C'A'} \cdot B_0E = (EC_2 + EA_2)(EC_2 - EA_2)$

$$= EC_2^2 - EA_2^2.$$

同理 $t_{A'B'} \cdot C_0F = FB_3^2 - FA_3^2$,

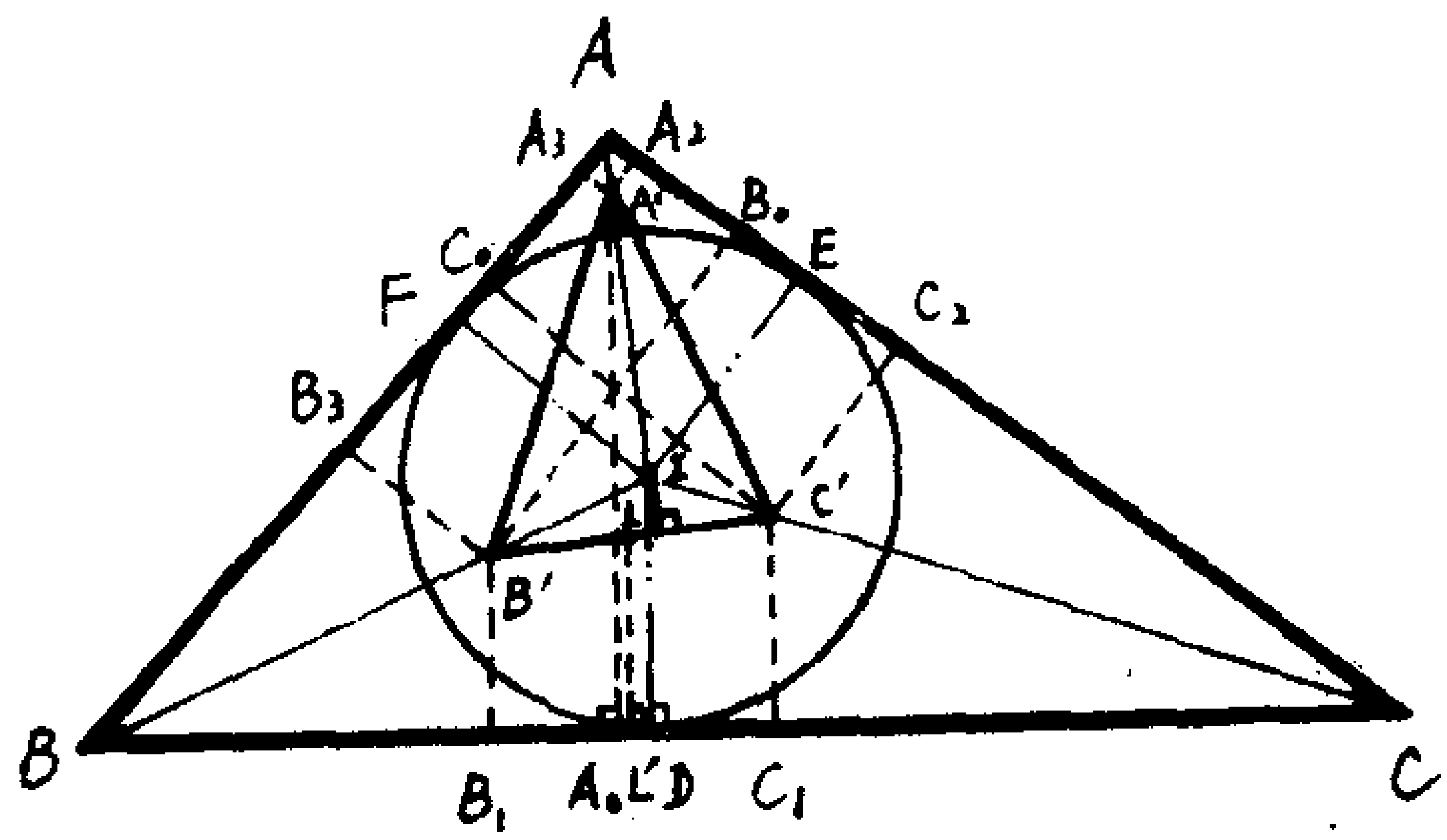
$t_{B'C'} \cdot A_0D = DB_1^2 - DC_1^2$.

$$又 \begin{cases} DB_1 = FB_3 \\ DC_1 = EC_2 \\ FA_3 = EA_2, \end{cases}$$

$\therefore t_{B'C'} \cdot A_0D - t_{A'B'} \cdot C_0F + t_{C'A'} \cdot B_0E = 0$.

故由65题知$\odot A'$、$\odot B'$、$\odot C'$、$\odot I$有一公切圆。

72. 设$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆。在AI、BI、CI三线上各取一点A'、B'、C'，使I是$\triangle A'B'C'$的垂心。试证各以A'、B'、C'为心且分别切于BC、CA、AB的三圆与$\odot I$有一公切圆，这公切圆与$\odot I$的切点亦即$\triangle ABC$的九点圆与$\odot I$的切点。



图总—72

证：如图，类似上题设，则

$$t_{B'C'}=\sqrt{B'C'^2-(B'B_0-C'C_0)^2},$$

$\because C'B'\cos\angle B'C'C_0=C'B'\cos(\angle A/2)$,

$B'C'\cos\angle C'B'B_0=B'C'\cos\angle(\angle A/2)$,

$\therefore C'B'\cos\angle B'C'C_0=B'C'\cos\angle C'B'B_0$,

即$C'C_0-B'B_3=B'B_0-C'C_2$.

$\therefore B'B_0-C'C_0=C'C_2-B'B_3$.

$$t_{B'C'}=\sqrt{B'C'^2-(C'C_2-B'B_3)^2}$$

$=\sqrt{B'C'-(C'C_1-B'B_1)^2}$

$=B_1C_1$。

$\because A_0B_1=A'B'\sin\angle B'A'A_0$

$=A'B'\sin(\angle C/2)$

$=2R'\sin\angle C'\sin(\angle C/2)$（$R'$为$\odot A'B'C'$半径）

$=2R'\sin[(\angle A+\angle B)/2]\sin(\angle C/2)$

$DC_1=IC'\sin\angle C'ID$

$=IC'\cos(\angle C/2)$

$=2R'\cos\angle C'\cos(\angle C/2)$

$=2R'\sin(\angle C/2)\sin[(\angle A+\angle B)/2]$

$\therefore A_0B_1=DC_1$，B_1C_1与A_0D中点重于L'

$\therefore DA_0=2DL'=DB_1-DC_1$

$\therefore t_B{}'o'\cdot DA_0=(DB_1+DC_1)(DB_1-DC_1)$

$=DB_1{}^2-DC_1{}^2$

余下同前一题。

73。在$\triangle ABC$中，设$\odot I_0(r_0)$、$\odot I_1(r_1)$、$\odot I_2(r_2)$、$\odot I_3(r_3)$依次是内切圆及对着A、B、C的旁切圆。命$\odot I_i$、$\odot I_j$、$\odot I_k$两两的第四公切线（即除BC、CA、AB外的公切线）交成的三角形为$\triangle l$，试证$\triangle I_iI_jI_k$的外心P_l是$\triangle_l$的内心或旁心，而$\triangle_l$中以P_l为心的内切圆或旁切圆的半径分

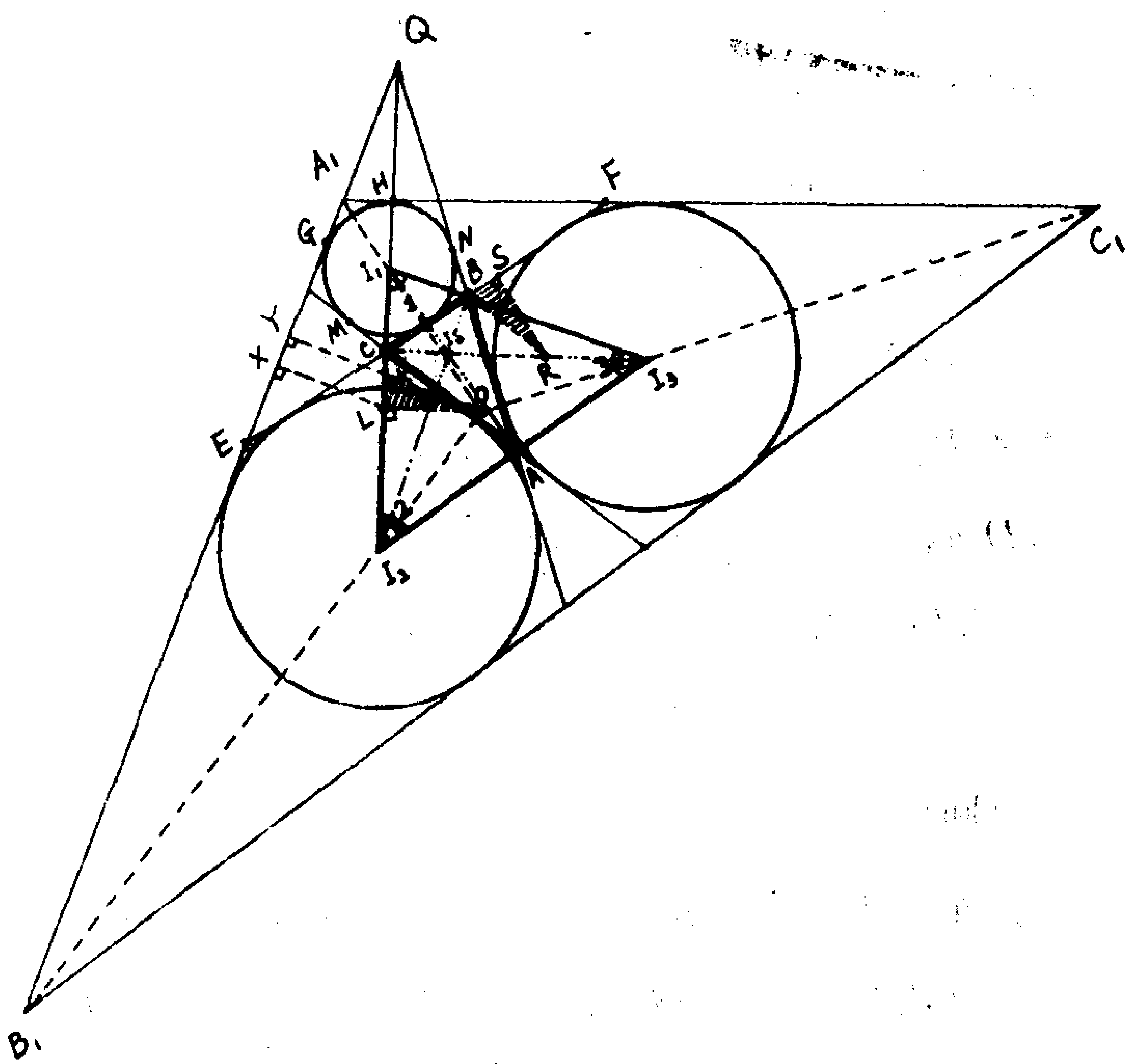
别为：

(1) $\rho_0 = 2R + r_0 = (r_0 + r_1 + r_2 + r_3)/2$

(2) $\rho_1 = |2R - r_1| = |-r_0 - r_1 + r_2 + r_3|/2$

(3) $\rho_2 = |2R - r_2| = |-r_0 + r_1 - r_2 + r_3|/2$

(4) $\rho_3 = |2R - r_3| = |-r_0 + r_1 + r_2 - r_3|/2$



复总—73

证：如图，设O为$\triangle I_1I_2I_3$的外心，则

$OI_1 \perp BC$，$\odot I_1$切BC于D。

$\because ED=EG=AN$（关于I_1I_2对称），

$FD=AN$（关于I_1I_3对称），

$\therefore EG=HF$，$A_1E=A_1F$，

$\therefore AD$平分$\angle EAF$且$AD\perp EF$。

又$OI_1\perp BC$，

$\therefore A_1O$平分$\angle B_1A_1C_1$。

同理B_1O平分$\angle C_1B_1A_1$。

$\therefore O$为$\triangle A_1B_1C_1$的内心。

下证（1）：

如图，$\rho_0=OY=OK+LX$，而L是I_1I_2中点，

$\therefore LX=(r_1+r_2)/2$。

设R为I_0I_3中点，则$RS=(r_0+r_3)/2$。

$$\begin{aligned}\because \angle SBR&=90^\circ-\angle 3+2(90^\circ-\angle 1)\\&=180^\circ-\angle 3-2\angle 1+90^\circ\\&=\angle 2-\angle 1+90^\circ,\end{aligned}$$

$\therefore \angle BRS=\angle 1-\angle 2$。

$$\begin{aligned}\text{而}\angle LOK&=\angle LQX\\&=\angle LQA=\angle BAI_3-\angle 2\\&=\angle 1-\angle 2.\end{aligned}$$

又$OL=I_0I_3/2=RB$，

$\therefore \triangle KOL \cong \triangle SRB$,

$\therefore OY = OK + LX = RS + LX$

$= (r_0 + r_3)/2 + (r_1 + r_2)/2$

$= (r_0 + r_1 + r_2 + r_3)/2$。

即$\rho_0 = (r_0 + r_1 + r_2 + r_3)$。

而$2R + r_0 = (r_0 + r_1 + r_2 + r_3)/2$(复习题三第12题),

故(1)得证。

同理可证(2)、(3)、(4)。

74。承上题，求证:

(1)四圆$\odot I_i(\rho_i)$有一公切圆c;

(2)四圆$\odot P_i(\rho_i)$也有一公切圆c';

(3)c与c'的半径同等于$5R/2$。

证:同上题图及所设。

(1):令$\odot I_i(r_i)$与$\odot I_j(r_j)$的公切线为t_{ij}',

$\odot I_i(\rho_i)$与$\odot I_j(\rho_j)$的公切线为t_{ij}。

$\because t_{10} = \sqrt{\overline{I_1 I_0}^2 - (\rho_1 - \rho_0)^2}$

$= \sqrt{\overline{I_1 I_0}^2 - (2R - r_1 - 2R - r_0)^2}$

$= \sqrt{\overline{I_1 I_0}^2 - (r_1 + r_0)^2} = t_{10}'$,

同理 $t_{02} = t_{02}'$, $t_{03} = t_{03}'$, $t_{23} = t_{23}'$, $t_{12} = t_{12}'$,

$t_{31} = t_{31}'$。

又$\odot OI_i(r_i)$与$\triangle ABC$的九点圆有公切圆，此据复习题三第21题。

$\therefore \pm t_{10}'t_{23}' \pm t_{31}'t_{02}' \pm t_{03}'t_{12}' = 0$（65题）

$\therefore \pm t_{10}t_{23} \pm t_{31}t_{20} \pm t_{03}t_{12} = 0$,

由65题得$\odot I_i(\rho_i)$有一公切圆。

（2）：

$\because P_{I_0}P_{I_1} \perp\!\!\!= I_0I_1$，$P_{I_1}P_{I_2} \perp\!\!\!= I_1I_2$，$P_{I_2}P_{I_3} \perp\!\!\!= I_2I_3$，

$\therefore$垂心组$I_0I_1I_2I_3 \cong P_{I_0}P_{I_1}P_{I_2}P_{I_3}$。

由（1）便知$\odot P_i(\rho_i)$也有一公切圆c'且与圆c全等。

（3）：$\because \triangle ABC$的九点圆$\odot O'(R/2)$与$\odot OI_0$（r_0）内切，与$\odot I_1(r_1)$、$\odot I_2(r_2)$、$\odot I_3(r_3)$外切（复习题三第21题），

$\therefore O'I_0 = R/2 - r_0 = 5R/2 - (2R + r_0) = 5R/2 - \rho_0$,

$\therefore \odot O'$（$5R/2$）与$\odot I_0$（ρ_0）内切。

同理可证$\odot O'$（$5R/2$）与$\odot I_1$（ρ_1）、$\odot I_2$（ρ_2）、$\odot I_3$（ρ_3）外切。

注：用（3）的方法证明（1）更简洁。

75. 三角形的三条中横线将原形划分为四个合同三角形。在这四个三角形中，各内切圆有一公切圆，对应的旁切圆也各有一公切圆，这所得的四个公切圆又同原三角形的中

点三角形的九点相切。

证：关于有公切圆的证明，利用第65题不难得。

设$\odot O'''(r''')$是四个内切圆的公切圆，则必有$O'''O_1 = O'''O_2 = O'''O_3 = r''' + r/2$，

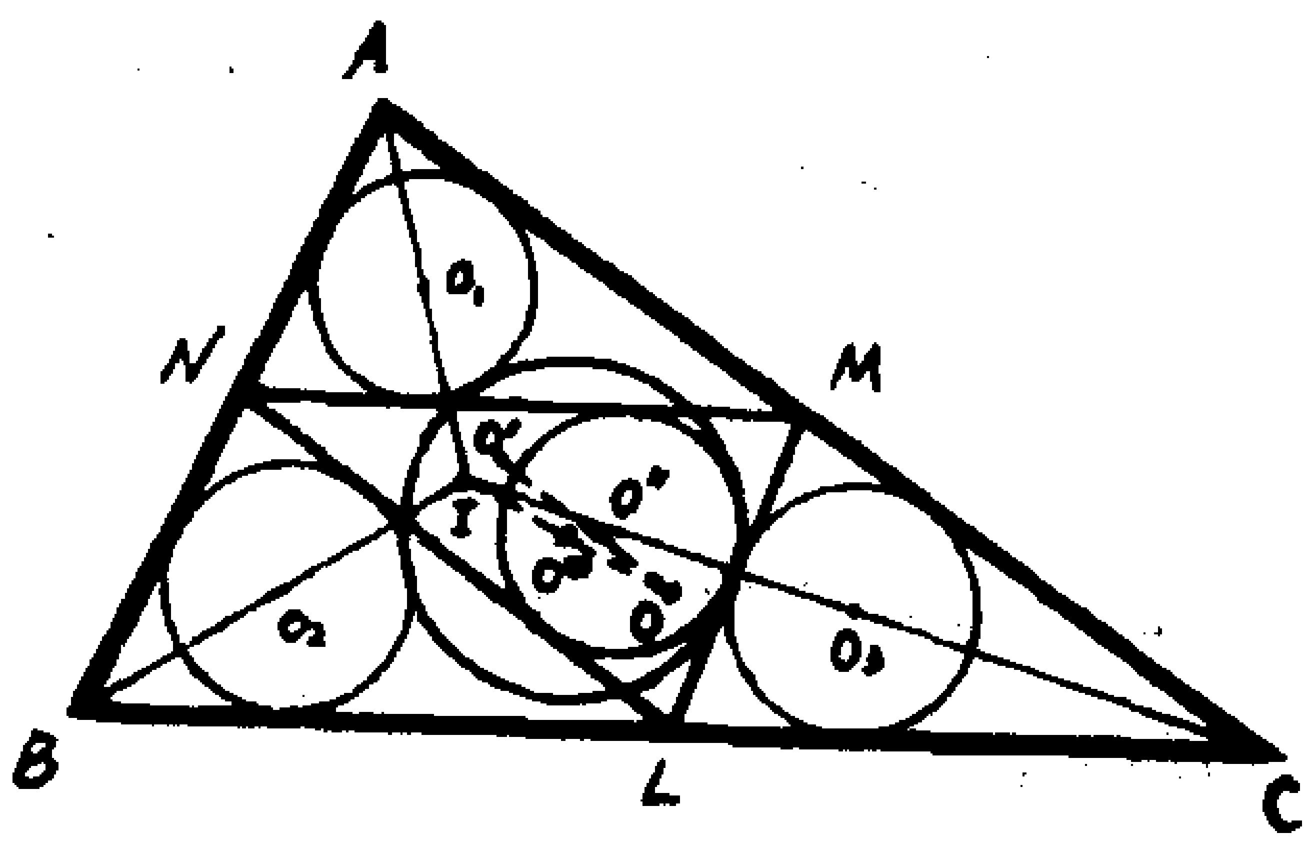
即O'''为$\triangle O_1O_2O_3$外心，

$\therefore O'''O_1 = R/2$，故$r''' = (R-r)/2$。

$\because \triangle O_1O_2O_3$与$\triangle ABC$关于$I(1/2)$位似，

$\therefore IO''' : IO = 1 : 2$。

$\therefore O'''$为OI中点。



图总—75

设$\odot O''(R/4)$是$\triangle LMN$九点圆，O'为$\triangle LMN$的外心，$\therefore O''$是OO'中点。

$\therefore O''O''' = O'I/2 = (R/2 - r)/2$（复习题三第21题），

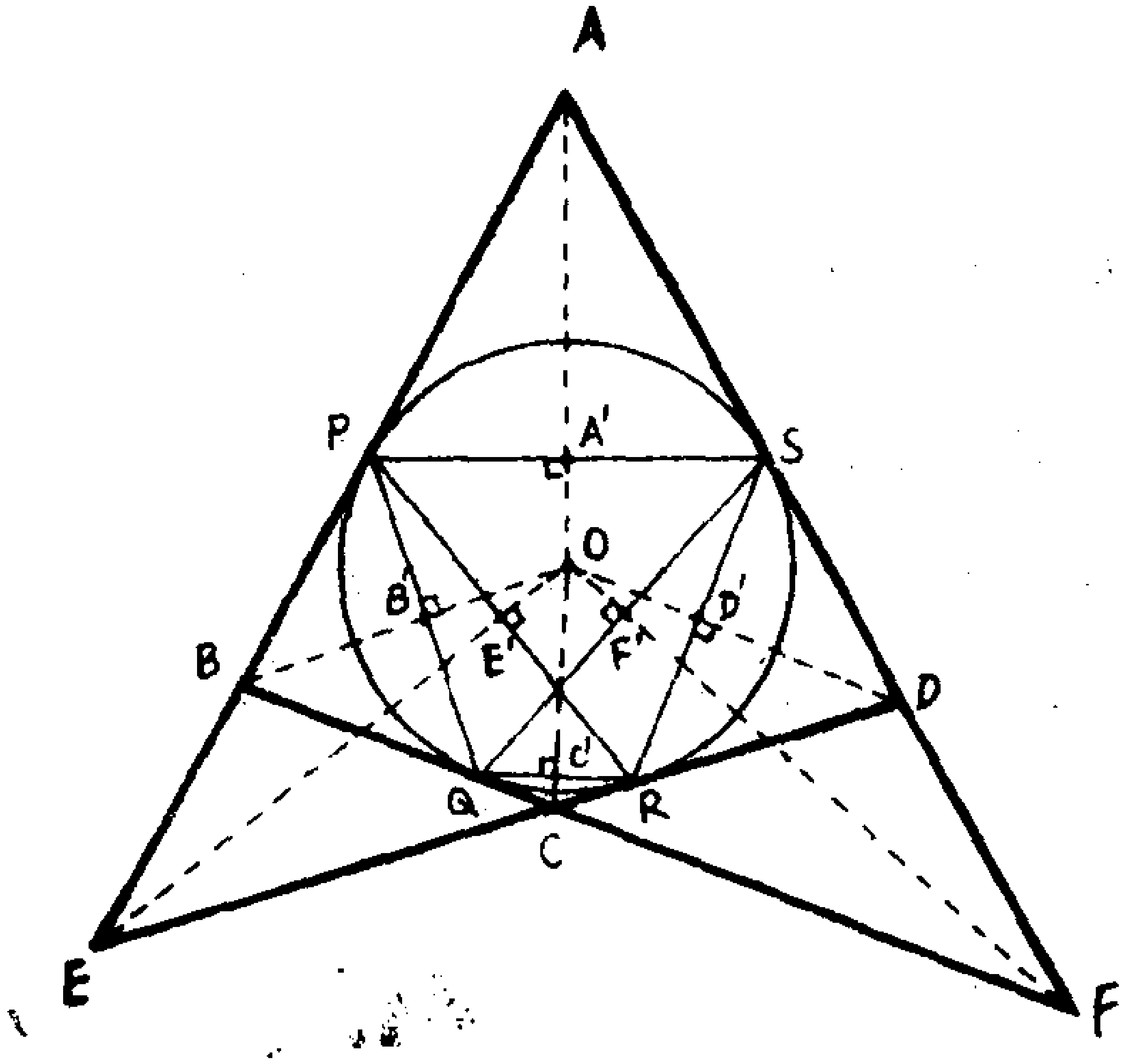
$\therefore \odot O''(R/4)$与$\odot O'''[(R-r)/2]$相外切。

即$\odot O''(R/4)$与四个内切圆的公切圆

$\odot O'''[(R-r)/2]$相切。

同理可证$\odot O''(R/4)$与各对应的四旁切圆的公切圆相切。

76．作一圆的四条切线使交成四个三角形，试证它们的外接圆有一公切圆。



图总—76

证：如图设，四边形$ABCD$外切于$\odot O(r)$，施行反演变换$O(r^2)$，则A、B、C、D、E、F分别变为A'、B'、C'、D'、E'、F'且分别是SP、PQ、QR、RS、RP、SQ、的中点。

∴ 只要证$\odot A'E'D'$、$\odot A'B'F'$、$\odot B'C'E'$、

$\odot C'D'F'$有公切圆即可。而这四圆圆心O_1、O_2、O_3、O_4共圆（由习题十六第7题及欧拉线定理和位似变换得），而且半径都为$R/2$，

$\therefore \pm O_1O_2 \cdot O_3O_4 \pm O_2O_3 \cdot O_1O_4 \pm O_2O_4 \cdot O_1O_3 = 0$，

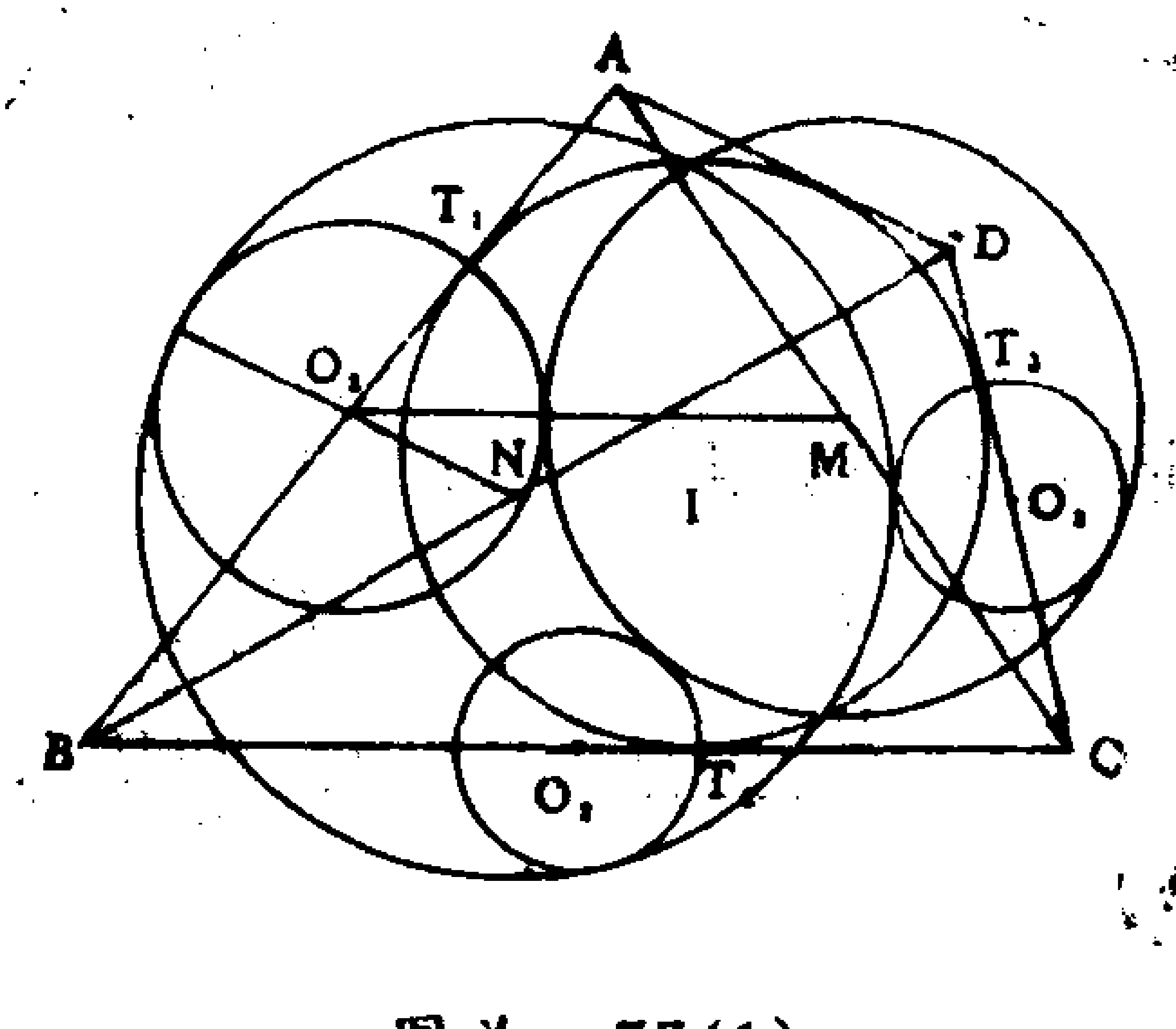
且$O_iO_j = t_{ij}$（$\odot O_i$与$\odot O_j$的外公切线）。

由65题知$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$有一公切圆ω'。施行反演变换$O(r^2)$将圆ω'变成圆ω。由反演原理知圆ω与$\odot AED$、$\odot ABF$、$\odot BCE$、$\odot CDF$均相切。

77. 设四边形有内切圆或旁切圆$\odot I$，则

（1）直径各为四边的圆有两公切圆；

（2）以四边中点各为心且正交于$\odot I$的圆也有两公切圆，这两公切圆分别与前两公切圆同心。



图总—77(1)

证：（1）如图，设四边形$ABCD$有内切圆$\odot I$，O_1、O_2、O_3、O_4为$ABCD$各边中点，M、N为AC、BD中点。

令$AB=2a$、$BC=2b$、$CD=2c$、$DA=2d$，

作$\odot M(b-a)$。

$\because O_1M=BC/2=b=a+(b-a)$，

$\therefore \odot O_1(a)$与$\odot M(b-a)$外切（利用$a+c=b+d$）。

同理可证$\odot O_2(b)$与$\odot M(b-a)$内切，$\odot O_3(c)$与$\odot M(b-a)$内切，$\odot O_4(d)$与$\odot M(b-a)$外切。

故$\odot M(b-a)$为$\odot O_1(a)$、$\odot O_2(b)$、$\odot O_3(c)$、$\odot O_4(d)$的一公切圆。

同理$\odot N(a-d)$也是他们的公切圆。

（2）：作$\odot M[(AT_1+CT_2)/2]$，

$\because O_1T_1+[(AT_1+CT_2)/2]$

$=(BT_1-BO_1)+[(AT_1+CT_2)/2]$

$=2BT_1/2-BA/2+[(AT_1+CT_2)/2]$

$=[(BT_1+AT_1)+(BT_2+CT_2)-BA]/2$

$=BC/2=O_1M$，

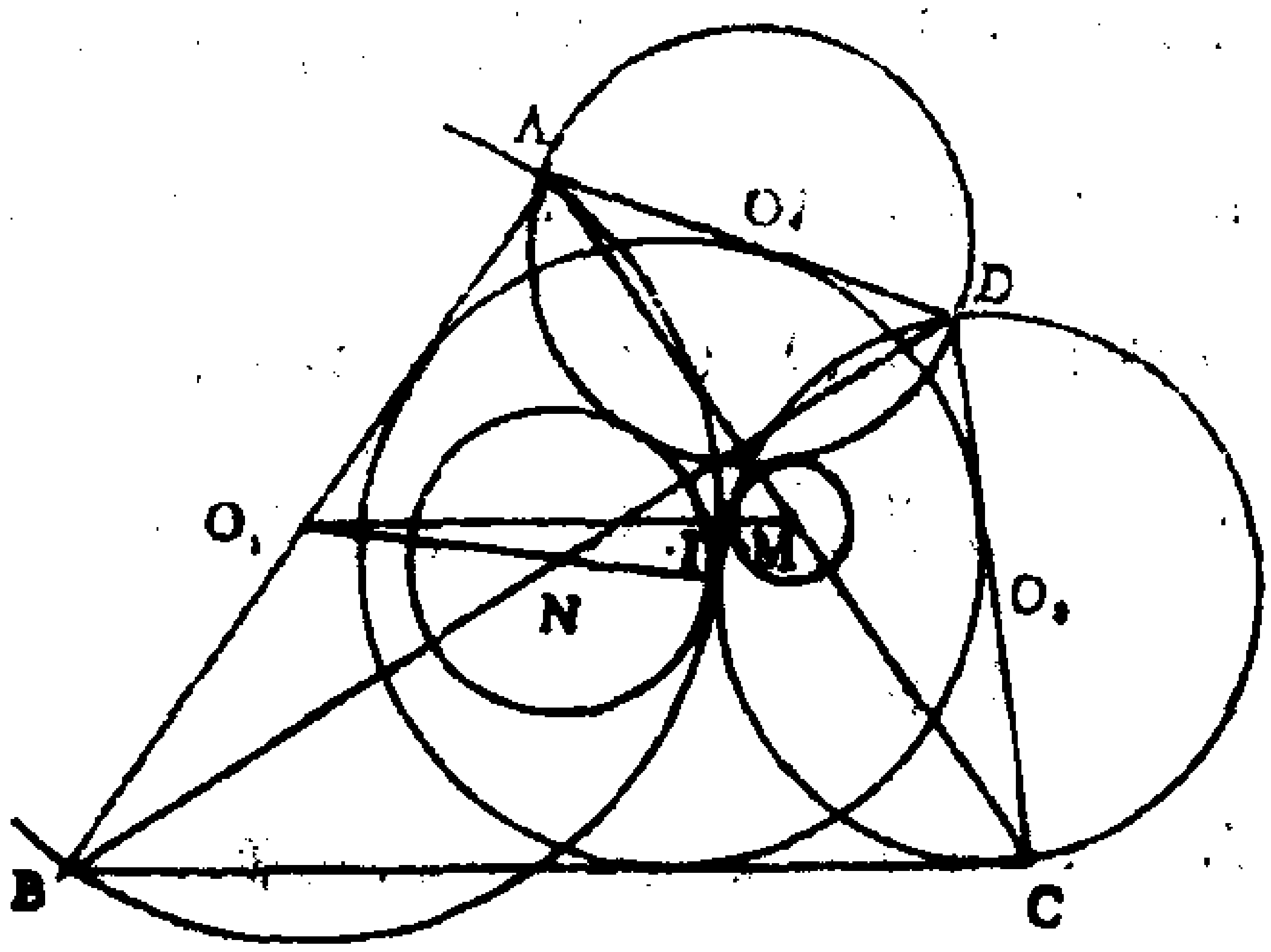
$\therefore \odot O_1(O_1T_1)$与$\odot M[(AT_1+CT_2)/2]$外切。

同理可证$\odot O_2(O_2T_2)$与$\odot M[(AT_1+CT_2)/2]$外切，$\odot O_3(O_3T_3)$与$\odot M[(AT_1+CT_2)/2]$内切，$\odot O_4(O_4T_4)$

与$\odot M[(AT_1+CT_2)/2]$内切（注意：$AT_1=AT_4$等切线性质）。

故$\odot M[(AT_1+CT_2)/2]$为$\odot O_1(O_1T_1)$、$\odot O_2(O_2T_2)$、$\odot O_3(O_3T_3)$、$\odot O_4(O_4T_4)$的一公切圆。

同理$\odot N(a-d-AT_1)$也是他们的公切圆。



图总—77(2)

78. 一三角形的内外角三等分线共十二条，求证：

（1）在六条内角三等分线中，与每边相邻的两线各交于一点，这三交点是一个正三角形的顶点；

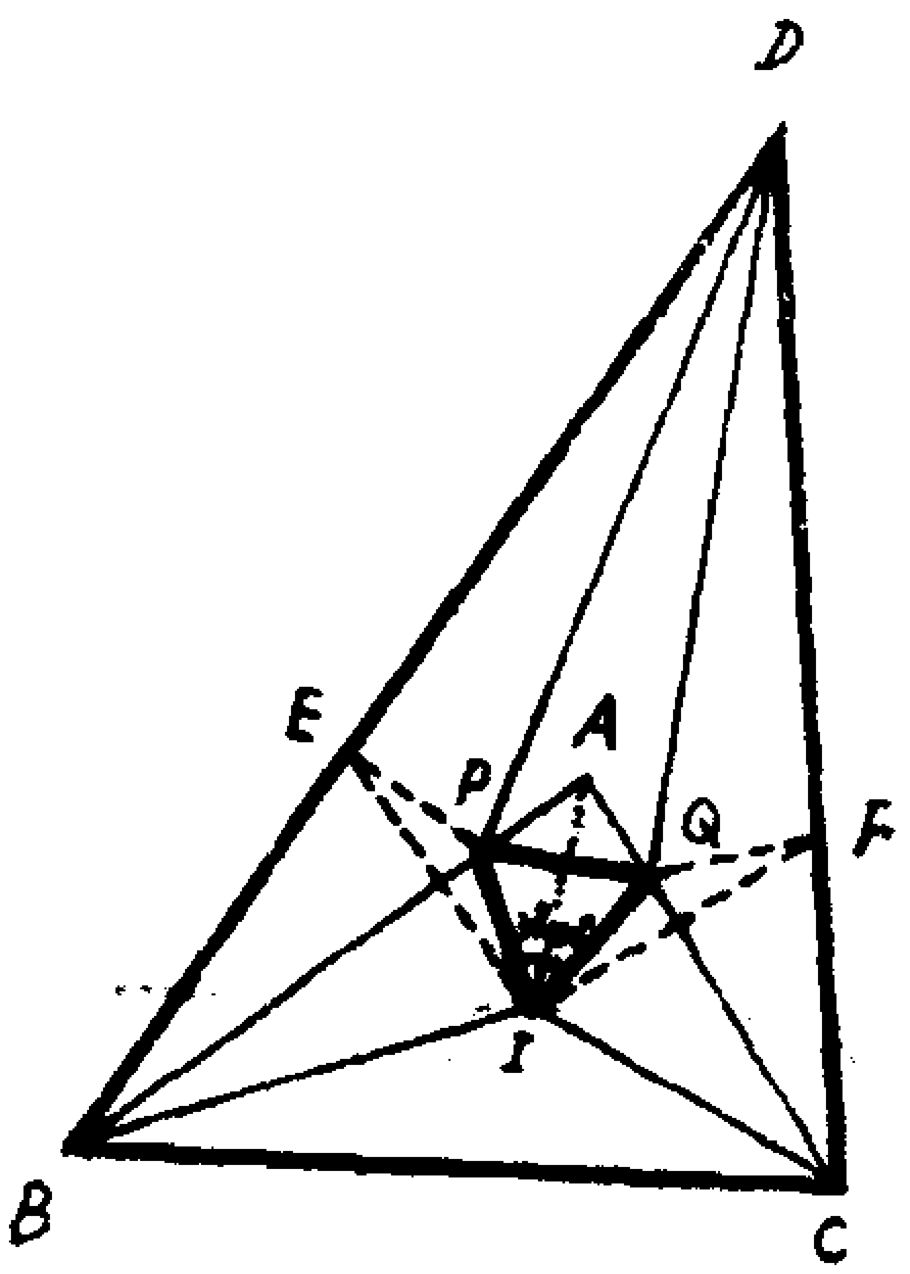
（2）在六条外角三等分线中，与每边相邻的两线各交于一点，这三交点也是一正三角形的顶点；

（3）在每一内角的两条三等分线及不相邻的两外角的四条三等分线中，与每边相邻的两线各交于一点，这三交点也

是一正三角形的顶点。

证：设$\triangle DBC$为已知的三角形（这样设是为了引用前面的习题），如图设BA、BI；CA、CI分别是$\angle DBC$、$\angle DCB$的三等分线。

在BA、CA上作两点P、Q使$\angle PIA=\angle AIQ=30°$



图总—78

作I关于BA、CA的对称点为E（在BD上）、F（在CD上），

由习题十六第15题可知D、E、P、Q、F共圆且$\triangle IPQ$为正三角形（$PE=PQ=QF=PI$），

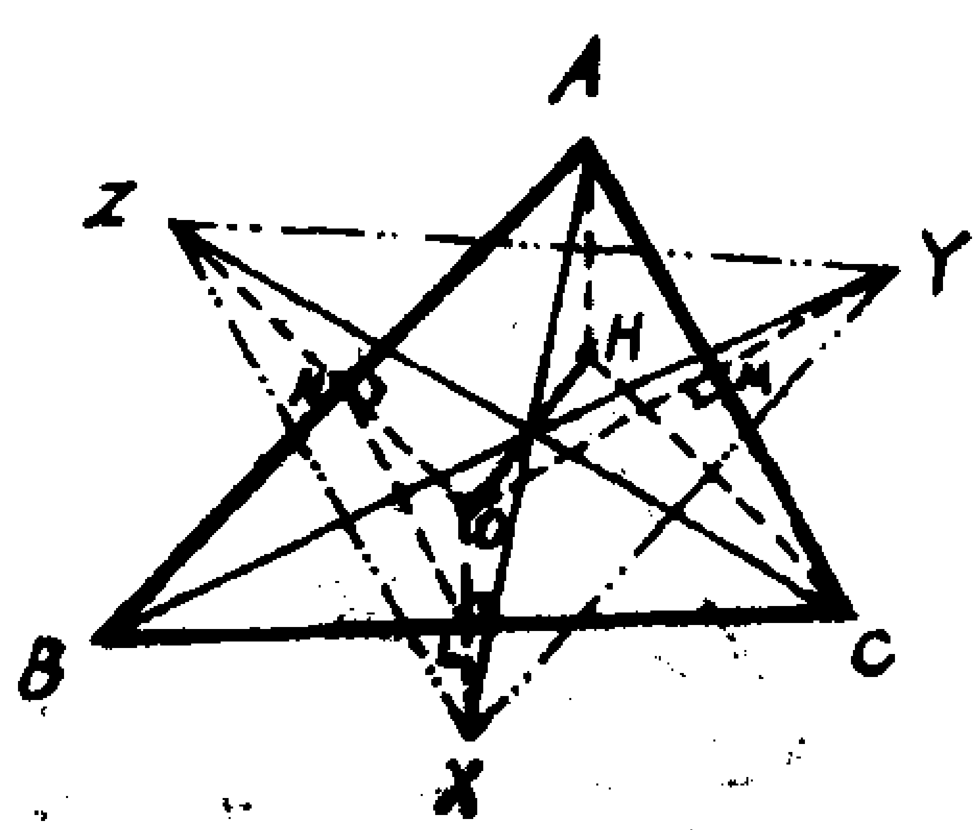
$\therefore \angle EDP=\angle PDQ=\angle QDF$（$EP=PQ=QF$），

即PD、QD为$\angle BDC$的三等分线。

由此可见正△IPQ就是△DBC的内角三等分线交成的三角形。

(2)、(3)的证明仿(1)便可得。

79. 设O是△ABC的外心，L、M、N各是BC、CA、AB的中点，X、Y、Z各是OL、OM、ON三线上的点。若$\overline{XO}/\overline{XL}=\overline{YO}/\overline{YM}=\overline{ZO}/\overline{ZN}$，则$AX$、$BY$、$CZ$三线与△$ABC$的欧拉线共点或互相平行。



图总—79

证：如图，设H为△ABC垂心。

$\because \overline{XO}/\overline{XL}=\overline{ZO}/\overline{ZN}$，

$\therefore XZ \parallel LN$。

又$OX\perp BC\perp AH$，$OX \parallel AH$，

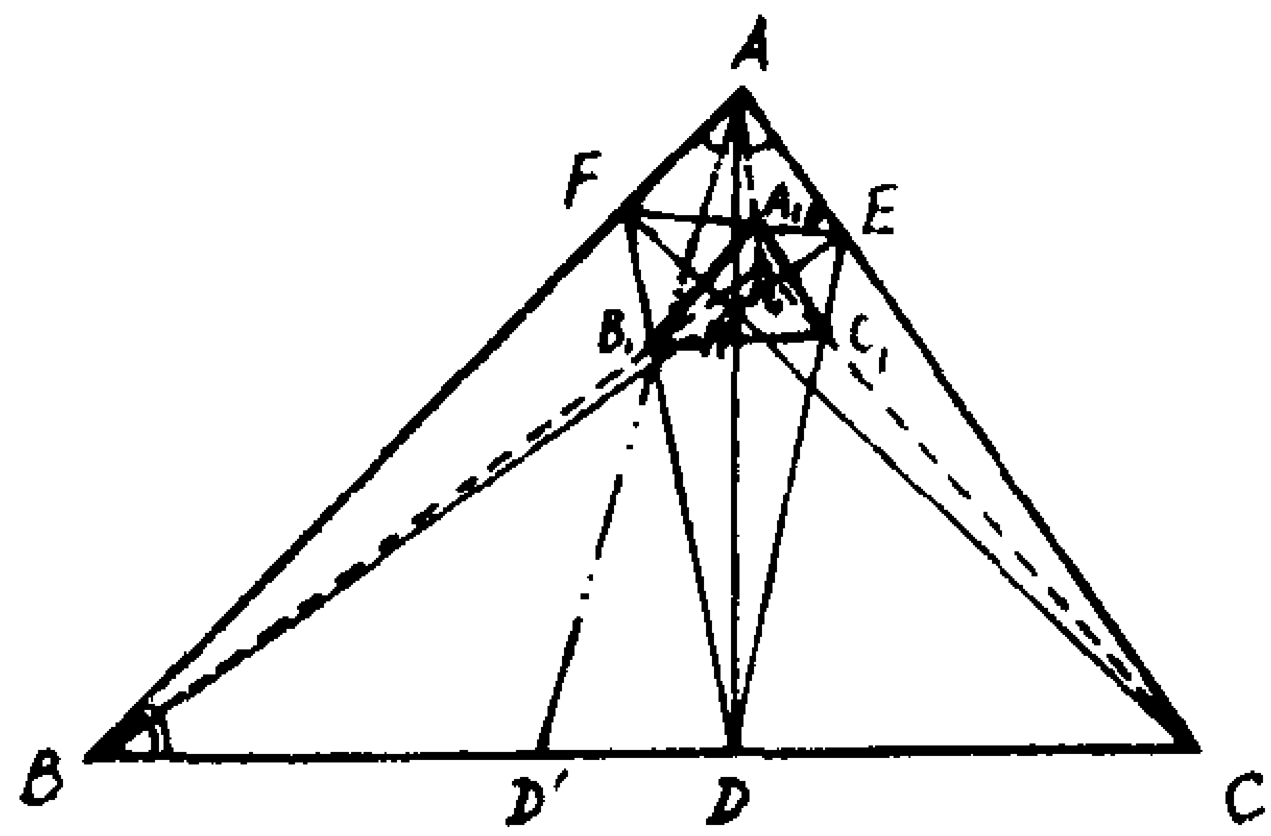
$OZ\perp AB\perp CH$，$OZ\parallel CH$，

$\therefore$△OXZ与△HAC位似。

故OH、AX、CZ三线共点或互相平行。

同理OH、CZ、BY三线共点或互相平行，故得证。

80. 三角形垂心等截点的等角共轭点在欧拉线上。



图总—80

证：如图，设AA_1、BB_1、CC_1是AH、BH、CH等截线的等角线。

D、E、F是三高AH、BH、CH的垂足。

$D'B=DC$。

$\because \angle A_1AE=\angle D'AB$，$\angle AEF=\angle B$，

$\therefore \triangle A_1AE\backsim\triangle D'AB$。

有$A_1E/D'B=AE/AB$

$\therefore A_1E=AE\cdot D'B/AB=AE\cdot DC/AB$

$=AB\cos A\cdot AC\cos C/AB$。

同理$C_1E=CE\cdot AF/BC=BC\cos C\cdot AC\cos A/BC$，

$\therefore A_1E=C_1E$。

$\because BE$平分$\angle DEF$,

$\therefore BE\perp A_1C_1$, $BE\perp AC$,

有$A_1C_1 \parallel AC$。

同理$C_1B_1\parallel CB$、$B_1A_1\parallel BA$。

$\therefore \triangle A_1B_1C_1$与$\triangle ABC$位似

$\therefore AA_1$、BB_1、CC_1共点或互相平行。

但AA_1、BB_1、CC_1为AH、BH、CH等截线的等角线，$\therefore AA_1$、BB_1、CC_1必交于一点H_1。

又HD、HE、HF为B_1B_1、C_1A_1、A_1B_1的垂直平分线，

$\therefore H$为$\triangle A_1B_1C_1$的外心。

$\because \triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$关于H_1位似，

$\therefore O$与H关于H_1也位似，O为$\triangle ABC$外心。

故O、H、H_1三点共线。

81. 三角形诸葛耳刚点及奈格耳点的等角共轭点分别是外接圆与内切圆及外接圆与旁切圆的相似中心。

证：如图(a)，设D、E、F关于AI、BI、CI的对称点为A'、B'、C'，则不难知AA'、BB'、CC'为AD、BE、CF的等角线，

$\because$ AD、BE、CF交于P（葛耳刚点）的等角共轭点为P'（AA'、BB'、CC'交点）。

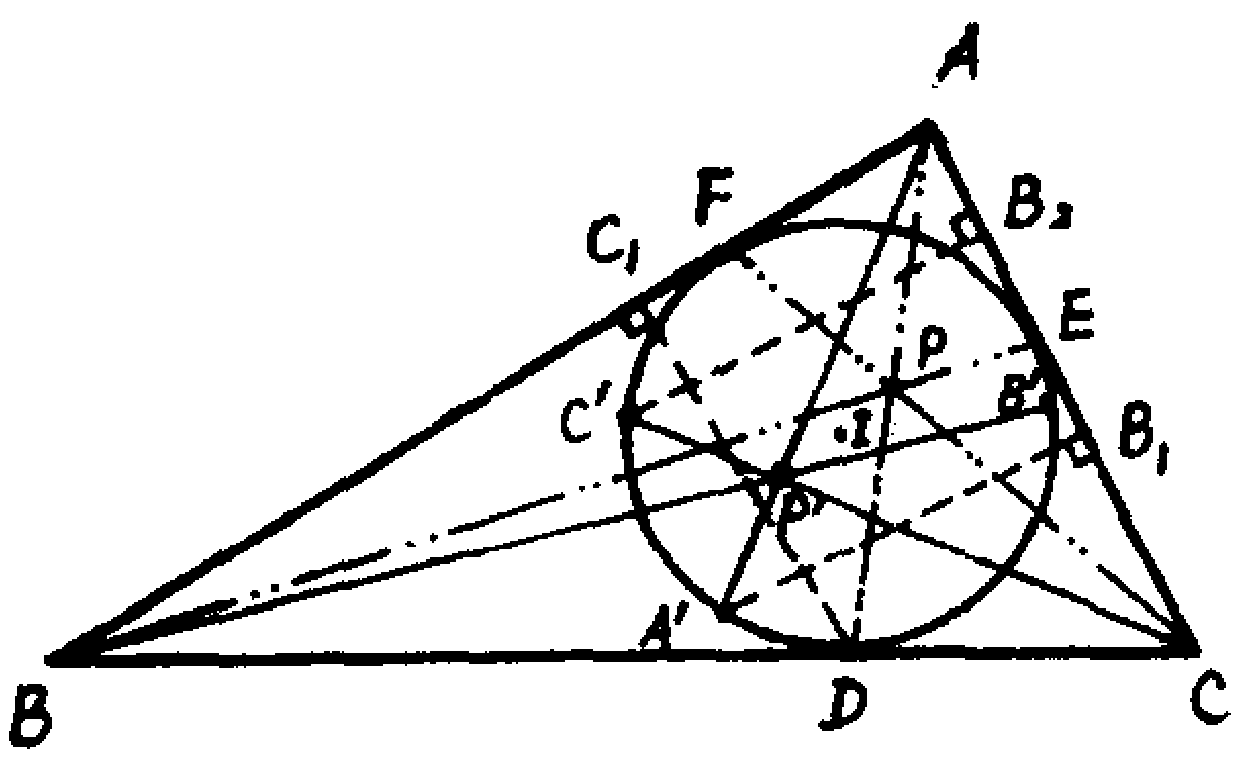
$\because$ $A'B_1=DC_1$、$C'B_2=EA_1$，$DC_1=EA_1$。

$\therefore$ $A'B_1=C'B_2$。

故 $A'C' \parallel AC$，同理$C'B' \parallel CB$，$B'A' \parallel BA$。

$\therefore$ $\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于P'位似。

故 $\odot I$与$\odot ABC$也关于P'位似，即$\odot I$与$\odot ABC$相似中心为P'。



图总—81(a)

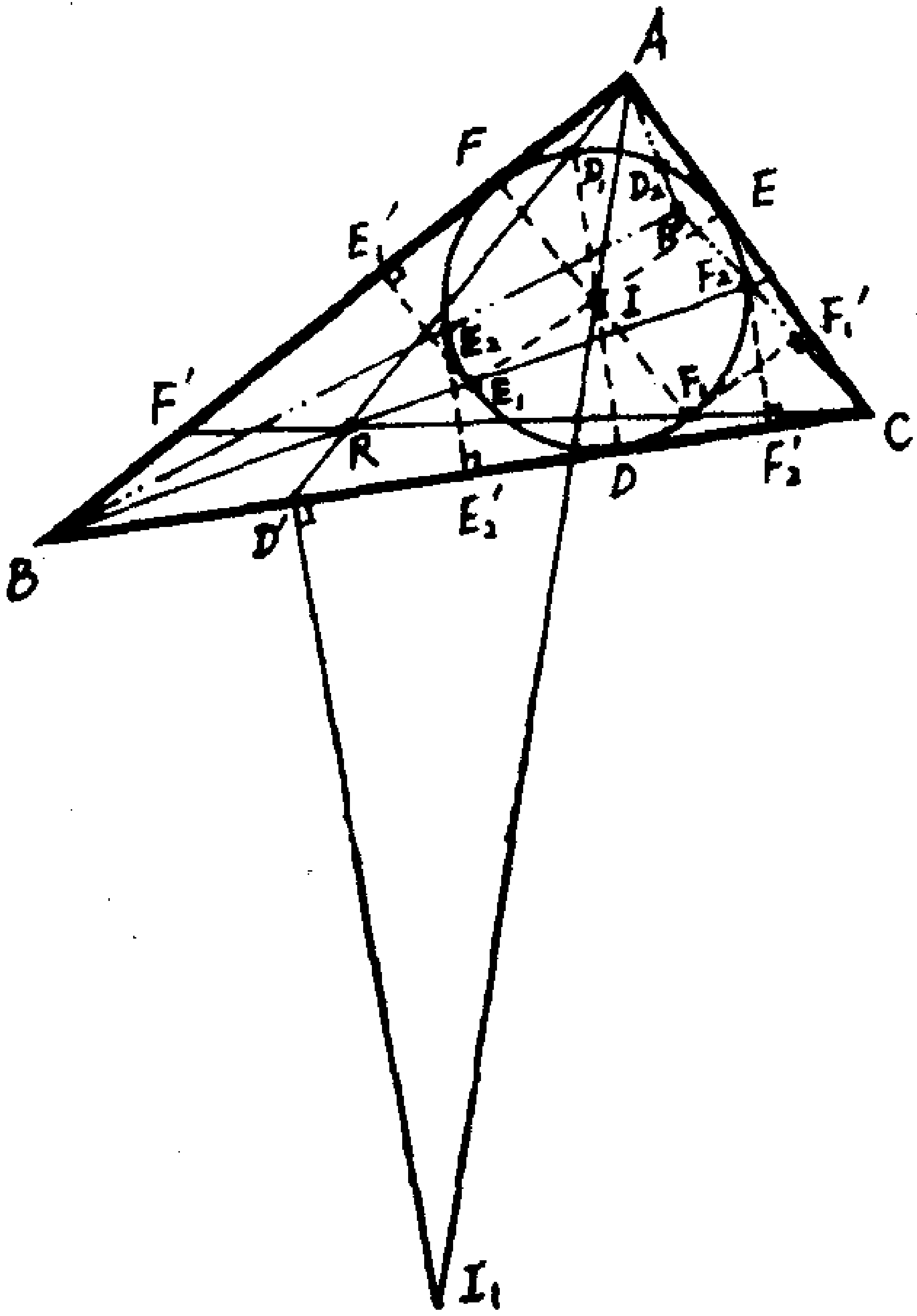
如图(b)，设ID、IE、IF交$\odot I$于另一点D_1、E_1、F_1。

则不难导出AD_1、BE_1、CF_1为AD、BE、CF的等截线。

$\therefore$ AD_1、BE_1、CF_1交于一点R（奈格耳点）。

设C_2、E_2、F_2是D、E、F关于IA、IB、IC的对称点。

有AD_2、BE_2、CF_2为AD_1、BE_1、CF_1的等角线，因此它们必交于一点R'（R的等角共轭点）。



图总—81（b）

∵ $E_2E_2' = E_1E_1'$、$F_1F_1' = F_2F_2'$（等角线性质）

$E_1E_1' = F_1F_1'$（关于AI对称）

∴ $E_2E_2' = F_2F_2'$，因此 $E_2F_2 \parallel BC$。

同理 $F_2D_2 \parallel CA$，$D_2E_2 \parallel AB$

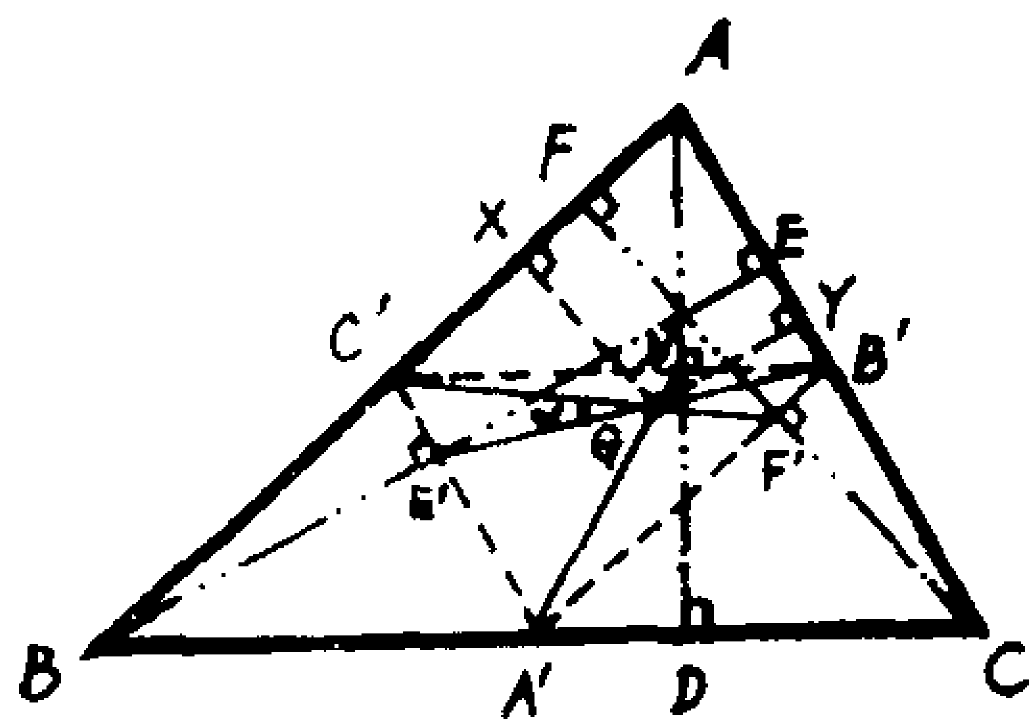
∴ $\triangle D_2E_2F_2$与$\triangle ABC$位似，故R'为⊙I与⊙ABC

的另一相似中心。

82. 三角形每边的中点与这边的高线中点之连线必会于陪位重心。

证： 如图，设D'、E'、F'为$\triangle ABC$的三高AD、BE、CF的中点，$\triangle A'B'C'$为中点三角形。

由习题十五第25题可知$A'D'$、$B'E'$、$C'F'$共点G。



图总—82

作$GX\perp BA$于X，$GY\perp AC$于Y。

$$\therefore\ \frac{GX}{GY}=\frac{F'F\dfrac{C'G}{C'F'}}{E'E\dfrac{B'G}{B'E'}}=\frac{CF}{BE}\times\frac{C'G\cdot B'E'}{C'F'\cdot B'G}$$

$$=\frac{CF}{BE}\times\frac{2S_{C'B'E'}\div\sin\alpha}{2S_{B'C'F'}\div\sin\alpha}$$

$$=\frac{CF}{BE}\times\frac{C'E'\sin\angle C'}{B'F'\sin\angle B'}$$

$$=\frac{CF}{BE}\times\frac{AB\cos A\sin\angle C}{AC\cos A\sin\angle B}$$

$$=\frac{CF}{BE}\times\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{AB}{AC}$$

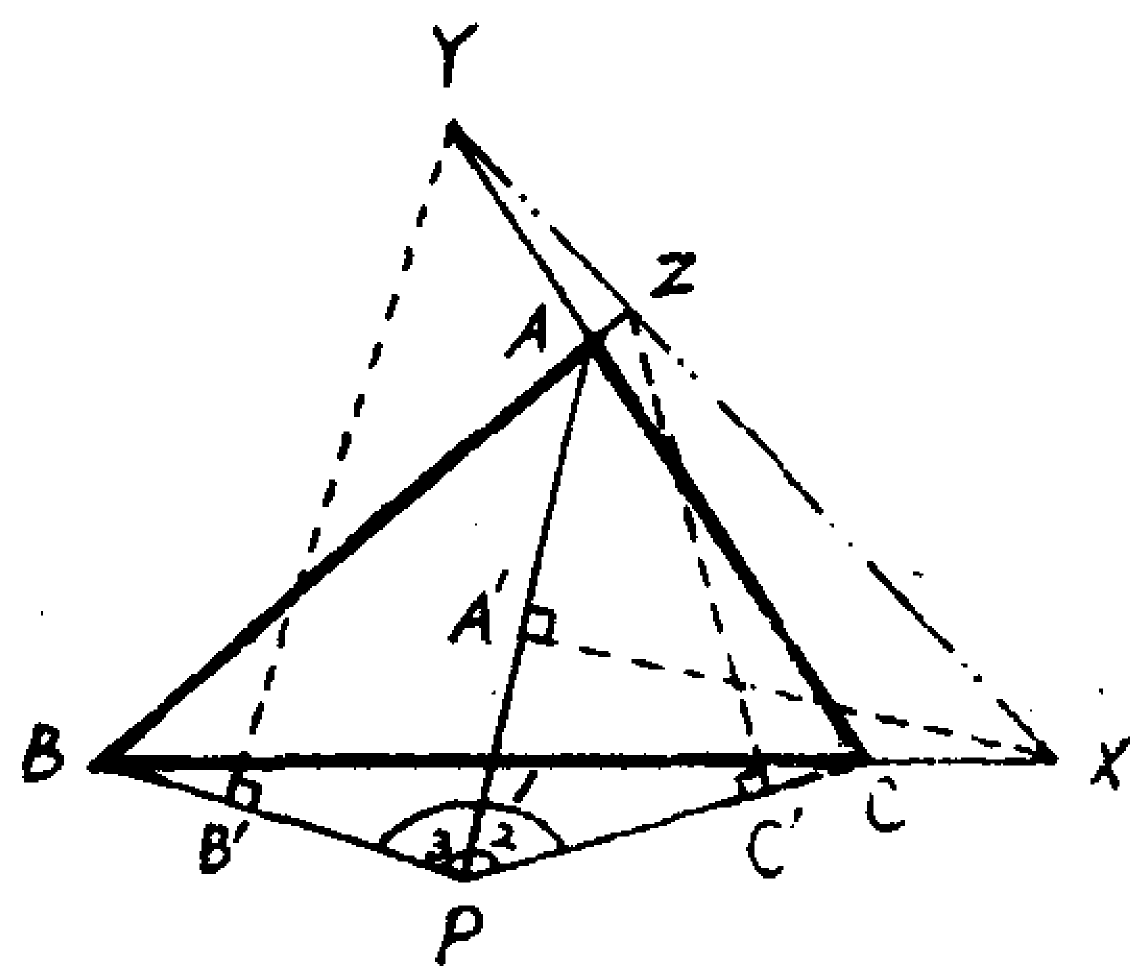
由复习题三第74题知AG为$\triangle ABC$的陪位中线。

同理BG、CG也为陪位中线。故得证。

83。一点P与$\triangle ABC$各顶点相连，在连线PA、PB、PC上各取一点A'、B'、C'，使

$$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}=\overline{PC}\cdot\overline{PC'}。$$

过A'、B'、C'以次作PA、PB、PC的垂线，设分别交BC、CA、AB于X、Y、Z，试证X、Y、X三点共线。



图总—83

证： $\because$ $\overline{XB}/\overline{XC}=(PA'-PB\cos\angle3)/(PA'-PC\cos\angle2)$

$=(PA\cdot PA'-PA\cdot PB\cos\angle3)/(PA\cdot PA'-PA\cdot PC\cos\angle2)$

$\overline{YC}/\overline{YA}=(PB\cdot PB'-PB\cdot PC\cos\angle2)/(PB\cdot PB'-PB\cdot PA\cos\angle3)$,

$\overline{ZA}/\overline{ZB}=(PC\cdot PC'-PC\cdot PA\cos\angle2)/(PC\cdot PC'-PC\cdot PB\cos\angle1)$,

$\because\quad PA\cdot PA'=PB\cdot PB'=PC\cdot PC'$

$\therefore\quad (XB/XC)\cdot(YC/YA)\cdot(ZA/ZB)=1$

故 X、Y、Z共线。

84. 在$\triangle ABC$中，设一点P在BC、CA、AB上的射影为X、Y、Z。今在PX、PY、PZ三线上各取一点X'、Y'、Z'，使$\overline{PX}\cdot\overline{PX'}=\overline{PY}\cdot\overline{PY'}=\overline{PZ}\cdot\overline{PZ'}$

试证AX'、BY'、CZ'三线共点或互相平行。

利用上题和筛沙格定理（§43例38）易证，此略。

85. 设P、Q是$\triangle ABC$的外接圆上两点，A'、B'、C'是Q关于BC、CA、AB的对称点，求证PA'与BC、PB'与CA、PC'与AB的交点X、Y、Z共线。

证：如图设，

$$\because\quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=\frac{BA'\cdot BP\sin\angle A'BP}{CA'\cdot CP\sin\angle A'CP},$$

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=-\frac{CB'\cdot CP\sin\angle B'CP}{AB'\cdot AP\sin\angle B'AP},$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-\frac{AC'\cdot AP\sin\angle C'AP}{BC'\cdot BP\sin\angle C'BP},$$

又 $BA'=BQ=BC'$，

$CA'=CQ=CB'$，

$AC' = AQ = AB'$.

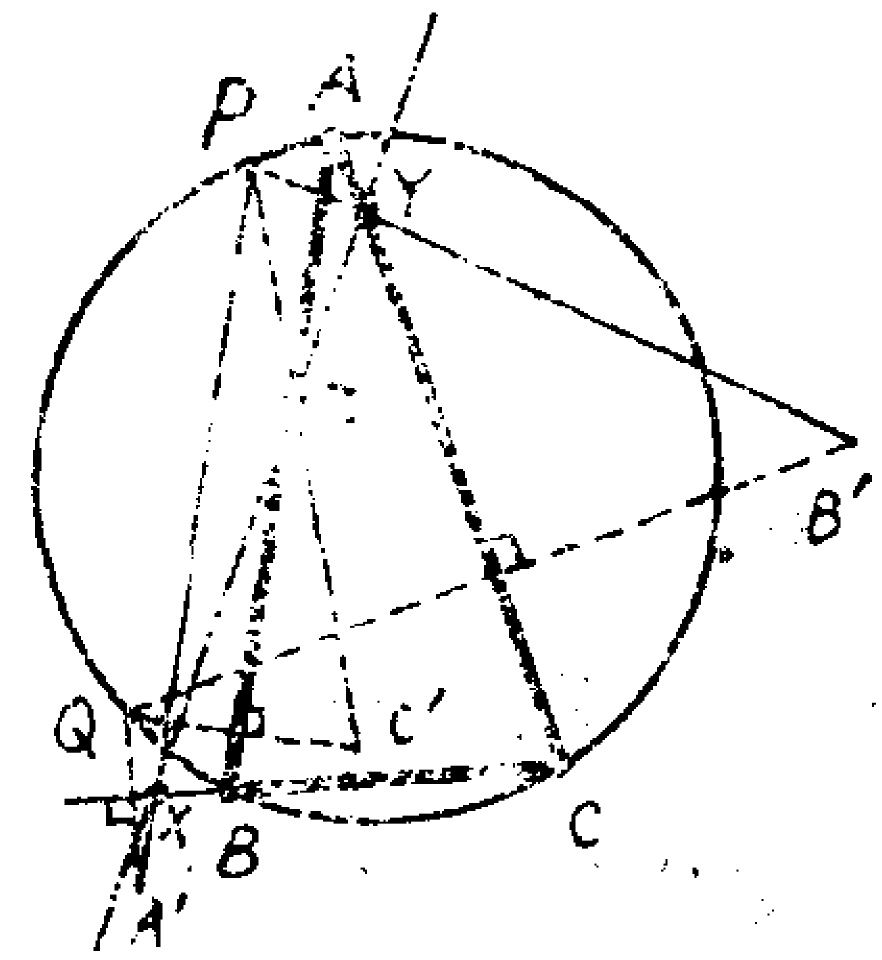
$\angle A'BP = \angle B'AP$,

$\angle A'CP = \angle C'AP$,

$\angle B'CP = \angle C'BP$

$\therefore \quad (\overline{XB}/\overline{XC}) \cdot (\overline{YC}/\overline{YA}) \cdot (\overline{ZA} \cdot \overline{ZB}) = 1$

故 X、Y、Z共线。



图总—85

86. 将圆上四点两两连成四个三角形，而这圆上任两点对于该四个三角形中每形的两条西摩松线各交于一点，试证这四点共线。

证：如图，设$P_i(i=1, 2, 3, 4)$四点在$\odot O$上，M、N是$\odot O$上另两点，

m_1为点M对$\triangle P_2P_3P_4$的西摩松线，余类推。

n_1为点N对$\triangle P_2P_3P_4$的西摩松线，余类推。

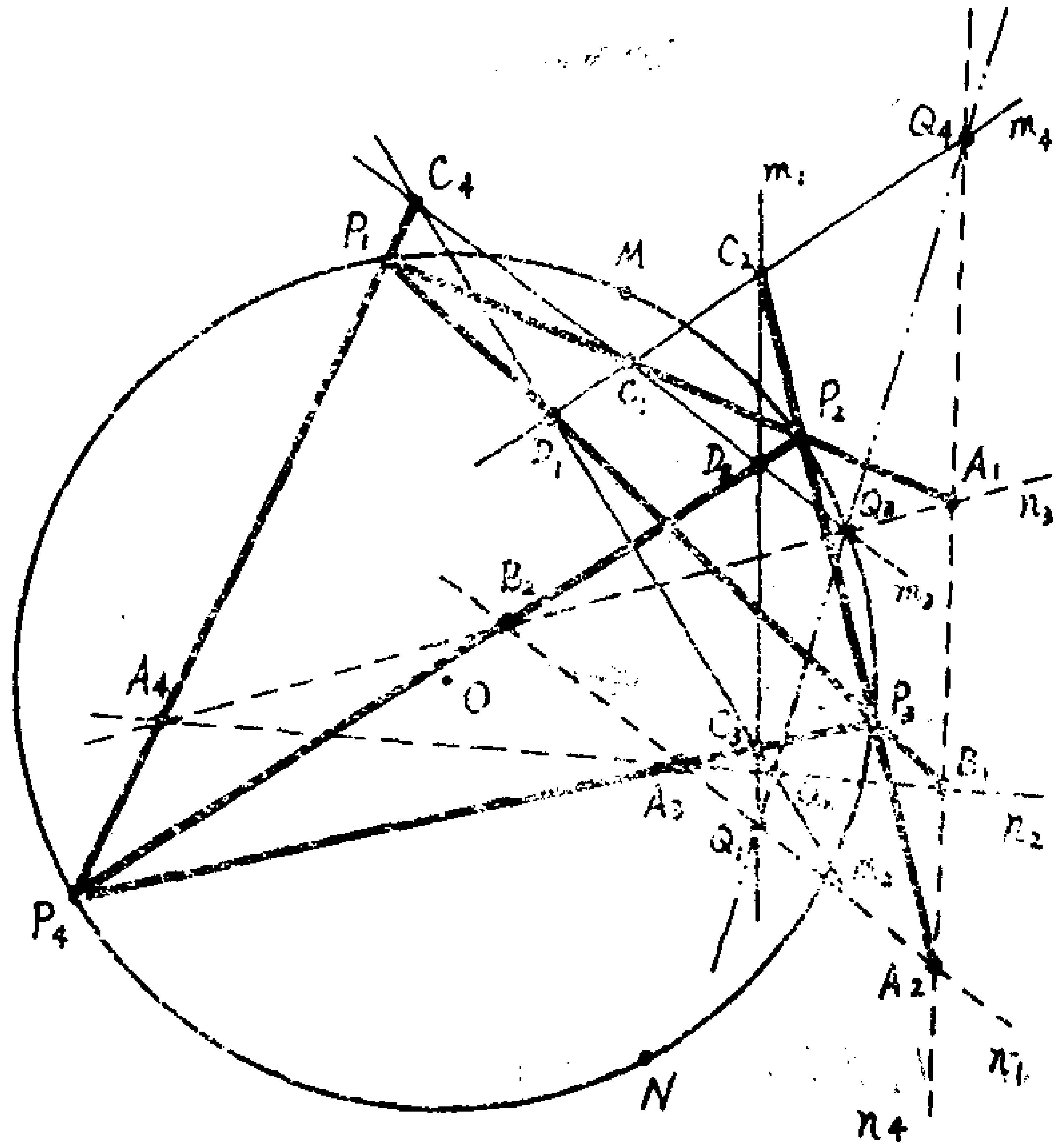
$\because \quad C_4A_4$、D_2B_2、C_3A_3共点P_4，

$\therefore \quad \triangle C_4D_2C_3$与$\triangle A_4B_2A_3$透视，

$\therefore \quad Q_1$、Q_2、Q_3共线（笛沙格定理）。

同理Q_2、Q_3、Q_4共线，

故 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4共线。



图总—86

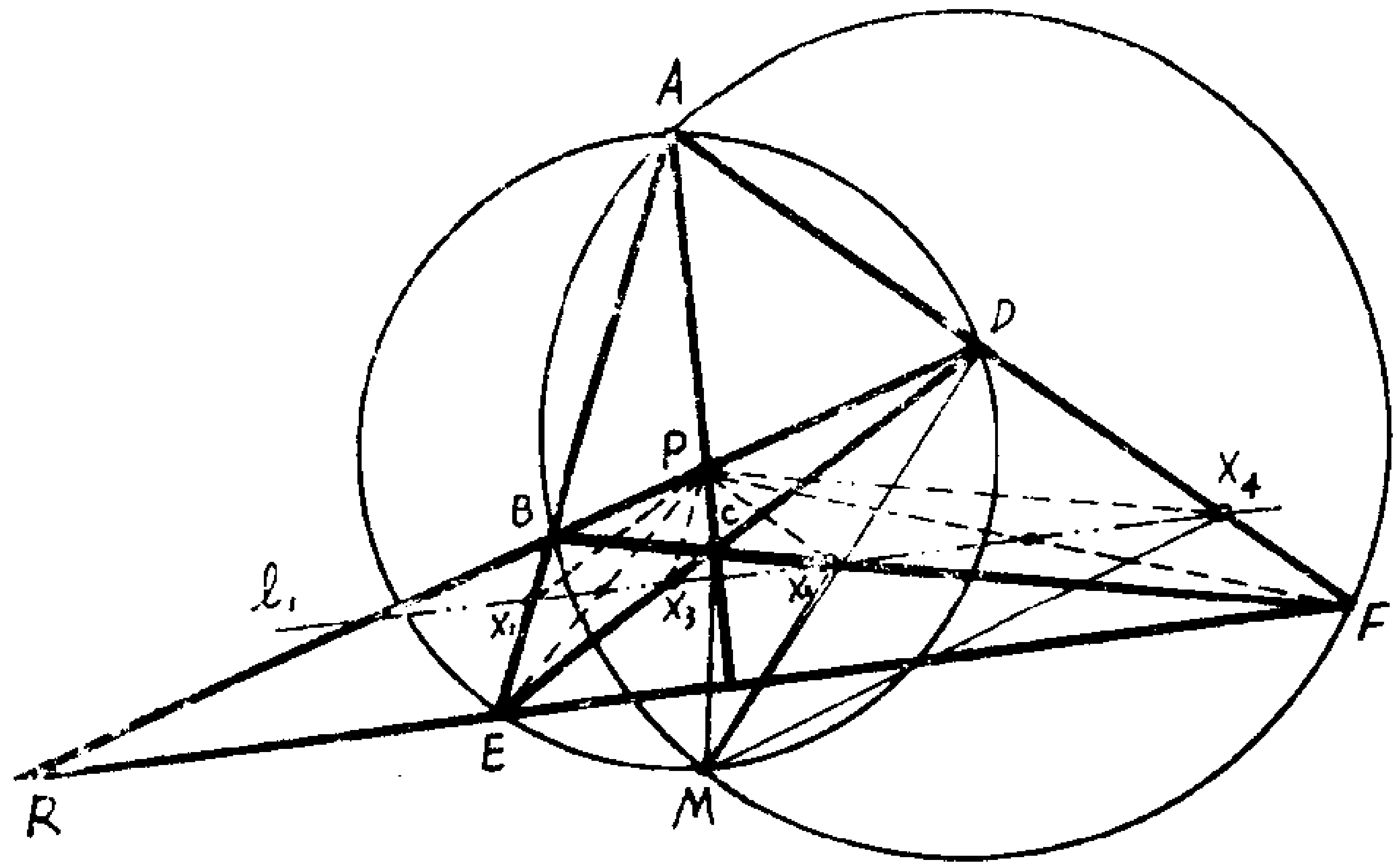
87. 完全四边形的密克点在对角三角形的九点圆上，而且该密克点对于对角三角形的中点三角形的西摩松线重合于完全四边形的西摩松线。

证：如图设，M为完全四边形$ABCDEF$的密克点，作$\square PX_1EX_3$，$\square PX_2FX_4$，Q为AC与EF交点。

由习题十四第12题知：

X_1、X_2、X_3、X_4共线l_1。

$\because$ PE、PF中点在X_1X_3、X_2X_4上，



图总—87

∴ $l_1 \parallel EF$且过PQ中点，

故 l_1是对角三角形的中点三角形的一边线。

∵ $CX_2/PX_4 = PX_2/AX_4(\triangle CX_2P \backsim \triangle PX_4A)$，

$DX_4/PX_2 = PX_4/BX_2\ (\triangle DX_4P \backsim \triangle PX_2B)$，

有 $CX_2 \cdot AX_4 = DX_4 \cdot BX_2 = PX_2 \cdot PX_4$，

∴ $CX_2/DX_4 = BX_2/AX_4$

$= (BX_2 - CX_2)/(AX_4 - DX_4) = BC/AD$。

下面证明$\odot X_2X_4F$过密克点M。

∵ $\triangle MAD \backsim \triangle MBC$，

∴ $BC/AD = MC/MD$，

$CX_2/DX_4 = MC/MD$。

又　$\angle MCX_2=\angle MDX_4=\angle MEB$,

∴　$\triangle MCX_2 \backsim \triangle MDX_4$,

$\angle MX_2F=\angle MX_4F$(由于$\angle MX_2C=\angle MX_4D$)。

故　M、X_2、X_4、F共圆。

∴　M在$\triangle X_2X_4F$上射影共线（西摩松线）。

∴　M对X_2X_4的射影在M对FA、FB的射影连线上。

即　M对X_2X_4的射影在完全四边形的西摩松线上（复习题三第42题）。

同理可证M在对角三角形的中点三角形其它两边上的射影在完全四边形的西摩松线上，

故得证。

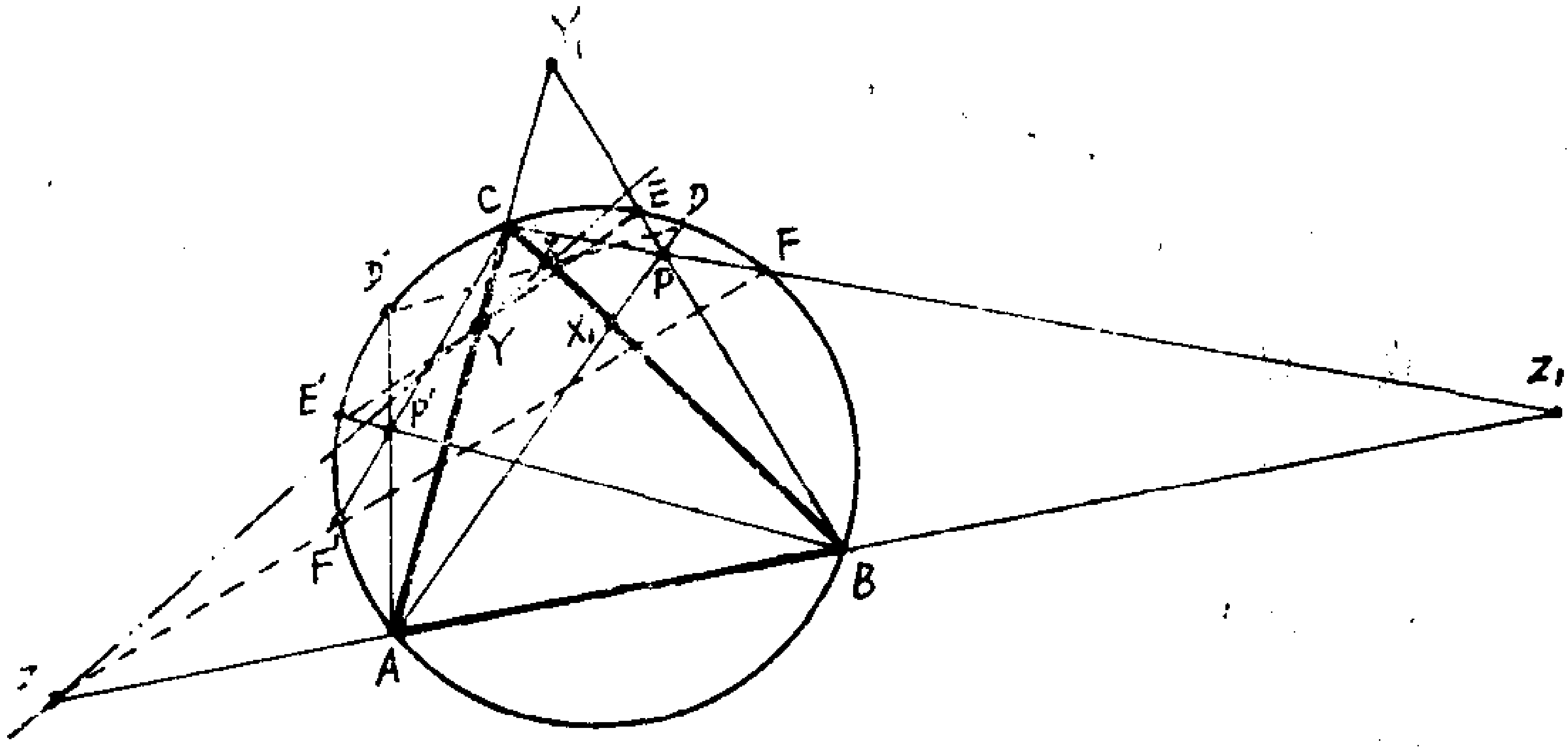
88. 已知$\triangle ABC$及两点P、P'。设AP、BP、CP及AP'、BP'、CP'交$\odot ABC$于D、E、F及D'、E'、F'，而DD'与BC、EE'与CA、FF'与AB各交于X、Y、Z。求证X、Y、Z三点共线。

证：

引理：若A、B、C、D共圆且AC、BD交于Q，则

$BQ/DQ=BA\cdot BC/DA\cdot DC$（证明略）

如图，设AP、BP、CP交BC、CA、AB于X_1、Y_1、Z_1（有平行的情况，留给读者讨论）。



图总—88

据引理$\overline{X_1B}/\overline{X_1C} = -BA\cdot BD/CA\cdot CD$,

$\overline{Y_1C}/\overline{Y_1A} = CB\cdot CE/AB\cdot AE$,

$\overline{Z_1A}/\overline{Z_1C} = AC\cdot AF/BC\cdot BF$。

∵ AX_1、BY_1、CZ_1共点P,

∴ $(-BA\cdot BD/CA\cdot CD)\cdot(CB\cdot CE/AB\cdot AE)\cdot(AC\cdot AF/BC\cdot BF) = -1$,

∴ $(BD/CD)\cdot(CE/AE)\cdot(AF/BF) = 1$。

同理$(BD'/CD')\cdot(CE'/AE')\cdot(AF'/BF') = 1$。

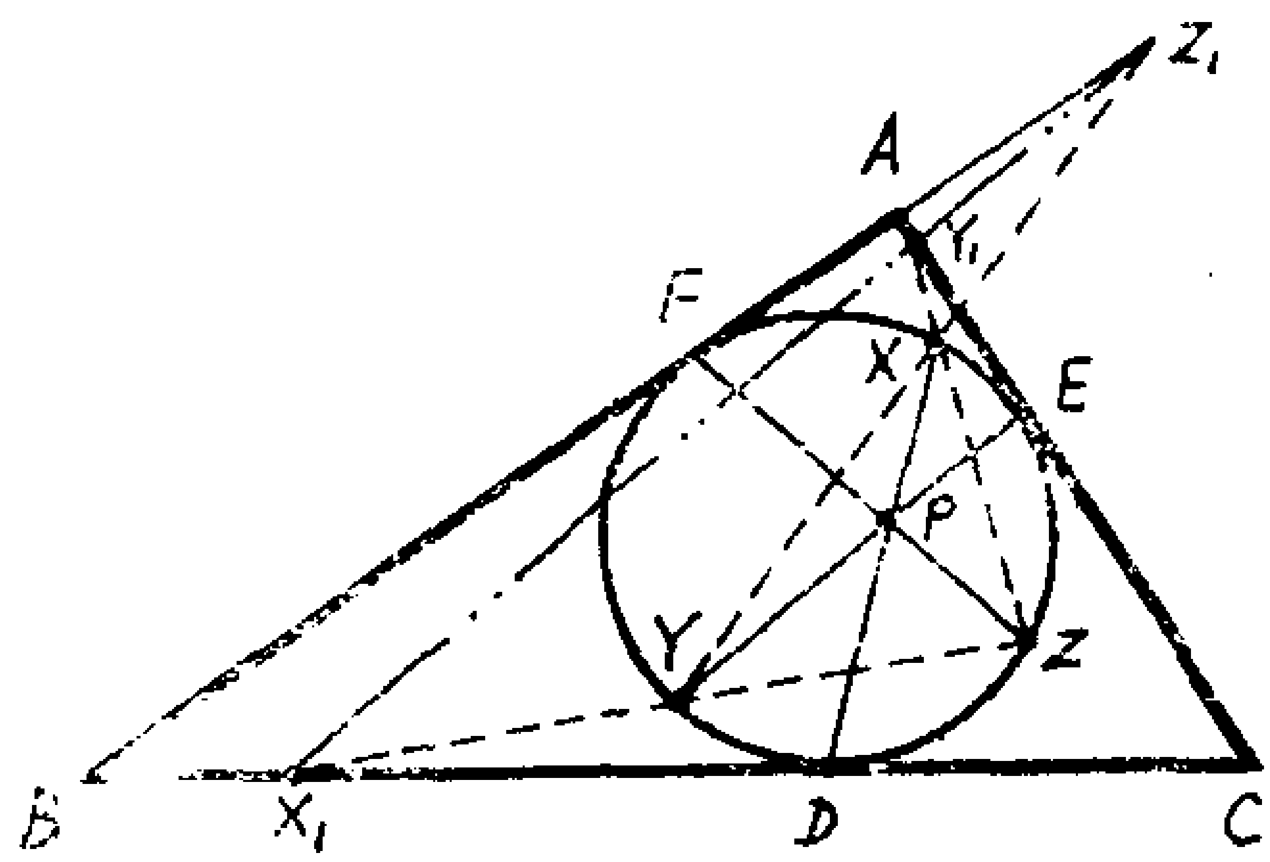
而据引理

$(\overline{XB}/\overline{XC})\cdot(\overline{YC}/\overline{YA})\cdot(\overline{ZA}/\overline{ZB}) = (-BD\cdot BD'/CD\cdot CD')\cdot(-CE\cdot CE'/AE\cdot AE')\cdot(AF\cdot AF'/BF\cdot BF') = (BD/CD)\cdot(CE/AE)\cdot(AF/BF)\cdot(BD'/CD')\cdot$

$(CE'/AE')\cdot(AF'/BF')=1$,

故 X、Y、Z三点共线。

89．设$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆，它切BC、CA、AB于D、E、F。任取一点P，连DP、EP、FP使交$\odot I$于X、Y、Z，求证AX、BY、CZ三线共点或互相平行。



图总—89

证：∵ $\overline{X_1Y}/\overline{X_1Z}=-YD^2/ZD^2$,

$Y_1Z/Y_1X=-ZE^2/XE^2$,

$Z_1X/Z_1Y=XF^2/YE^2$,

同上题$(BD/CD)\cdot(CE/AE)\cdot(AF/BF)=1$的证明，

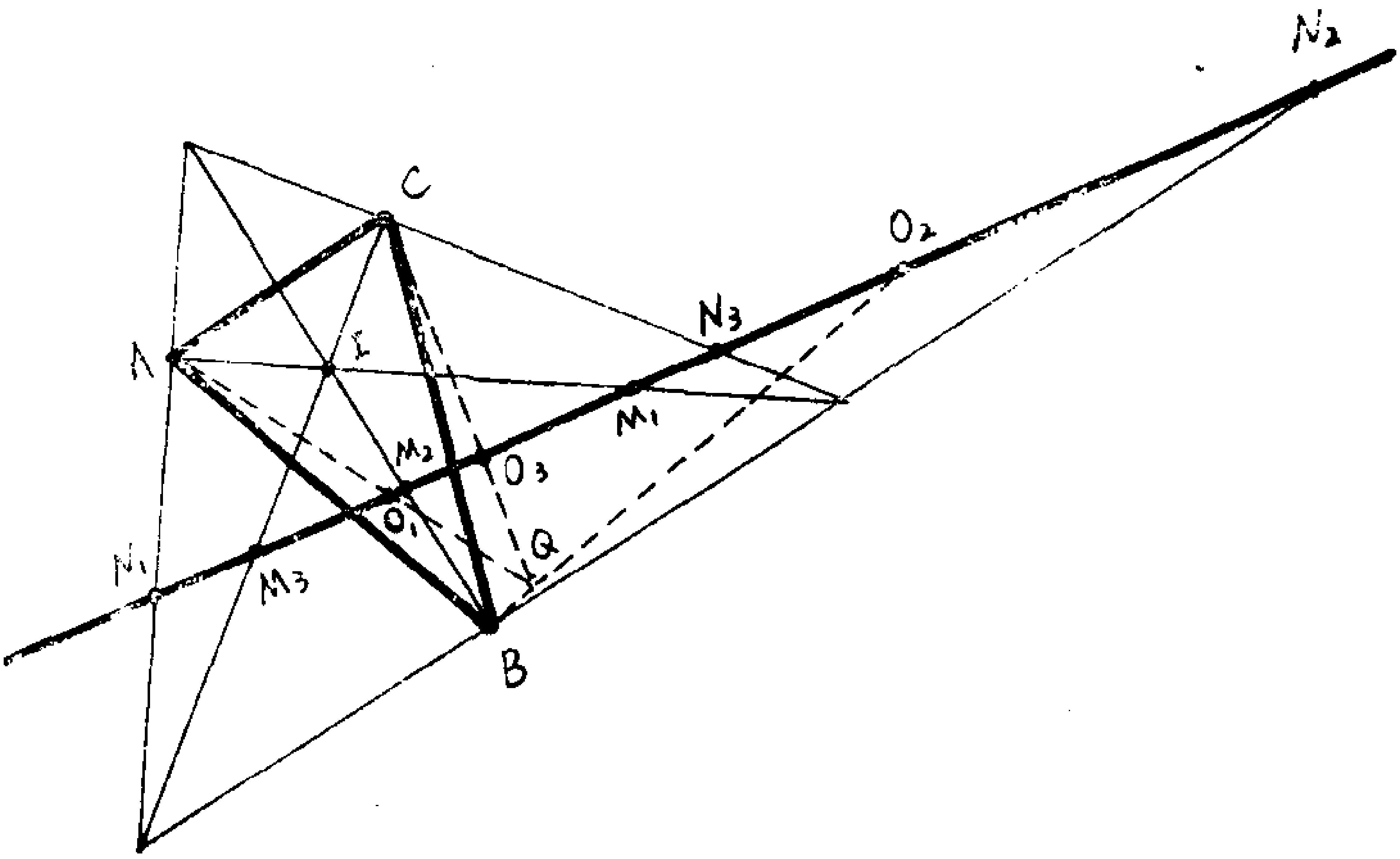
可得 $(YD/ZD)\cdot(ZE/XE)\cdot(XF/YF)=1$。

∴ $(\overline{X_1Y}/X_1Z)\cdot(Y_1Z/\overline{Y_1X})\cdot(\overline{Z_1X}/\overline{Z_1Y})=1^2=1$

由笛沙格定理可知AX、BY、CZ三线共点或互相平行。

90．设一直线被三角形每角的内外平分线各截下一段，

求证各顶点分别与所截的对应线段的中点之连线会于三角形的外接圆上一点。



图总—90

证：如图，设BO_2交CO_3于Q，

∵ $\angle O_2BM_2 = \angle OM_2B$，

$\angle O_3CM = \angle O_3M_3C$，

∴ $\angle O_2BM_2 + \angle O_3CM_3 = \angle BIC$.

∴ $\angle BQC = 360° - 2\angle BIC$

$= 360° - 2[180° - (\angle B + \angle C)/2]$

∴ $\angle BQC = \angle B + \angle C$

故 $\angle BAC + \angle BQC = 180°$

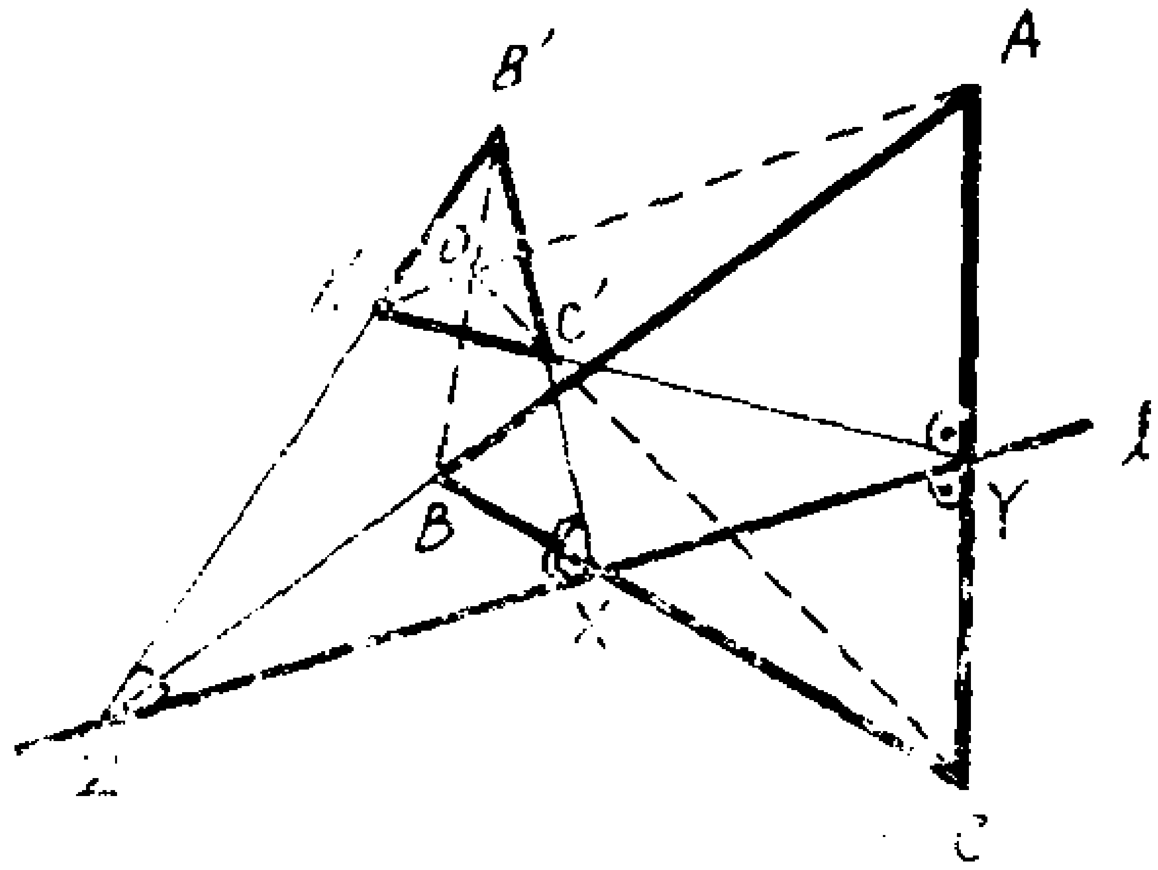
∴ A、B、C、Q共圆。

即 BO_2、CO_3交点在⊙ABC上。

同理CO_3、AO_1交点也在⊙ABC上。

故 AO_1、BO_2、CO_3共点且在⊙ABC上。

91．一直线关于三角形各边的对称线所交成的三角形，与原三角形是透视的，它们透视中心在原三角形的外接圆上.



图总—91

证：如图，设△$A'B'C'$是直线l关于BC、CA、AB对称的直线交成的三角形。

∵ BZ、BX平分△$B'ZX$两底角，

∴ $B'B$必平分$\angle ZB'X$(即$\angle A'B'C'$)。

同理可证$A'A$平分$\angle B'A'C'$，$C'C$平分$\angle A'C'B'$，

∴ AA'、BB'、CC'共点于O(△$A'B'C'$内心)。

∴ $\angle AOC = 90° - \angle B'/2 = \angle ABC$，

有　A、B、C、O共圆，

故原题得证。

92. 两个真正相似但不是位似的三角形，若它们的对应顶点连线共点，则这点必是它们的外接圆的交点之一。

证： 如图设，

∵　$\angle C=\angle C'$，

有　C、Y、X、C'共圆，

∴　$\angle 1=\angle 2$.

∵　$\angle B'=\angle B$，

有　B、X、Z、B'共圆，

∴　$\angle 1=\angle OB'A'$，

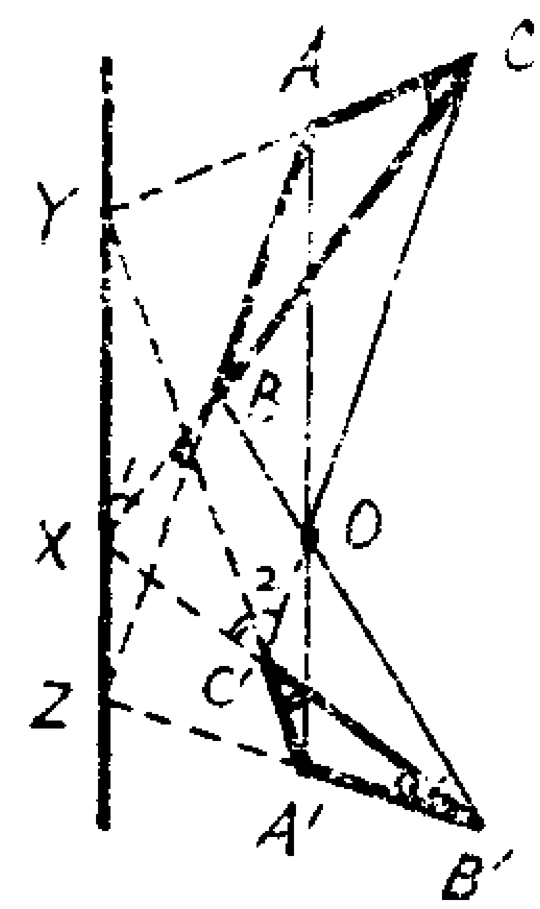
$\angle 2=\angle OB'A'$.

故　A'、B'、C'、O共圆.

∴　O当然在$\odot A'B'C'$上，

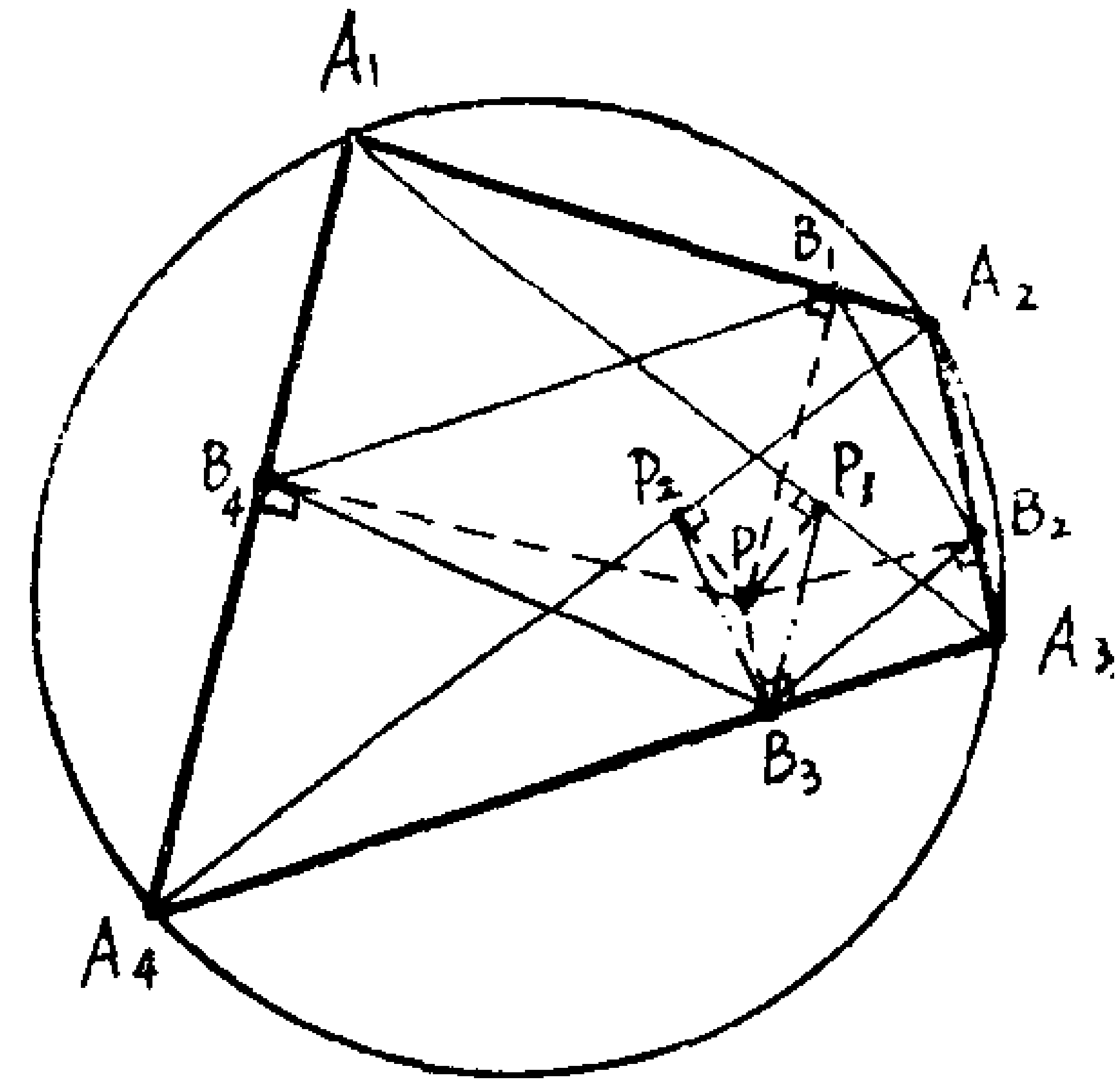
随之得O也在$\odot ABC$上，

故原题得证。



图总—92

93. 设自一点向一圆内接四边形的四边及两对角线（所在直线）引垂线，则两对角线上的垂足是顺次连结四边上的垂足所成四边形的等角共轭点。



图总—93

证：如图设，

∵ P、A_4、B_3、P_2、B_4共圆(PA_4为直径)，

∴ $\angle P_2B_3B_4=\angle P_2A_4B_4$。

同理$\angle P_1B_3B_2=\angle P_1A_3B_2$。

又 $\angle P_2A_4B_4=\angle P_1A_3A_2$，

∴ P_2B_3、P_1B_3为$\angle B_2B_3B_4$的等角线。

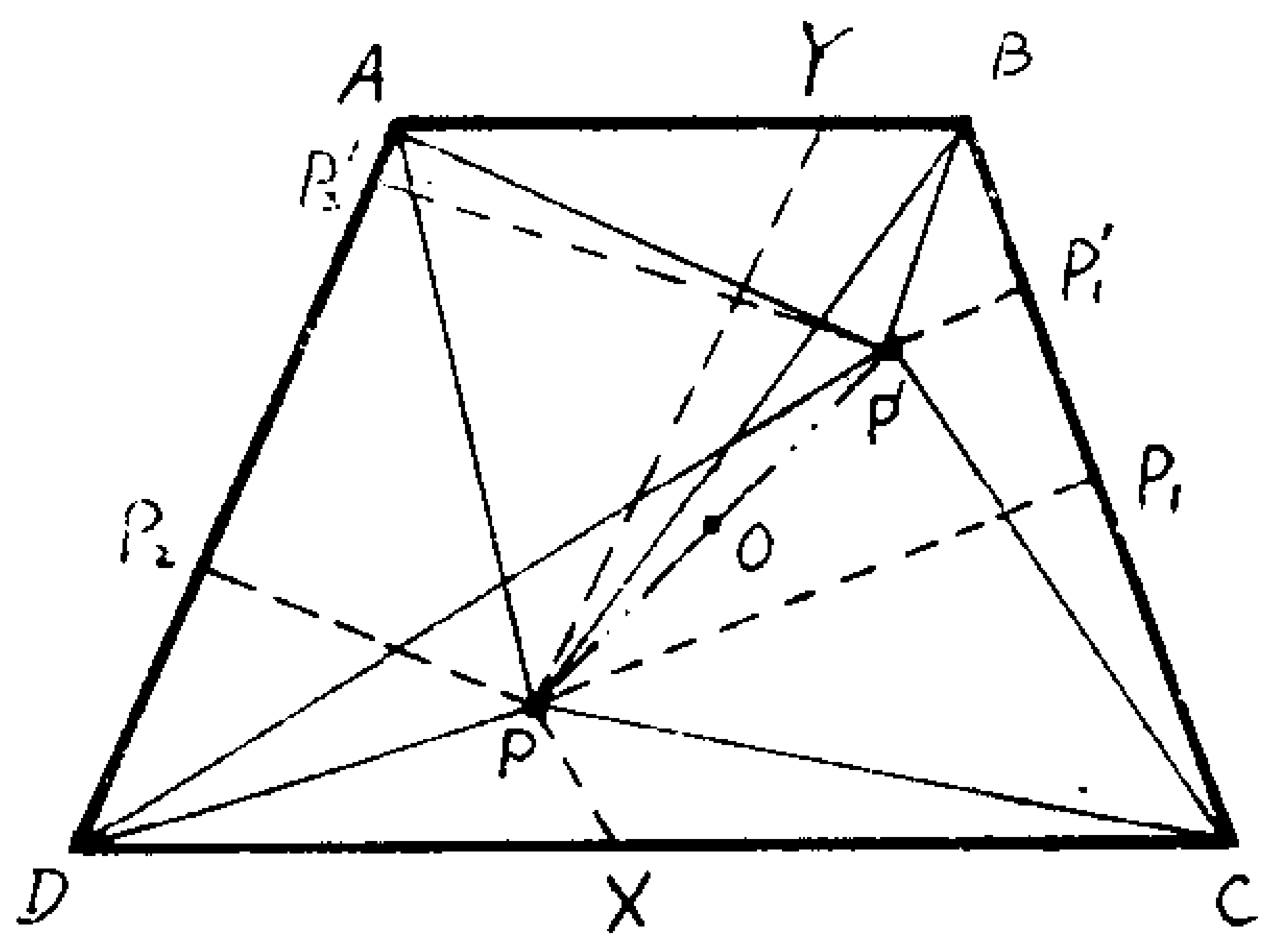
同理可证P_2B_2、P_1B_2为$\angle B_1B_2B_3$；P_2B_1、P_1B_1为$\angle B_2B_1B_4$；P_2B_4、P_1B_4为$\angle B_1B_4B_3$的等角线。

故 P_1、P_2是四边形$B_1B_2B_3B_4$的等角共轭点。

94. 四边形任一双等角共轭点连结线的中点共线。

证：如图设，P、P'为四边形$ABCD$的等角共轭点，

O为PP'的中点。



图总—94

作$\angle PXD=\angle AP'D$，$\angle PYA=\angle AP'D$

$\therefore\quad \triangle PXD\backsim\triangle P'AD$，$\triangle PYA\backsim\triangle DP'A$，

$\therefore\quad S_{\triangle PXD}+S_{\triangle PYA}=(PD^2+PA^2)S_{\triangle DP'A}/DA^2$。

$\because\quad \angle BP'C=180^\circ-\angle AP'D$(§47例46得)

$=180^\circ-\angle AYP=\angle BYP$，

$\therefore\quad \triangle BYP\backsim\triangle BP'C$，同理$\triangle PXC\backsim\triangle BP'C$，

$\therefore\quad S_{\triangle PXC}+S_{\triangle PYB}=(PC^2+PB^2)S_{\triangle P'BC}/CB^2$，

$\therefore\quad S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=(PD^2+PA^2)S_{\triangle P'DA}/DA^2+$

$(PC^2+PB^2)S_{\triangle P'CB}/CB^2$。

$=(PD^2+PA^2-DA^2)S_{\triangle P'DA}/DA^2+(PC^2+PB^2$

$-CB^2)S_{\triangle P'BC}/CB^2+S_{\triangle P'DA}+S_{\triangle P'BC}$

$=PD\cdot PA\cos\angle APD\cdot P'P_2'/DA+PC\cdot$

$PB\cos\angle CPB\cdot P'P_1'/CB+S_{\triangle P'AD}+S_{\triangle P'BC}$

$=\operatorname{ctg}\angle APD\cdot PP_2\cdot P'P_2'+\operatorname{ctg}\angle CPB\cdot PP_1\cdot$

$P'P_1'+S_{\triangle P'AD}+S_{\triangle P'BC}$

$=\operatorname{ctg}\angle APD\cdot PP_2\cdot P'P_2'+\operatorname{ctg}\angle CPB\cdot PP_1\cdot$

$P'P_1'+S_{\triangle P'AD}+S_{\triangle P'BC}$

$=\operatorname{ctg}\angle APD(PP_2\cdot P'P_2'-PP_1\cdot P'P_1')+$

$S_{\triangle P'AD}+S_{\triangle P'BC}$

$=S_{\triangle P'AD}+S_{\triangle P'BC}$(参考复习题第73题)。

故 $S_{\triangle ODC}+S_{\triangle OAB}=(S_{\triangle PDC}+S_{\triangle P'DC}+S_{\triangle PAB}+$

$S_{\triangle P'AB})/2=(S_{\triangle P'AD}+S_{\triangle P'BC}+S_{\triangle P'DC}+S_{\triangle P'AB})/2$

$=S_{ABCD}/2$。

由复习题四第35题知O必在AC与BD中点连线上。

95。设P、Q是四边形$ABCD$的等角共轭点，求证：

(1) $\triangle PAB$、$\triangle QBC$、$\triangle PCD$、$\triangle QDA$的垂心共线。

(2) $\triangle QAB$、$\triangle PBC$、$\triangle QCD$、$\triangle PDA$的垂心也共线；

(3) 以上所得两直线互相平行。

证(1)：如图，设$\triangle PAB$、$\triangle QBC$、$\triangle PCD$、$\triangle QDA$的垂心为H_i($i=1$，2，3、4)。

作$\square ABCR$、$\square APCS$

$\because$ $PH_1\perp AB$且$PH_1=AB\,|\operatorname{ctg}\angle APB|$；

$PH_3 \perp CD$且$PH_3 = CD\,|\operatorname{ctg}\angle CPD\,|$；

$\operatorname{ctg}\angle APB = -\operatorname{ctg}\angle CPD$（由§47例46得），

∴ $PH_1/PH_3 = AB/CD = RC/CD$。

∴ $\triangle PH_1H_3 \backsim \triangle CRD$（边角边）且$PH_1 \perp AB \parallel RC$，

∴ $H_1H_3 \perp RD$。

同理$H_2H_4 \perp RD$（$\triangle QH_2H_4 \backsim \triangle ARD$）。

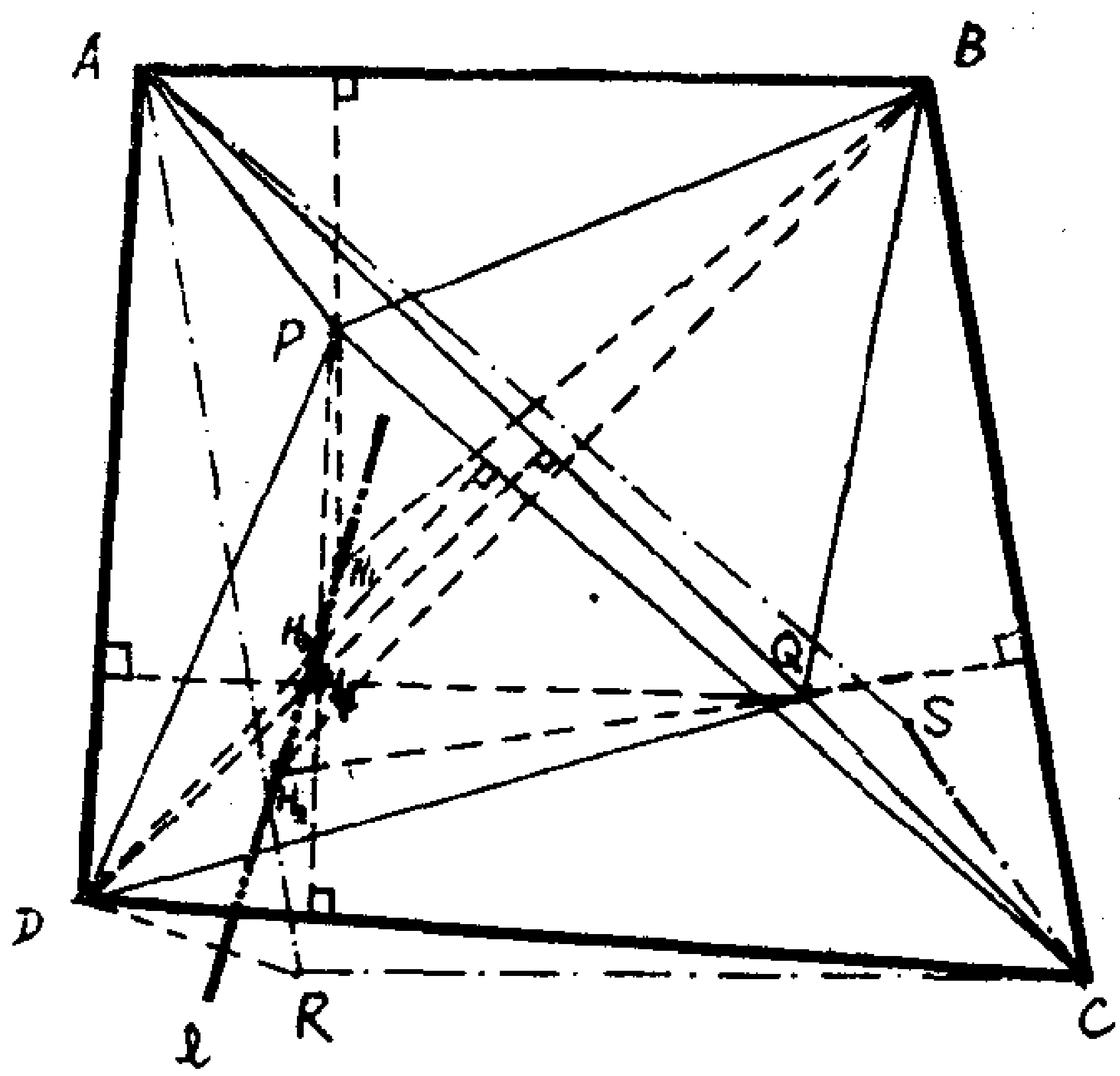
∴ H_1H_3、H_2H_4平行或重合（同垂直RD）。

同理H_1H_2、H_3H_4平行或重合（同垂直SQ），

H_2H_3、H_4H_1平行或重合（同垂直SQ）。

由上便得H_1、H_2、H_3、H_4共线l且$l \perp DR$及SQ。

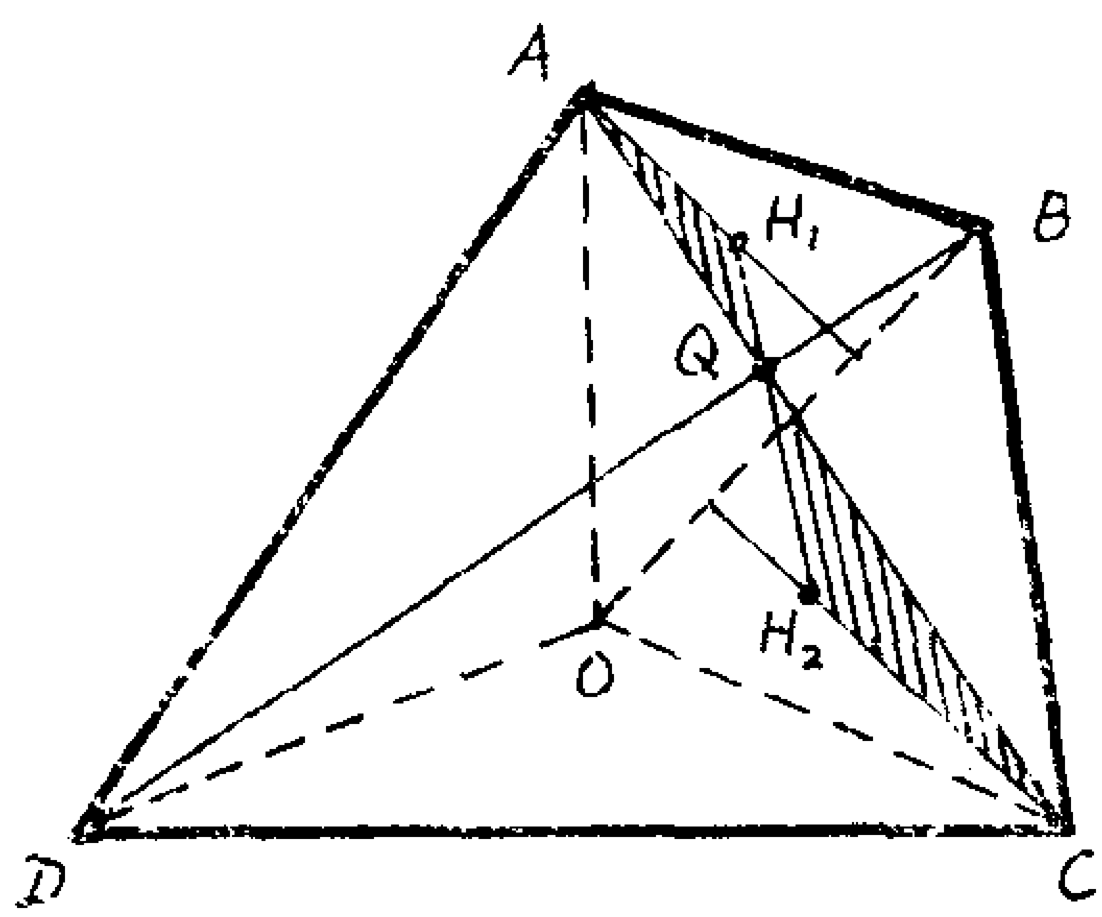
（2）同上可证。



图总—95

(3)由前面证明知，所得两直线都垂直 DR及 SQ，故它们必互相平行。

96. 在四边形$ABCD$中，设$AC\perp BD$，则两对角线的等角线会于一点O，且$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODA$的垂心共线。



图总—96

证： 如图设，

∵ $AC\perp BD$，

∴ 由§47例45、例46 推论可知Q的等角共轭点存在，设为O。

令$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODA$的垂心为H_1、H_2、H_3、H_4。

∴ $AH_1=OB\,|\operatorname{ctg}\angle BAO\,|$，

$CH_2=OB\,|\operatorname{ctg}\angle BCO\,|$， $AH_1\perp OB\perp CH_2$，

$\therefore\quad AH_1/CH_2 = |\text{ctg}\angle BAO/\text{ctg}\angle BCO|$

$= |\text{ctg}\angle CAD/\text{ctg}\angle ACD| = AQ/CQ$,

$\angle H_1AQ = \angle H_2CQ$,

故 $\triangle AH_1Q \backsim \triangle CH_2Q$, $\therefore\quad \angle AQH_1 = \angle CQH_2$

$\therefore\quad H_1$、Q、H_2共线。

同理H_2、Q、H_3；H_3、Q、H_4各共线，

故 H_1、H_2、H_3、H_4、O五点共线。

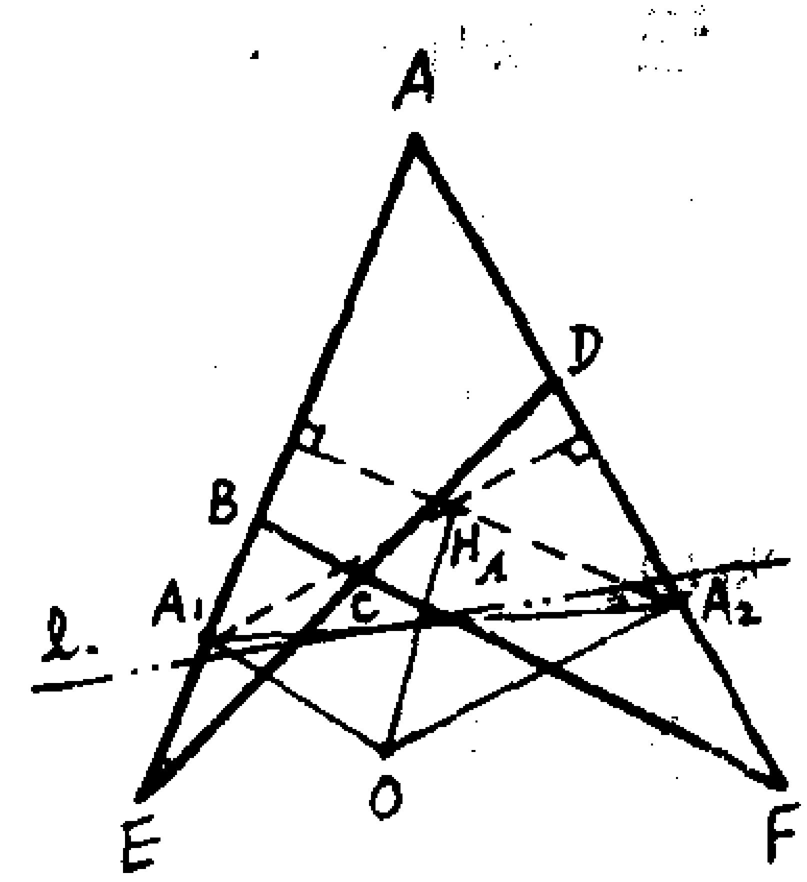
97。在完全四边形的每双对节中，自此节的中点向他节引垂线，所引两垂线的交点必落在完全四边形的垂心线上。

证：如图，设A_1、A_2是完全四边形$ABCDEF$的对节BE、DF的中点，O为密克点。H_A为$\triangle AA_1A_2$的垂心（$A_1H_A \perp DF$，$A_2H_A \perp BE$）。

由§48例53可得O对A_1AA_2的西摩松线就是完全四边形的西摩松线l，

$\therefore\quad OH_A$的中点在l上（复习题三第37题）。

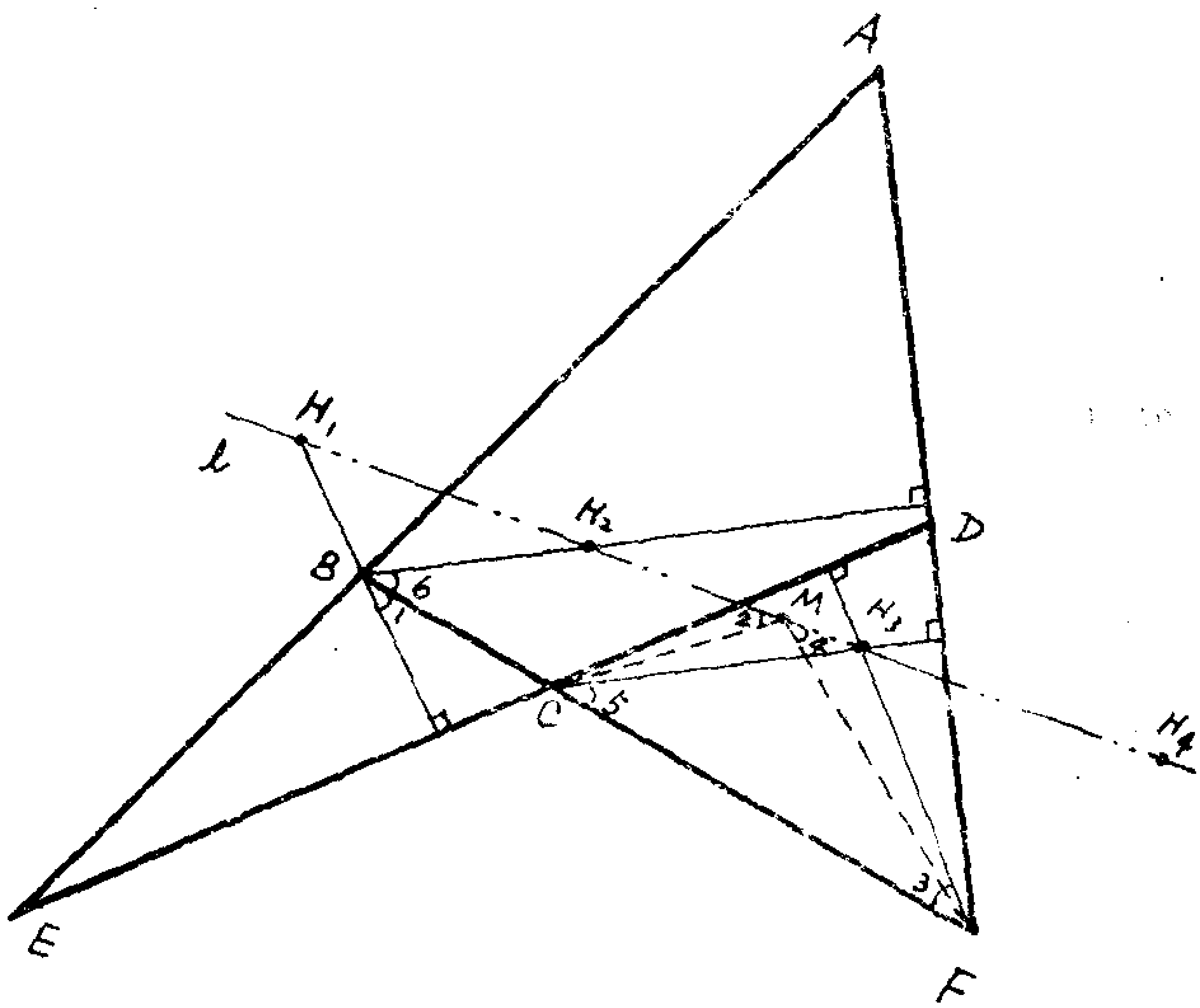
$\therefore\quad H_A$必在完全四边形的垂心线上（复习题三第43题）。



图总—97

余类推。即原题得证。

98. 完全四边形各边共交成四个三角形，若通过每形的垂心及任两顶点作圆，试证所作十二个圆除三三会于四个三角形的垂心外，又三三会于其他四点，这四点同在完全四边形的垂心线上。



图总—98

证：如图，设H_1、H_2、H_3、H_4为$\triangle BCE$、$\triangle ABF$、$\triangle CDF$、$\triangle ADE$的垂心。

设$\odot H_1BC$交垂心线l于M，

有　$\angle 1 = \angle 2$。

∵　$\angle 1=\angle 3$　($H_1B \parallel H_3F \perp DE$),

∴　$\angle 2=\angle 3$。

故　$\odot H_3CF$也过M,

∴　$\angle 4=\angle 5$。

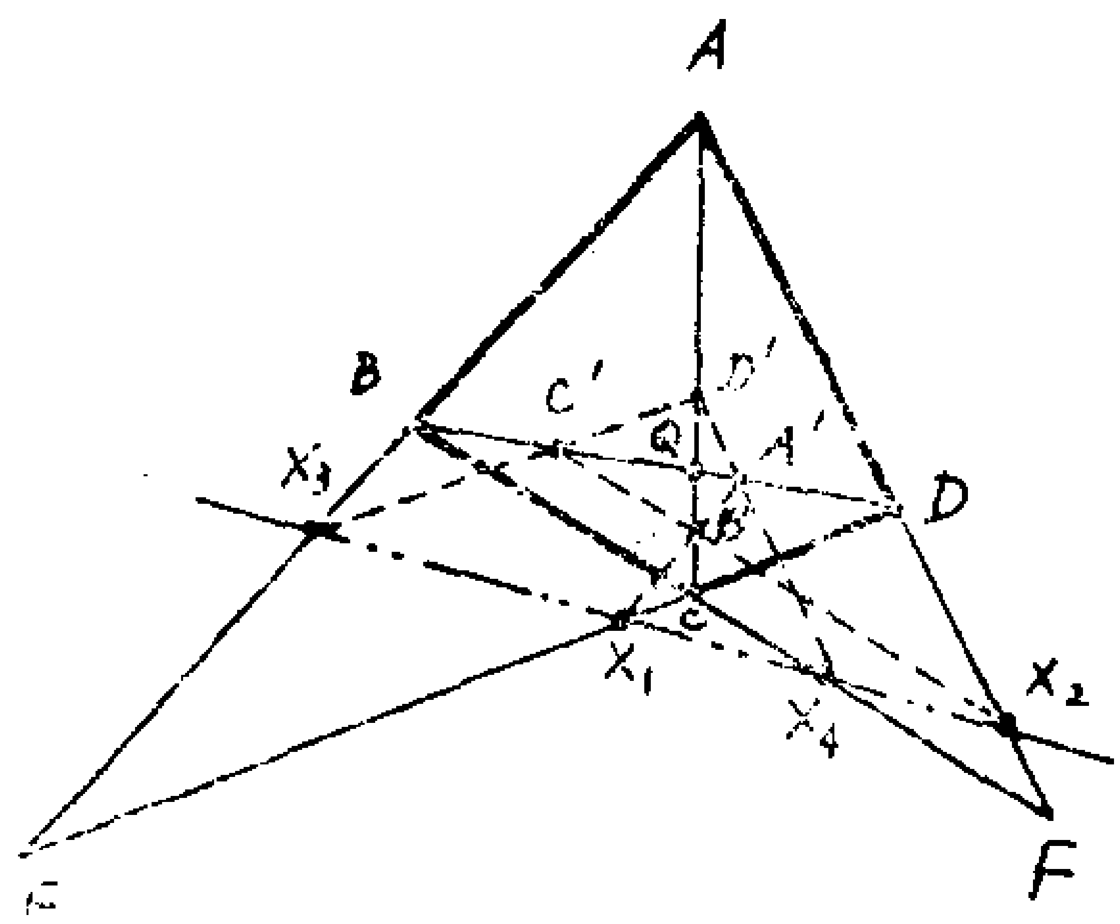
∵　$\angle 5=\angle 6$,∴　$\angle 4=\angle 6$,

故　$\odot H_2BF$也过M。

即　$\odot H_1BC$、$\odot H_2BF$、$\odot H_3CF$共点M且M在l上。

余类推。

99。在四边形$ABCD$中,A'、C'是BD上的两点,B'、D'是AC上的两点。若$A'B' \parallel AB$、$B'C' \parallel BC$、$C'D' \parallel CD$,则$D'A' \parallel DA$,且$A'B'$与CD、$B'C'$与DA、$C'D'$与AB、$D'A'$与BC的交点共线。



图总—99

证:如图设,

$\because \quad QA'/QB' = QB/QA$，$QB'/QC' = QC/QB$，

$QC'/QD' = QD/QC$，

$\therefore \quad QA'/QD' = QD/QA$，有 $A'D' \parallel AD$。

从$\triangle ADE$来看，$\dfrac{X_1E}{X_1D} = \dfrac{A'B}{A'D}$、

$$\frac{X_2D}{X_2A} = \frac{DF\dfrac{DC'}{DB}}{AF\dfrac{AB'}{AC}}、\frac{X_3A}{X_3E} = \frac{D'A}{D'C}，$$

$$\therefore \quad \frac{X_1E}{X_1D} \cdot \frac{X_2D}{X_2A} \cdot \frac{X_3A}{X_3E} = \frac{A'B}{A'D} \cdot \frac{D'A}{D'C} \cdot \frac{DC'}{AB'}$$

$$\cdot \frac{DF \cdot AC}{AF \cdot DB}$$

$$= \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QA}{QD} \cdot \frac{QD}{QC} \cdot \frac{DF \cdot AC}{AF \cdot DB} = \frac{QB \cdot AC}{QC \cdot DB} \cdot \frac{DF}{AF}$$

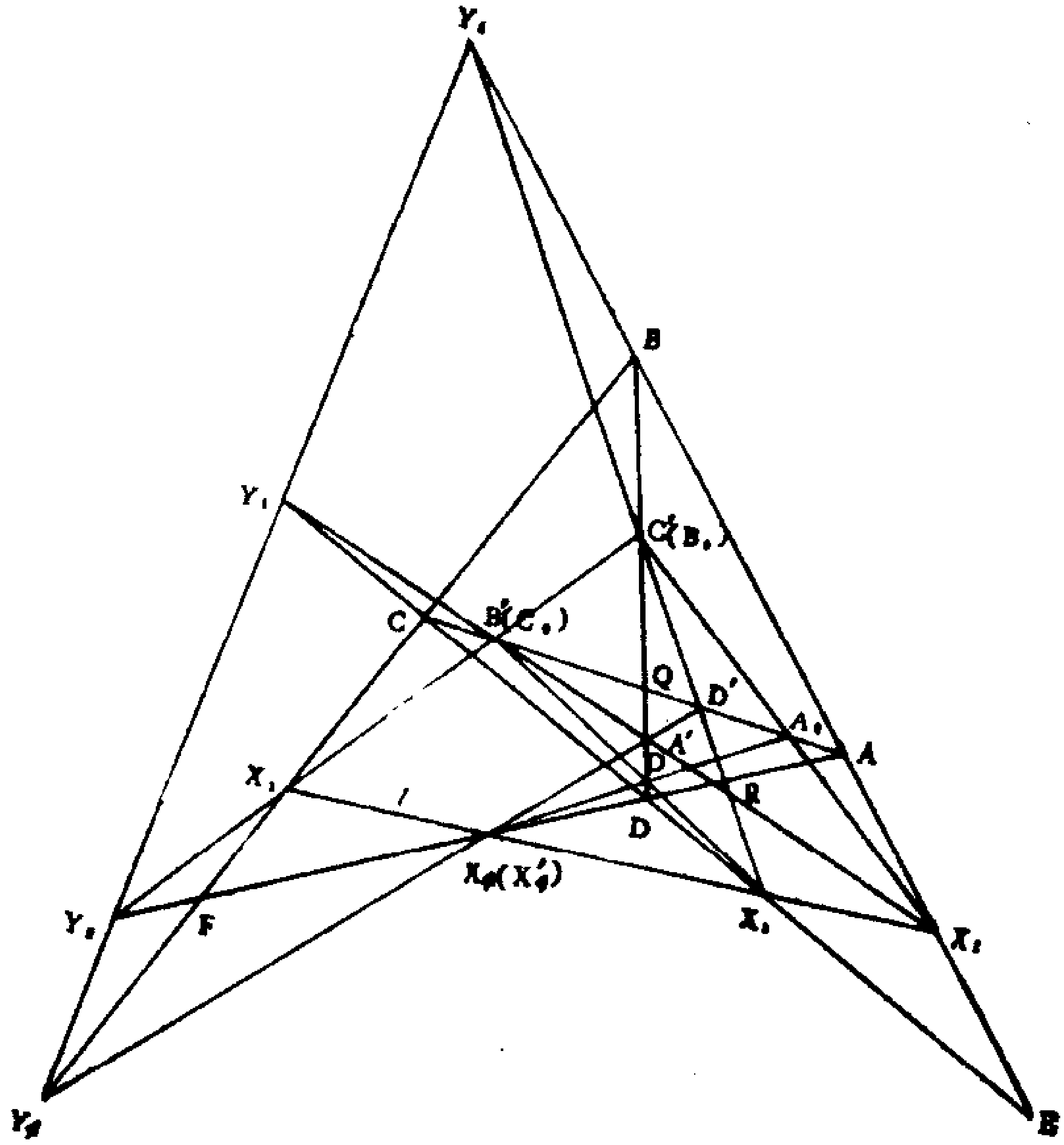
$$= \frac{BQ}{BD} \cdot \frac{CA}{CQ} \cdot \frac{FD}{FA} = 1.$$

故 X_1、X_2、X_3共线。

同理X_2、X_3、X_4共线，

故 X_1、X_2、X_3、X_4四点共线。

100．在上题中，若$A'B'$与AB、$B'C'$与BC、$C'D'$与CD的交点共线，则$D'A'$与DA的交点也在此线上，此外仍保持其余结论。



图总—100

证：设X_1、X_2、X_3共线l。令C'为B_0、B'为C_0，连B_0X_1交AC于A_0、C_0X_3交BD于D_0，$A'D'$交l于X_4'。

由习题十四第30题知A_0D_0与AD的交点在l上即

A_0D_0、AD、l共点 ①

设B_0X_3交C_0X_1于R，运用梅涅劳定理有：

$$\frac{X_4'X_3}{X_4'X_1}\cdot\frac{A'X_1}{A'R}\cdot\frac{D'R}{D'X_3}=1 \qquad (\triangle RX_1X_3),$$

$$\frac{D_0E}{D_0C}\cdot\frac{A'C_0}{A'X_1}\cdot\frac{B_0X_1}{B_0E}=1 \qquad (\triangle EC_0X_1),$$

$$\frac{A_0B_0}{A_0E}\cdot\frac{D'X_3}{D'B_0}\cdot\frac{C_0E}{C_0X_3}=1 \qquad (\triangle EB_0X_3),$$

$$\frac{B_0X^3}{B_0R}\cdot\frac{D_0C_0}{D_0X_3}\cdot\frac{A'R}{A'C_0}=1 \qquad (\triangle RC_4X_3),$$

$$\frac{C_0R}{C_0X_1}\cdot\frac{A_0X_1}{A_0B_0}\cdot\frac{D'B_0}{D'R}=1 \qquad (\triangle RB_0X_1),$$

$$\frac{X_2X_1}{X_2X_3}\cdot\frac{B_0E}{B_0X_1}\cdot\frac{C_0X_3}{C_0E}=1 \qquad (\triangle EX_1X_3),$$

$$\frac{B_0R}{B_0X_3}\cdot\frac{C_0X_1}{C_0R}\cdot\frac{X_2X_3}{X_2X_1}=1 \qquad (\triangle RX_1X_3).$$

将上七式相乘，化简便得

$$\frac{X_4'X_3}{X_4'X_1}\cdot\frac{D_0E}{D_0X_3}\cdot\frac{A_0X_1}{A_0E}=1.$$

从$\triangle EX_1X_3$来看，由梅涅劳斯定理得：

X_4'、D_0、A_0共线即$A'D'$、A_0D_0、X_1X_3共点X_4' ②

由①、②知AD、$A'D'$、A_0D_0、X_1X_3四线共点即X_4'、X_4重合。

故 AD、$A'D'$交点X_4在X_1X_3(即l)上。

设$A'B'$与CD、$B'C'$与DA、$C'D'$与AB、$D'A'$与BC交于Y_1、Y_2、Y_3、Y_4。

运用梅涅劳定理有：

$$\frac{X_1A}{X_1B}\cdot\frac{A'B}{A'Q}\cdot\frac{B'Q}{B'A}=1\qquad(\triangle QAB),$$

$$\frac{X_2B}{X_2C}\cdot\frac{B'C}{B'Q}\cdot\frac{C'Q}{C'B}=1\qquad(\triangle QBC),\qquad ③$$

$$\frac{X_3C}{X_3D}\cdot\frac{D'Q}{D'C}\cdot\frac{C'D}{C'Q}=1\qquad(\triangle QCD),$$

$$\frac{X_4D}{X_4A}\cdot\frac{D'A}{D'Q}\cdot\frac{A'Q}{A'D}=1\qquad(\triangle QDA),$$

$$\frac{X_1B}{X_1A}\cdot\frac{X_2C}{X_2B}\cdot\frac{X_3D}{X_3C}\cdot\frac{X_4A}{X_4D}=1$$ (复习题三第108题)。

将上五式相乘，化简便得：

$$\frac{A'B}{B'A}\cdot\frac{B'C}{C'B}\cdot\frac{C'D}{D'C}\cdot\frac{D'A}{A'D}=1\qquad ④$$

运用梅涅劳斯定理有：

$$\frac{Y_1D}{Y_1E}\cdot\frac{A'B}{A'D}\cdot\frac{X_1E}{X_1B}=1\qquad(\triangle EBD),$$

$$\frac{Y_2A}{Y_2D}\cdot\frac{B'Q}{B'A}\cdot\frac{C'D}{C'Q}=1\qquad(\triangle QAD),$$

$$\frac{Y_3E}{Y_3A}\cdot\frac{D'A}{D'C}\cdot\frac{X_3C}{X_3E}=1\qquad(\triangle EAC),$$

$$\frac{X_1B}{X_1E}\cdot\frac{X_3E}{X_3C}\cdot\frac{X_2C}{X_2B}=1\qquad(\triangle EBC).$$

将上四式与③共五式相乘，化简并利用④可得：

$$\frac{Y_1D}{Y_1E}\cdot\frac{Y_2A}{Y_2D}\cdot\frac{Y_3E}{Y_3A}=1.$$

从$\triangle EAD$来看，由梅涅劳斯定理得：

Y_1、Y_2、Y_3三点共线。同理可得Y_2、Y_3、Y_4三点共线。故Y_1、Y_2、Y_3、Y_4四点共线。

101. 已知$\triangle ABC$及三点P_i($i=1, 2, 3$)。连AP_i、BP_i、CP_i，设依次交BC、CA、AB于X_i、Y_i、Z_i，而命

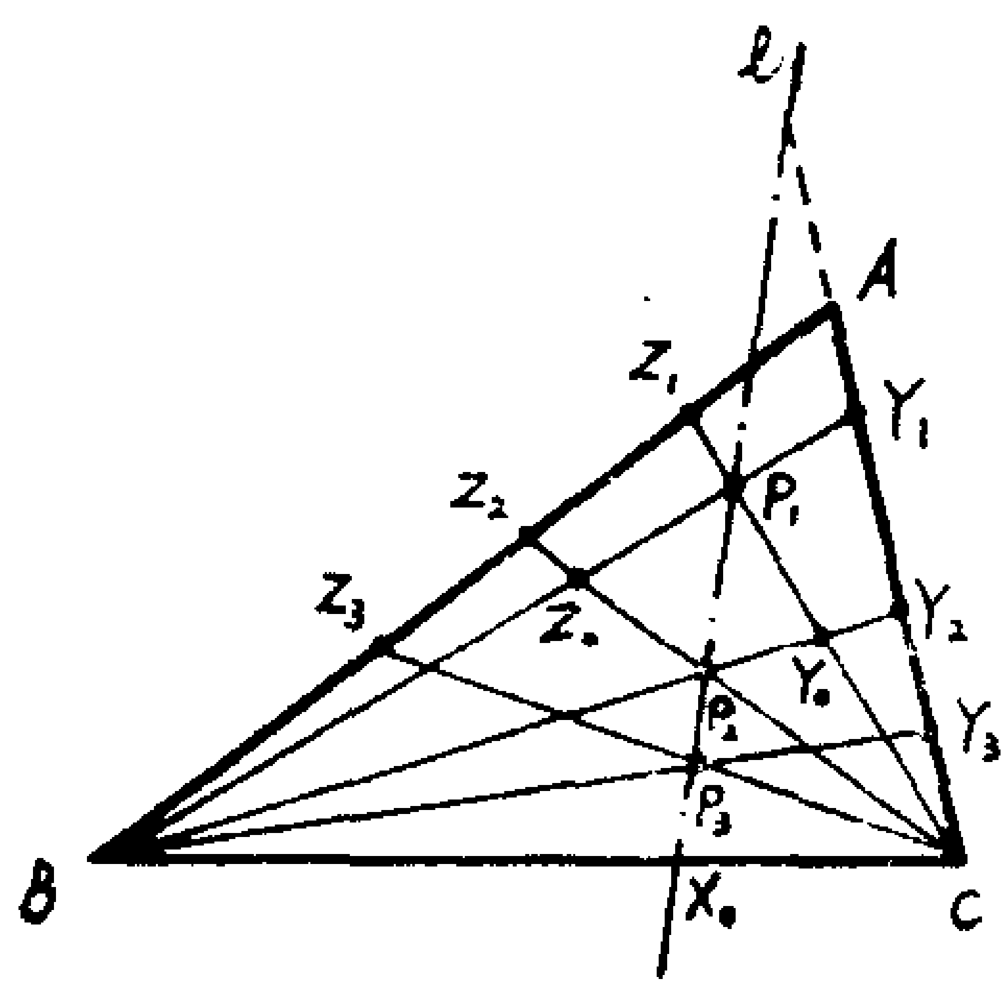
$\overline{X_iB}/\overline{X_iC}=x_i$、$\overline{Y_iC}/\overline{Y_iA}=y_i$、$\overline{Z_iA}/\overline{Z_iB}=z_i$，

则三点P_i共线的必要且充分之条件为下列三式之一成立：

(1) $(x_2-x_3)/z_1+(x_3-x_1)/z_2+(x_1-x_2)/z_3=0$；

(2) $(y_2-y_3)/x_1+(y_3-y_1)/x_2+(y_1-y_2)/x_3=0$；

(3) $(z_2-z_3)/y_1+(z_3-z_1)/y_2+(z_1-z_2)/y_3=0$。



图总—101

证(1)：首先假定P_i共线l。

若l交BC于X_0，如图设。

由塞瓦定理可知：

$$\overline{X_0B}/\overline{X_0C}=-(\overline{Y_0P_1}/\overline{Y_0C})\cdot(\overline{Z_0B}/\overline{Z_0P_1})$$

$$=-(\overline{BP_1}/\overline{BY_1})\cdot(\overline{Y_2Y_1}/\overline{Y_2C})$$

$$:(\overline{Z_2B}/\overline{Z_2Z_1})\cdot(\overline{CZ_1}/\overline{CP_1}).$$

而$\overline{BP_1}/\overline{BY_1}=1/(1-\overline{P_1Y_1}/\overline{BP_2})$

$$=1/[1-(\overline{CY_1}/\overline{CA})\cdot(\overline{Z_1A}/\overline{Z_1B})]$$

$$=1/\{1-[1/(1+\overline{Y_1A}/\overline{CY_1})]\cdot(\overline{Z_1A}/\overline{Z_1B})\}$$

$$=1/\{1-[z_1/(1-1/y_1)]\}$$

$$=(y_1-1)/(-y_1z_1+y_1-1),$$

$\overline{Y_2Y_1}/\overline{Y_2C}=1-\overline{Y_1C}/\overline{Y_2C}$

$$=1-[y_1(1-y_2)/y_2(1-y_1)]$$

$$=(y_2-y_1)/(1-y_1)y_2,$$

$\overline{Z_2B}/\overline{Z_2Z_1}=1/(1-\overline{BZ_1}/\overline{BZ_2})$

$$=1/[1-(z_2-1)/(z_1-1)]$$

$$=(z_1-1)/(z_1-z_2),$$

$\overline{CZ_1}/\overline{CP}=1-\overline{P_1Z_1}/\overline{P_1C}$

$$=1-(\overline{BZ_1}/\overline{BA})\cdot(\overline{Y_1A}/\overline{Y_1C})$$

$$=1-[1/(1-z_1)]\times(1/y_1)$$

$$=(-y_1z_1+y_1-1)/y_2(1-z_1),$$

$$\therefore \overline{X_0B}/\overline{X_0C}=(1/y_1-1/y_2)[1/(z_1-z_2)] \qquad ①$$

同理可证：

$\overline{X_0B}/\overline{X_0C}=(1/y_2-1/y_3)/(z_2-z_3)$

$= (1/y_3 - 1/y_1)/(z_3 - z_1)$。

从$(1/y_1 - 1/y_2)/(z_1 - z_2) = (1/y_2 - 1/y_3)/(z_2 - z_3)$

化简得：

$$(z_2 - z_3)/y_1 + (z_3 - z_1)/y_2 + (z_1 - z_2)/y_3 = 0 \qquad ②$$

其次假定②式成立。

设P_1P_2交BC于X_{12}，P_1P_3交BC于X_{13}，

仿照①式的求法可得：

$$\overline{X_{12}B}/X_{12}C = (1/y_1 - 1/y_2)/(z_1 - z_2) \qquad ③$$

$$X_{13}\overline{B}/X_{13}C = (1/y_1 - 1/y_3)/(z_1 - z_3) \qquad ④$$

利用②可知③、④右边相等，

$\therefore \overline{X_{12}B}/\overline{X_{12}C} = \overline{X_{13}B}/\overline{X_{13}C}$，得$X_{12}$、$X_{13}$重合，

$\therefore P_1$、P_2、P_3共线。

注：当$P_1P_2 \parallel BC$的情形，留给读者讨论。

（2）、（3）同上可证之。

102. 设三直线l_i（$i=1, 2, 3$）交$\triangle ABC$或者延长线于X_i、Y_i、Z_i，而命

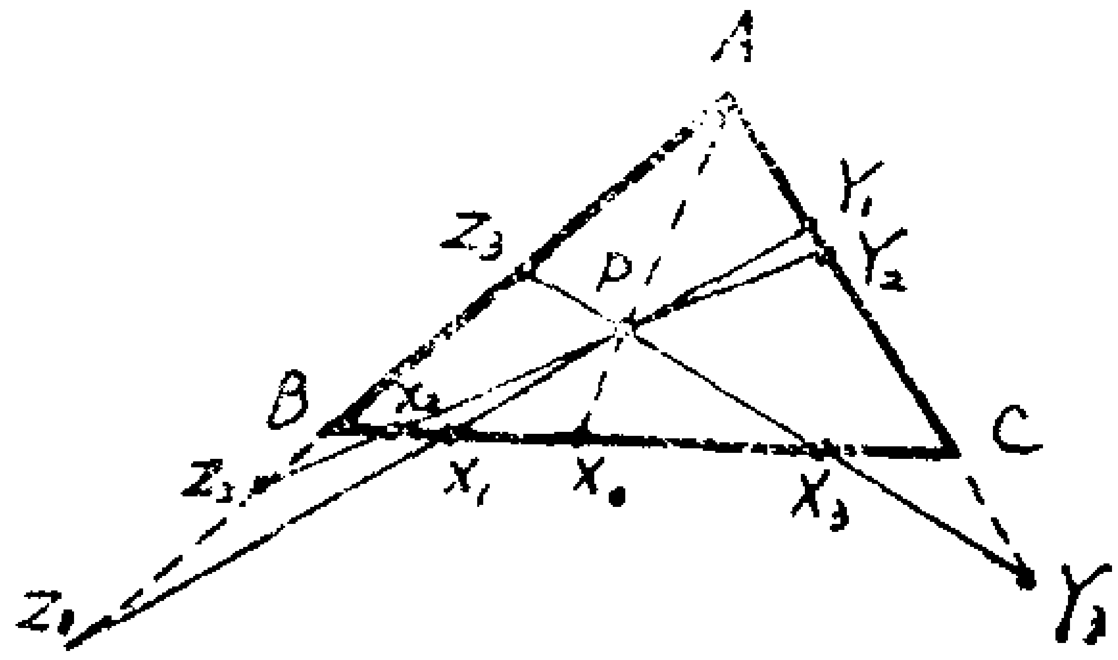
$$\overline{X_iB}/\overline{X_iC} = x_i,\quad \overline{Y_iC}/\overline{Y_iA} = y_i,\quad \overline{Z_iA}/\overline{Z_iB} = z_i,$$

则三直线l_i共点或互相平行的必要且充分之条件为下列三式之一成立：

(1) $(x_2 - x_3)/y_1 + (x_3 - x_1)/y_2 + (x_1 - x_2)/y_3 = 0$;

(2) $(y_2 - y_3)/z_1 + (y_3 - y_1)/z_2 + (y_1 - y_2)/z_3 = 0$;

(3) $(z_2 - z_3)/x_1 + (z_3 - z_1)/x_2 + (z_1 - z_3)/x_3 = 0$。



图总—102

证(1)：如图设，

若 l_i 平行，不难得证。

若 l_i 共点P，设AP交BC于X_0。

由塞瓦定理得：

$$\begin{cases}\overline{PZ_1}/\overline{PY_1} = (\overline{Z_2Z_1}/\overline{Z_2A}) \cdot (\overline{Y_2A}/\overline{Y_2Y_1}) \\ \overline{PZ_1}/\overline{PY_1} = (\overline{Z_3Z_1}/\overline{Z_3A}) \cdot (\overline{Y_3A}/\overline{Y_3Y_1})\end{cases}$$

$$\therefore (1 + \overline{AZ_1}/\overline{Z_2A})(1 + \overline{AY_1}/\overline{Y_3A}) = (1 + \overline{AZ_1}/\overline{Z_3A}) \cdot (1 + \overline{AY_1}/\overline{Y_2A}),$$

$$[1 - z_1(1 - z_2)/z_2(1 - z_1)][1 - (y_3 - 1)/(y_1 - 1)]$$
$$= [1 - z_1(1 - z_3)/z_3(1 - z_1)][1 - (y_2 - 1)/(y_1 - 1)]$$

故$(y_1 - y_2)/z_3 + (y_3 - y_1)/z_2 + (y_2 - y_3)/z_1 = 0$ ①

其次假设①成立。

若$l_1 \parallel l_2$，则利用①可求得$l_2 \parallel l_3$。

若l_1交l_2于P_{12}，则$l_1 \nparallel l_3$（否则导出$l_1 \parallel l_2$）.设l_1交l_3于P_{13}，

由梅涅劳斯定理可知：

$$\begin{cases} \overline{P_{12}Z_1}/\overline{P_{12}Y_1}=(\overline{Z_2Z_1}/\overline{Z_2A})\cdot(\overline{Y_2A}/\overline{Y_2Y_1}) \\ \overline{P_{13}Z_1}/\overline{P_{13}Y_1}=(\overline{Z_3Z_1}/\overline{Z_3A})\cdot(\overline{Y_3A}/\overline{Y_3Y_1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{P_{12}Z_1}/\overline{P_{12}Y_1}=(1+\overline{AZ_1}/\overline{Z_2A})/[1/(1+\overline{AY_1}/\overline{Y_2A})] \\ \overline{P_{13}Z_1}/\overline{P_{13}Y_1}=(1+\overline{AZ_1}/\overline{AZ_3})/[1/(1+\overline{AY_1}/\overline{AY_3})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{P_{12}Z_1}/\overline{P_{13}Y_1}=[1-z_1(1-z_2)/z_2(1-z_1)] \\ \qquad\times 1/[1-(y_2-1)/(y_1-1)] \qquad ② \\ \overline{P_{13}Z_1}/\overline{P_{13}Y_1}=[1-z_1(1-z_3)/z_3(1-z_1)] \\ \qquad\times 1/[1-(y_3-1)/(y_1-1) \qquad ③ \end{cases}$$

利用①式可导出②、③右边相等，

$\therefore \overline{P_{12}Z_1}/\overline{P_{12}Y_1}=\overline{P_{13}Z_1}/\overline{P_{13}Y_1}$

得P_{12}、P_{13}重合。

故l_1、l_2、l_3共点。

103。设直线l交$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线于X、Y、Z，而命

$\overline{XB}/\overline{XC}=x$、$\overline{YC}/\overline{YA}=y$、$\overline{ZA}/\overline{ZB}=z$，

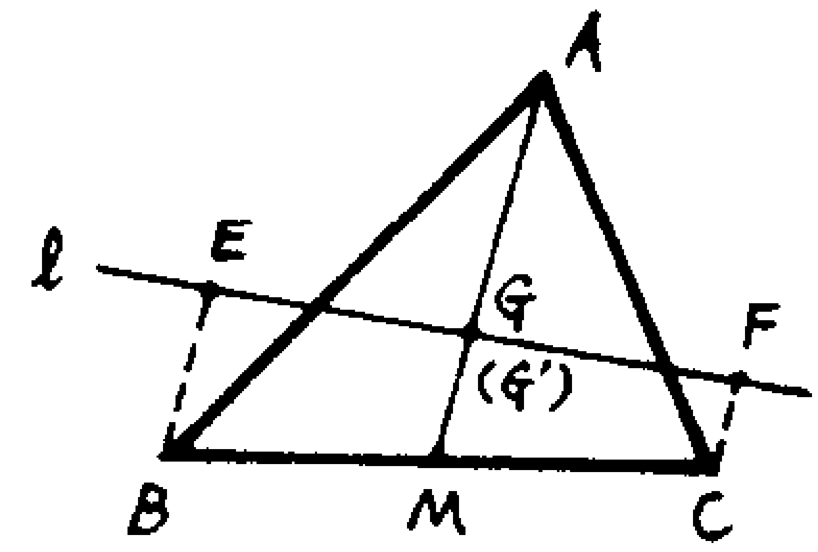
则直线l通过$\triangle ABC$的重心的必要且充分之条件为下列三

式之一成立：

（1） $y+1/z=-1$；

（2） $z+1/x=-1$；

（3） $x+1/y=-1$。



图总—103

证(1)：如图设，首先假定 l 过重心G，过B、C作AM的平行线交YZ于E、F，

则$\overline{BE}=\overline{BZ}\cdot\overline{AG}/\overline{AZ}$，$\overline{CF}=\overline{CY}\cdot\overline{AG}/\overline{AY}$，

故$\overline{BE}+\overline{CF}=2\overline{MG}=-\overline{AG}$，

有$[(\overline{BZ}/\overline{AZ})+(\overline{CY}/\overline{AY})]\cdot\overline{AG}=-\overline{AG}$，

$\therefore 1/z+y=-1$　　①

其次假定①成立，

设AM交 l 于G'，下面证G'为重心。

$\because \overline{BE}+\overline{CF}=2\overline{MG}$，

又$\overline{BE}+\overline{CF}=\overline{BZ}\cdot\overline{AG}/\overline{AZ}+\overline{CY}\cdot\overline{AG}/\overline{AY}$

$$=(1/z+y)\cdot\overline{AG}=-\overline{AG},$$

$\therefore 2\overline{MG}=-\overline{AG}$

故G为重心。

（2）、（3）同理可证。

104。设G是$\triangle ABC$的重心，X、Y、Z分别是AG、BG、

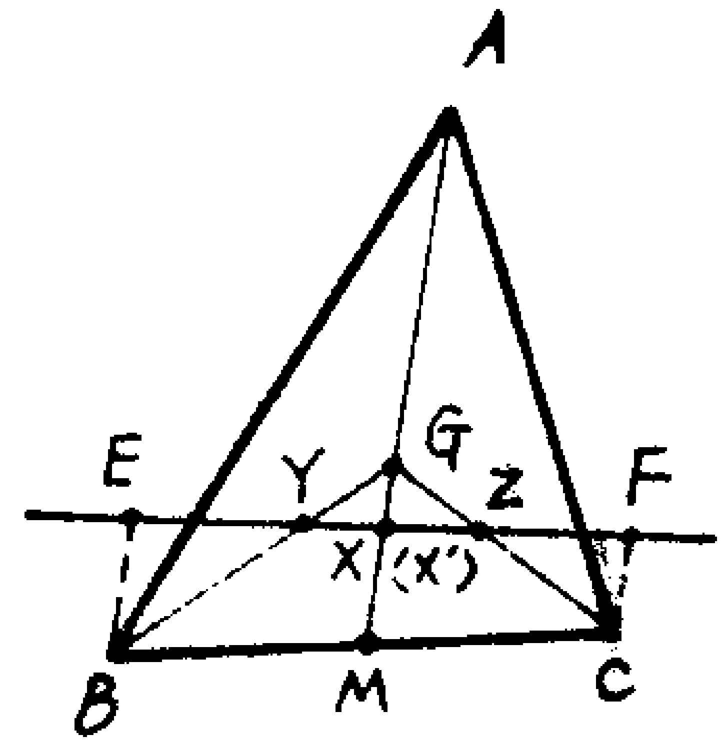
CG三线上的点，而命

$$\overline{XA}/\overline{XG}=x、\overline{YB}/\overline{YG}=y、\overline{ZC}/\overline{ZG}=z,$$

则X、Y、Z三点共线的必要且充分之条件为：

$$x+y+z=3。$$

证：如图设，



图总—104

首先假设X、Y、Z共线，过B、C作AG的平行线交XY于E、F，

则$\overline{BE}=\overline{BY}\cdot\overline{GX}/\overline{GY}$,

$\overline{CF}=\overline{CZ}\cdot\overline{GX}/\overline{GZ}$,

$\therefore\overline{BE}+\overline{CF}=(\overline{BY}/\overline{GY}+\overline{CZ}/\overline{GZ})\cdot\overline{GX}=(y+z)\cdot\overline{GX}。$

又$(y+z)\cdot\overline{GX}=2\overline{MX}=2(\overline{MG}-\overline{XG})$

$=2\overline{MG}-2\overline{XG}=\overline{GA}-2\overline{XG}=\overline{XA}-3\overline{XG}$,

$\therefore y+z=(\overline{XA}/\overline{GX})+3=-x+3$,

$\therefore x+y+z=3$ ①

其次假设①式成立，设YZ交AM于X'，

则$\overline{BE}+\overline{CF}=[(\overline{BY}/\overline{GY})+(\overline{CZ}/\overline{GZ})]\cdot\overline{GX'}$

$=(y+z)\cdot\overline{GX'}$

$=2\overline{MX'}=\overline{X'A}-3\overline{X'G}$

$\therefore y+z+X'A/X'G=3$　　②

由①、②知 $x=\overline{X'A}/\overline{X'G}$，即 $\overline{XA}/\overline{XG}=\overline{X'A}/\overline{X'G}$

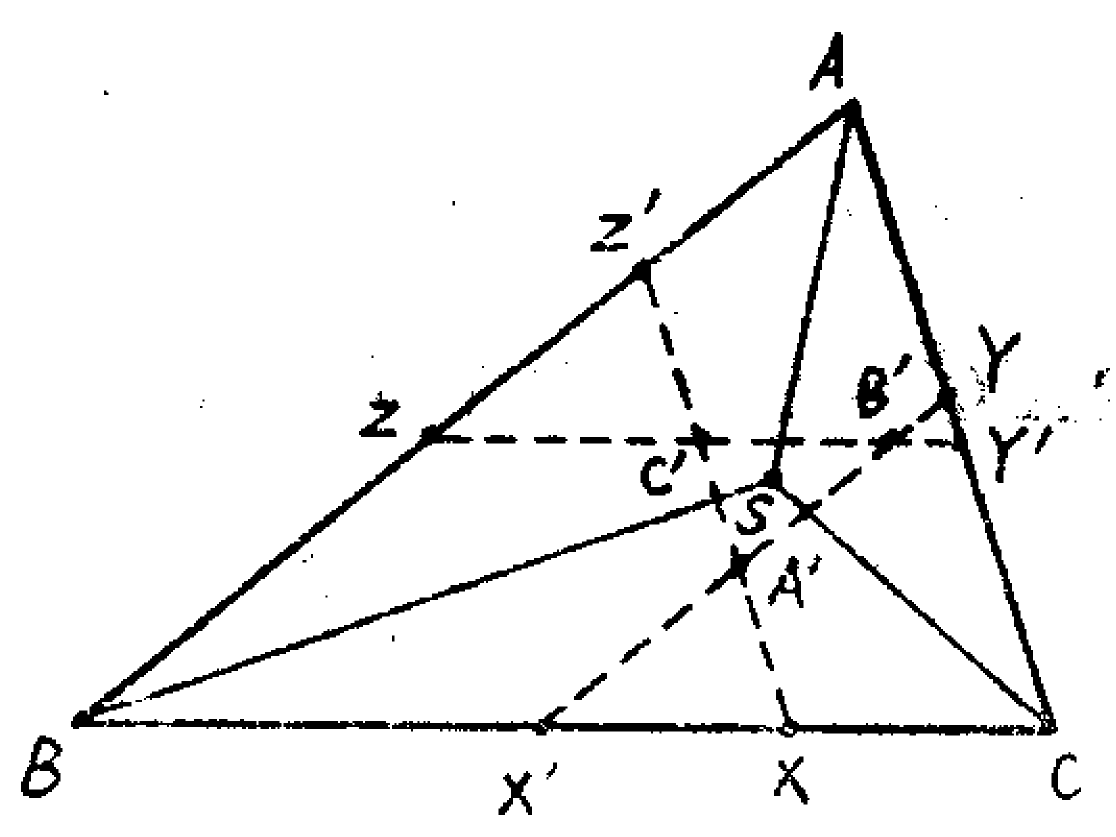
$\therefore X$、X'重合。

故X、Y、Z共线。

105．设S是$\triangle ABC$的等力点，X与X'、Y与Y'、Z与Z'分别是直线BC、CA、AB上的点，合于

$$\begin{cases}\overline{AC}\cdot AY=\overline{AB}\cdot\overline{AZ'}=\overline{k}\cdot\overline{AS^2};\\ \overline{BA}\cdot\overline{BZ}=BC\cdot\overline{BX'}=\overline{k}\cdot\overline{BS}^2;\\ \overline{CB}\cdot C\overline{X}=\overline{CA}\cdot\overline{CY'}=\overline{k}\cdot\overline{CS}^2.\end{cases}$$

k是一常数，则X、X'、Y、Y'、Z、Z'六点共圆。



图总—105

证：如图设，

$$\because\begin{cases}\overline{AZ'}=\overline{k}\cdot\overline{AS}^2/\overline{AB},\\ \overline{CX}=\overline{k}\cdot\overline{CS}^2/\overline{CB},\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \overline{BZ'} = \overline{BA} + \overline{AZ'} = (-\overline{AB}^2 + k \cdot \overline{AS}^2)/\overline{AB}, \\ \overline{BX} = \overline{BC} + \overline{CX} = (-\overline{CB}^2 + k \cdot \overline{CS}^2)/\overline{CB}, \end{cases}$$

$$\therefore \overline{BZ'}/\overline{BX} = (\overline{CB}/\overline{AB}) \times [(-\overline{AB}^2 + k \cdot \overline{AS}^2)/(-\overline{CB}^2 + k \cdot \overline{CS}^2)].$$

$\because \overline{SA} \cdot \overline{BC} = \overline{SB} \cdot \overline{CA} = \overline{SC} \cdot \overline{AB}$,

$\therefore \overline{BZ'}/\overline{BX} = (\overline{CB}/\overline{AB}) \times (\overline{AB}^2/\overline{BC}^2) = \overline{BA}/\overline{BC}$,

$\therefore XZ' \parallel CA$。

同理$YX' \parallel AB$，$ZY' \parallel BC$，

$\because \overline{AC} \cdot \overline{AY} = \overline{AB} \cdot \overline{AZ'}$，

$\therefore YZ'$逆平行CB。

$\therefore$过Y、Z'作AB、AC的平行线交于A'，并且A'在BC的陪位中线（即YZ'的中线）上，

同理YX'与ZY'的交点B'在CA边的陪位中线上，$Z'X$与ZY'的交点C'在AB边的陪位中线上。

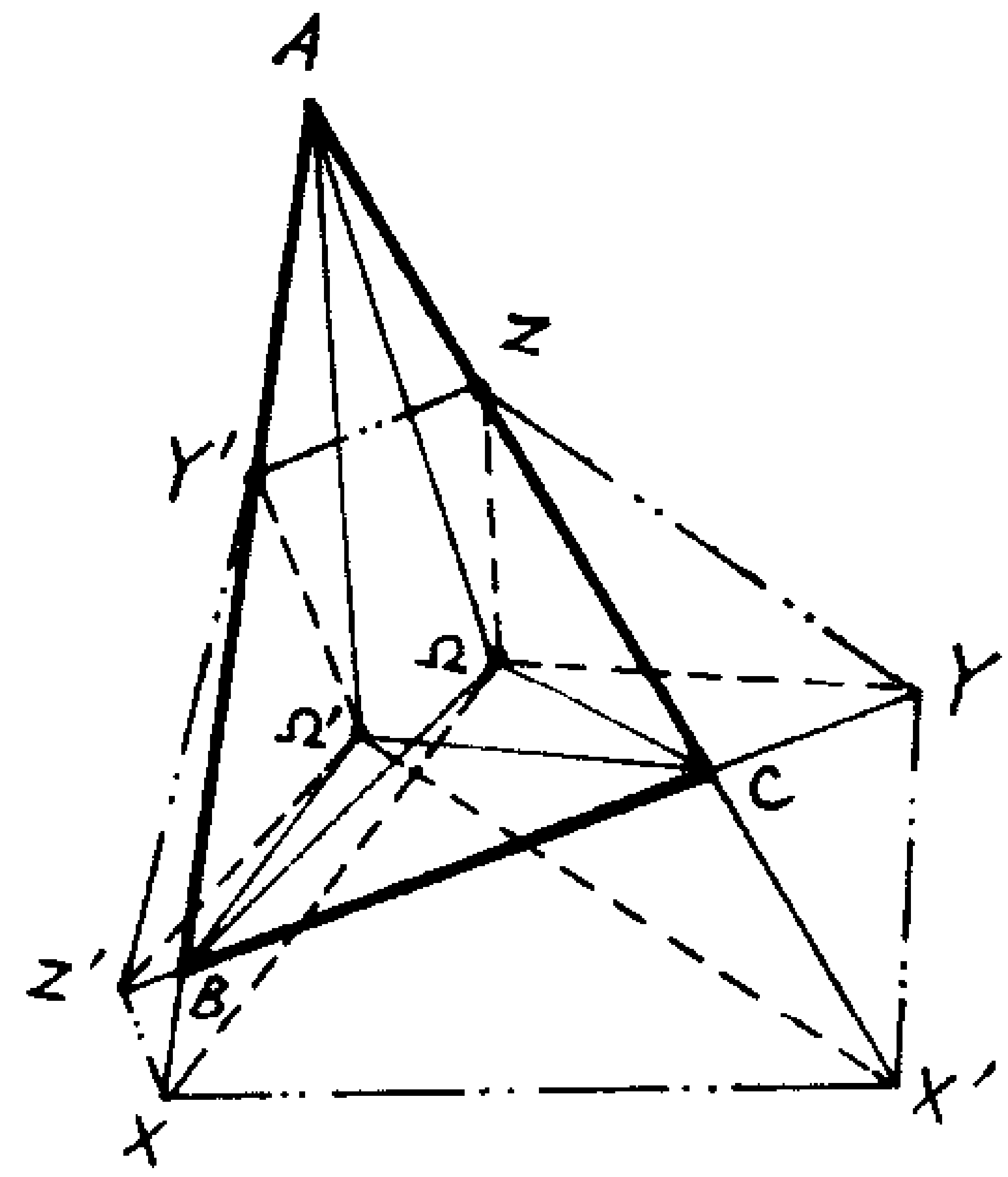
故由习题十六第25题知X、X'、Y、Y'、Z、Z'六点共圆且属于塔刻圆系。

106. 设Ω、Ω'是$\triangle ABC$的正负布洛卡点，Y与Z'、Z与X'、X与Y'分别是直线BC、CA、AB上的点，合于

$$\begin{cases} \Omega Y = \Omega B,\ \ \Omega Z = \Omega C,\ \ \Omega X = \Omega A; \\ \Omega' Z' = \Omega' C,\ \ \Omega' X' = \Omega' A,\ \ \Omega' Y' = \Omega' B, \end{cases}$$

则X、X'、Y、Y'、Z、Z'六点共圆。

这圆也属于塔刻圆系。



图总—106

证：如图设，由习题十七第6题得：

$$\begin{cases} \angle A\Omega C=\angle A\Omega' B=\pi-\angle A \\ \angle CA\Omega=\angle BA\Omega', \end{cases}$$

$\therefore \triangle A\Omega C \backsim \triangle A\Omega' B$。

同理$\triangle A\Omega B \backsim \triangle C\Omega' B$，$\triangle B\Omega C \backsim \triangle A\Omega' C$，

$\therefore A\Omega/A\Omega'=AC/AB$。

又$\because \triangle A\Omega X \backsim \triangle A\Omega' X'$，

$\therefore A\Omega/A\Omega'=AX/AX'$。

$\therefore AC/AB=AX/AX'$，

即$AC\cdot AX'=AB\cdot AX$，

$\therefore XX'$逆平行BC。 ①

又$\begin{cases}\triangle C\Omega'B\backsim\triangle A\Omega B\\ \triangle C\Omega'X'\backsim\triangle A\Omega X\end{cases}$

$\left(\text{由}\begin{cases}\angle Z'C\Omega'=\angle XA\Omega\\ C\Omega'=\Omega'Z'\ \text{得}\\ A\Omega=\Omega X\end{cases}\right)$

$\therefore AZ'/BC=BX/BA$,

有$XZ'\parallel CA$ ②

同理$YX'\parallel AB$，$ZY'\parallel BC$ ③

由①、②、③得

XZ'与YX'交于点A'在BC边的陪位中线（即$\triangle AXX'$边XX'中线）上。

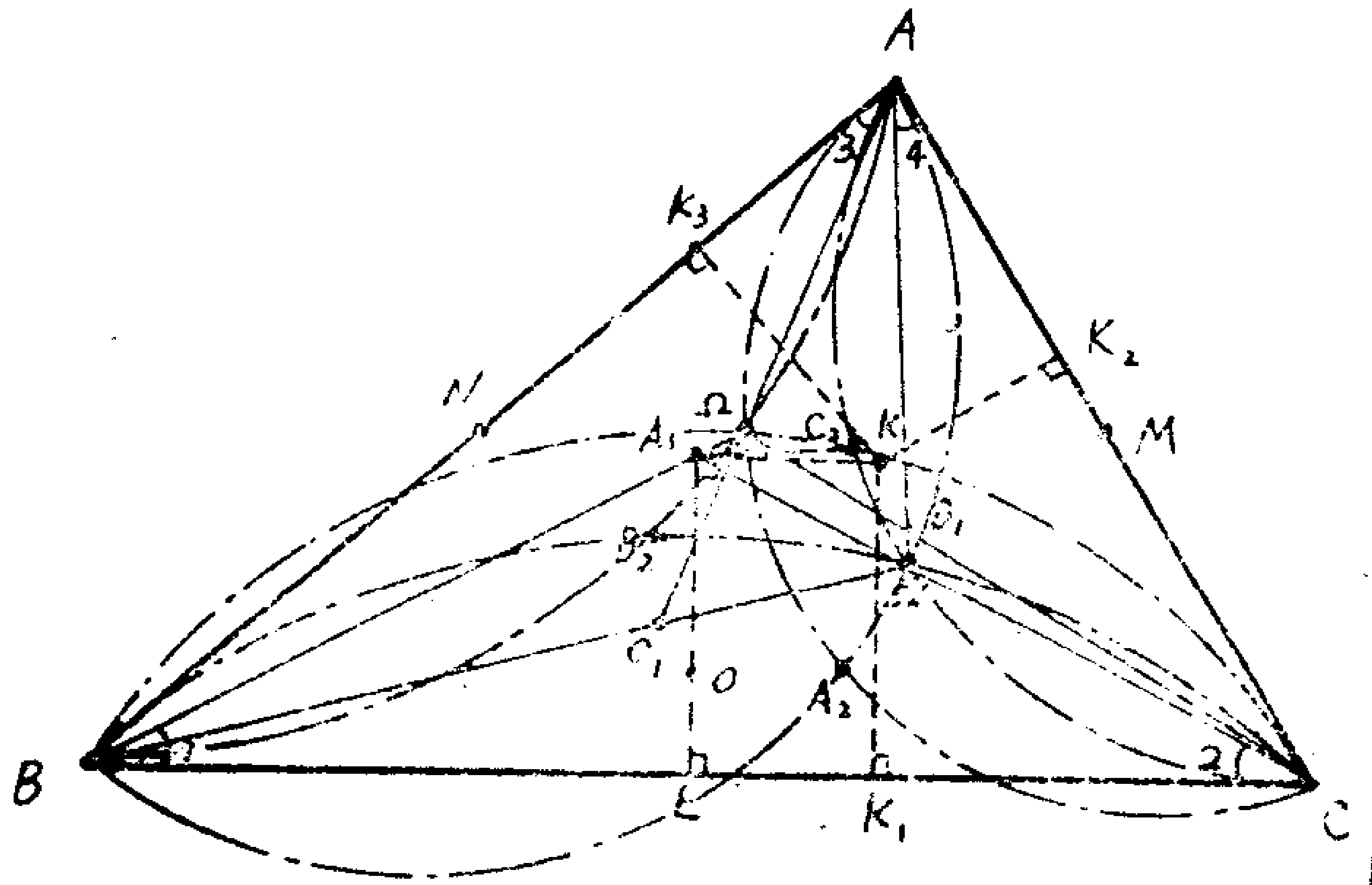
同理YX'与ZY'交于点B'在CA边的陪位中线上；ZY'与XZ'交于点C'在AB边的陪位中线上。

由习题十六第25题知：X、X'、Y、Y'、Z、Z'六点共圆且属于塔刻圆系。

107。设O是$\triangle ABC$的外心，K是陪位重心。Ω、Ω'是正负布洛卡点，A_1、B_1、C_1分别是$B\Omega$与$C\Omega'$、$C\Omega$与$A\Omega'$、$A\Omega$与$B\Omega'$的交点，A_2、B_2、C_2分别是$\odot\Omega CA$、与

⊙$\Omega'AB$、⊙ΩAB与⊙$\Omega'BC$、⊙ΩBC与⊙$\Omega'CA$的交点，则O、K、Ω、Ω'、A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2十点共圆，这圆与△ABC的三乘比圆同心。

所得的圆叫做△ABC的布洛卡圆。



图总—107

证：如图设，

∵$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$（弦切角），

又$\angle 3=\angle 4$，

∴$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$。

∴A_1在BC中垂线上，即A_1O为BC的中垂线。

同理B_1O、C_1O为CA、AB的中垂线。

$$\therefore\begin{cases}\angle \Omega A_1\Omega' = 2\angle 1\\ \angle \Omega B_1\Omega' = \pi - 2\angle 4\\ \angle \Omega C_1\Omega' = 2\angle 3.\end{cases}$$

$$\because\begin{cases}\angle \Omega A_2\Omega' = \Omega A_2 A + AA_2\Omega' = \angle \Omega CA + \angle AB\Omega' = 2\angle 2\\ \angle \Omega B_2\Omega' = 2\angle 4\\ \angle \Omega C_2\Omega' = \pi - 2\angle 2,\end{cases}$$

$\therefore \Omega$、Ω'、A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2八点共圆ω。

而$\angle A_1OB_1 = \angle C = \angle AC\Omega' + \angle 1$

$$= \angle AC\Omega' + \angle 3 = \angle A_1\Omega' B_1,$$

$\therefore A_1$、B_1、O、Ω'四点共圆，

故O在圆ω上。

设OK'为圆ω一直径，K'在BC、CA、AB上射影为K_1、K_2、K_3，L、M、N为BC、CA、AB边中点，

$$\therefore\begin{cases}\angle OA_1K' = \pi/2\\ \angle OB_1K' = \pi/2\\ \angle OC_1K' = \pi/2,\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}K'K_1 = A_1L\\ K'K_2 = B_1M\\ K'K_3 = C_1N\end{cases}$$

不难知$\triangle A_1BC \backsim \triangle B_1CA \backsim \triangle C_1AB$，

$\therefore A_1L/BC = B_1M/CA = C_1N/AB$,

即$K'K_1/BC = K'K_2/CA = K'K_3/AB$。

$\therefore K'$是$\triangle ABC$的陪位重心K(由复习题三第74题知)，由此知OK为圆ω直径，K当然在圆ω上。

故原题得证。

108. 承上题，求证：

(1)自Ω引线平行于BC、CA、AB而交$\odot \Omega BC$、$\odot \Omega CA$、$\odot \Omega AB$于X、Y、Z三点，又自Ω'引线平行于BC、CA、AB而分别交$\odot \Omega' BC$、$\odot \Omega' CA$、$\odot \Omega' AB$于X'、Y'、Z'三点，则X、X'、Y、Y'、Z、Z'、Ω、Ω'八点共圆；

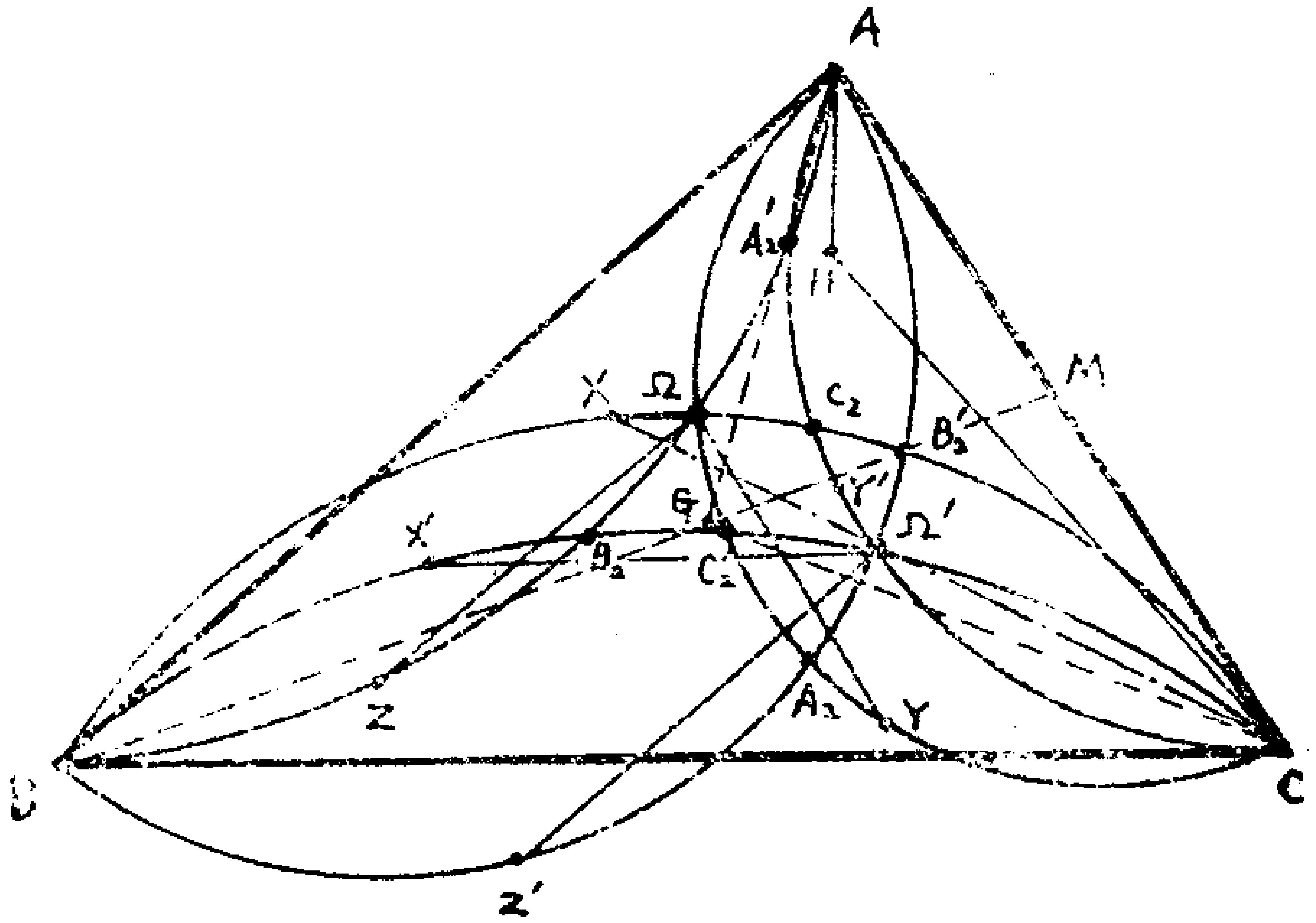
(2)$\triangle ABC$的重心(注：原书错印成外心)、垂心及A_2、B_2、C_2的等角共轭点凡五点共圆；

(3)设$\odot \Omega CA$、$\odot \Omega' AB$交BC于L、L'，引LP平行于BA而交AC于P，又引$L'P'$平行于CA而交AB于P'。在$\odot ABC$中作弦AA'使平行于$\Omega\Omega'$，则A、A'、L、L'、P、P'六点共圆。余类推。

证(1)：如图设，

$\because \Omega X \parallel BC$,

有$\angle XCB=\angle \Omega BC=\angle \Omega CA=\Omega' CB$,



图总—108(a)

$\therefore X$、Ω'、C共线。

同理Y、Ω'、A；Z、Ω'、B；X'、Ω、B；Y'、Ω、C；Z'、Ω、A各三点共线。

$$\therefore \begin{cases} \angle \Omega X \Omega' = \angle \Omega' CB \\ \angle \Omega Y \Omega' = \angle \Omega' AC \\ \angle \Omega Z \Omega' = \angle \Omega' BA \\ \angle \Omega X' \Omega' = \angle \Omega BC \\ \angle \Omega Y' \Omega' = -\angle \Omega CA + 180^\circ \\ \angle \Omega Z' \Omega' = \angle \Omega AB \end{cases}$$

而$\angle \Omega' CB=\angle \Omega' AC=\angle \Omega' BA=\angle \Omega BC$

$=\angle \Omega CA=\angle \Omega AB$,

$\therefore \Omega$、Ω'、X、Y、Z、X'、Y'、Z'八点共圆。

(2)：$\because \angle BA_2'C=\pi-(\angle A_2'BC+\angle A_2'CB)$

$$=\pi-(\angle A_2BA+\angle A_2CA)$$

$$=\pi-(\angle A_2AC+\angle A_2AB)$$

$$=\pi-\angle BAC=\angle BHC,$$

$\therefore B$、C、H、A_2'共圆。　　①

同理C、A、H、B_2'；A、B、H、C_2'各四点共圆。

$\because \angle A_2'BA+\angle A_2'AB=\angle A_2BC+\angle A_2AC$

$=\angle A_2BC+\angle A_2BA=\angle ABC$,

有$\angle BA_2'A=\pi-\angle ABC=\angle B\Omega A$,

$\therefore A_2'$在$\odot \Omega BA$上，同理，A_2'在$\odot \Omega'AC$上。

即A_2'为$\odot \Omega BA$与$\odot \Omega'AC$的一交点。

同理B_2'为$\odot \Omega BC$与$\odot \Omega'AB$的一交点；C_2'为$\odot \Omega CA$与$\Omega'BC$的一交点。

$\therefore \angle B_2'HC_2'=\angle C_2'BA+\angle B_2'CA$

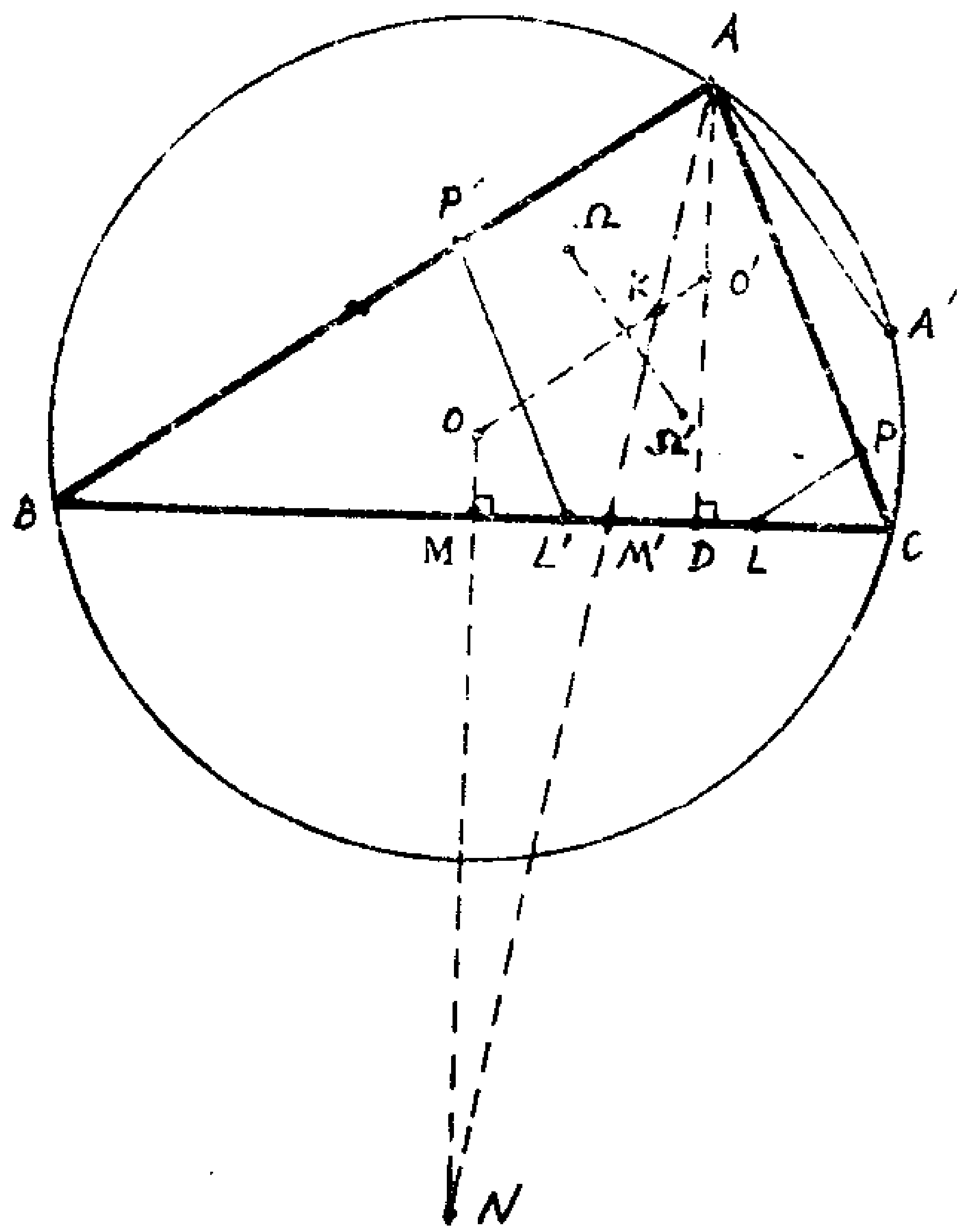
$$=\angle C_2'CA+B_2'BC$$

$$=\angle B_2'GC_2',$$

其中G为BB_2'与CC_2'的交点。

$\therefore B_2'$、C_2'、H、G共圆。　　②

由①、②得A_2'、B_2'、C_2'、H、G五点共圆。



图总—108(b)

设BB_2'交AC于M，则$MC^2=MB_2'\cdot MB$；$MA^2=MB_2'\cdot MB$。

∴$MC=MA$，M为AB中点，

∴GB为AC边中线。

同理GC为AB边中线。

∴G为重心，从而(2)得证。

(3)：由107题知OB_1平分$\angle AB_1C$，即OB_1平分

$\angle \Omega B_1 \Omega'$.

$\therefore O\Omega = O\Omega'$.

故OK必是$\Omega\Omega'$的中垂线。

设OK交高AD于O'，AK交BC于M'，M为BC中点，OM交AM'于N，

由习题十五第16题知$M'B : M'C = c^2 : b^2$。

而$MM' = |M'B - MB| = |c^2 \cdot a/(b^2 + c^2) - a/2|$

$= a|c^2 - b^2|/2(c^2 + b^2)$,

$M'D = |b^2 a/(b^2 + c^2) - CD|$

$= |b^2 a/(b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 - c^2)/2a|$

$= |c^2 - b^2| |c^2 + b^2 - a^2|/2a(b^2 + c^2)$,

$\therefore MN/AD = MM'/M'D$.

有$MN/AD = a^2/|c^2 + b^2 - a^2|$,

$\therefore MN = a^2 \cdot AD/|c^2 + b^2 - a^2|$

$= abc\sin A/2bc|\cos A| = a|\mathrm{tg}A|/2$.

又$ON = OM + MN = a\cdot(\mathrm{ctg}A)/2 + a\cdot(\mathrm{tg}A)/2$

$= a/2\sin A\cos A$,

$\therefore AK : KM' = (b^2 + c^2) : a^2$,

$\therefore AK = AM' \cdot (b^2 + c^2)/(a^2 + b^2 + c^2)$,

$KM' = AM' \cdot a^2/(a^2 + b^2 + c^2)$.

又$M'N = AM' \cdot M'M/DM'$

$= AM' \cdot a^2 / |c^2 + b^2 - a^2|$，

$\therefore KN = 2a^2(c^2 + b^2) \cdot AM' / |(c^2 + b^2)^2 - a^4|$，

$AO'/ON = |c^2 + b^2 - a^2|/2a^2$，

$\therefore AK/KN = |c^2 + b^2 - a^2|/2a^2$，

$\therefore AO' = (a/2\sin A\cos A) \times (2bc \cdot \cos A/2a^2)$

$= b \cdot \sin C/2\sin^2 A = R_1$（$\odot ALL'$的半径）。

$\therefore A$、L、L'、A'四点共圆$\odot O'$。

易证P、P'在$\odot ALL'$上

故A、A'、L、L'、P、P'六点共圆$\odot O'$。

109．设H是$\triangle ABC$的垂心，I是内心或旁心，N是对应的奈格耳点。连AI、BI、CI交$\odot ABC$于A'、B'、C'，命这三点分别关于BC、CA、AB的对称点为A_2、B_2、C_2。引$NA_1 \perp AH$、$NB_1 \perp BH$、$NC_1 \perp CH$于A_1、B_1、C_1，则A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2、H、N八点共圆（Fubrmann 定理）。

证：如图设，过N作$A_2'R \parallel AI$交$A'K$、BC于A_2'、R。

由此得：$XR = XN \cdot XS/XA$。

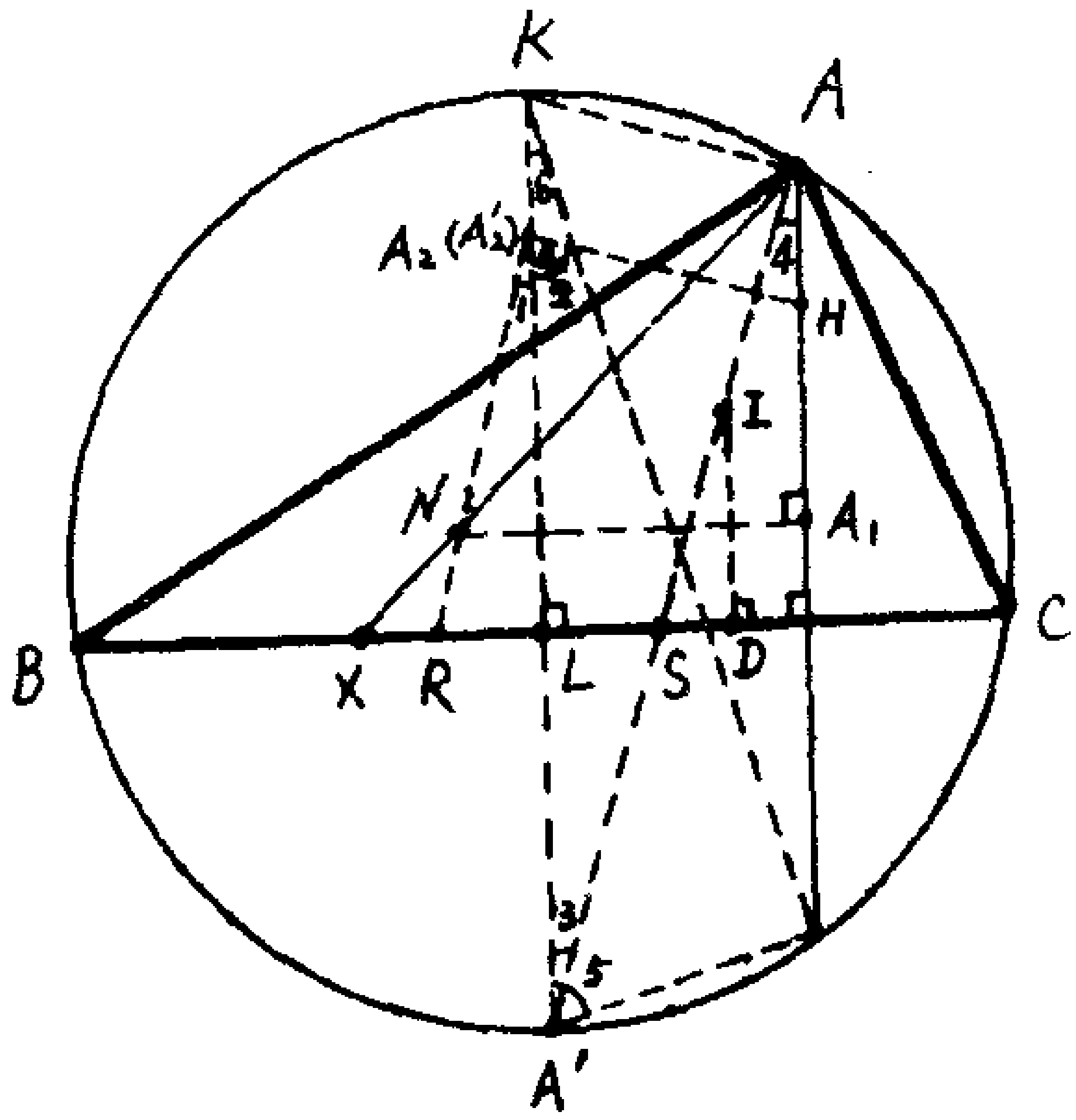
$\because XN/XA = (b+c-a)/(b+c+a)$（由46题知），

$\therefore XS = BS - BX = ca/(c+b) - CD$

$= ca/(c+b) - (b+a-c)/2$

$= (c-b)(c+b+a)/2(b+c)$。

故$XR = (c+b-a)(c-b)/2(c+b)$。



图总—109

又$SD = SC - DC = ba/(c+b) - (b+a-c)/2$

$= (c+b-a)(c-b)/2(c+b)$,

$\therefore XR = SD$。

$\because XL = LD$（习题十五第24题），

$\therefore RL = LS$,

$LA' = LA_2$。因此A_2'与A_2重合，即$NA_2 \parallel AI$,

$\therefore \angle NA_2H = \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 5$

$= \angle 6 + \angle 5 = 90^\circ$.

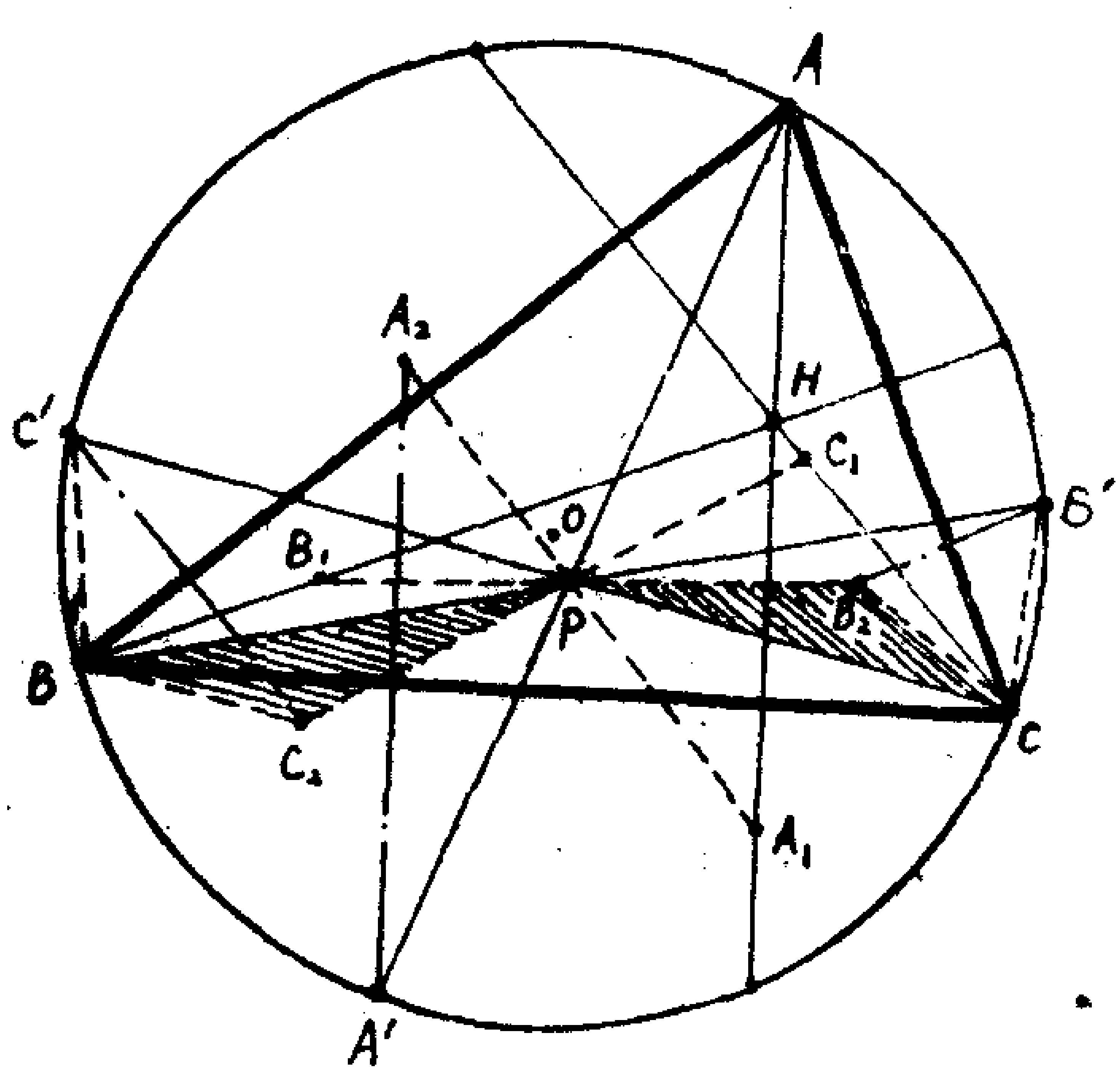
故A_2在圆ω（以NH为直径）上。

同理B_2、C_2也在圆ω上。

又A_1、B_1、C_1显然在圆ω上，

故A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2、N、H八点共圆ω。

110。设H是$\triangle ABC$的垂心，P是任意点。连AP、BP、CP交$\odot ABC$于A'、B'、C'，命这三点分别关于BC、CA、AB的对称点为A_2、B_2、C_2，又连A_2P、B_2P、C_2P分别交AH、BH、CH于A_1、B_1、C_1，则A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2、H七点共圆。（*Hagge*定理）



图总—110

证：

$$\because\begin{cases}\angle C_2BP=\angle C_2BA-\angle PBA\\ \qquad\quad=\angle C'BA-\angle B'BA\\ \angle B_2CP=\angle PCA-\angle B_2CA\\ \qquad\quad=\angle C'CA-\angle B'CA,\end{cases}$$

$$\text{又}\begin{cases}\angle C'BA=\angle C'CA\\ \angle B'BA=\angle B'CA,\end{cases}$$

$$\therefore\angle C_2BP=B_2CP \qquad ①$$

$$\because BC_2/BP=BC'/BP=CB'/PC=CB_2/PC \qquad ②$$

有$\triangle PBC_2\backsim\triangle PCB_2$，

$$\begin{aligned}\therefore\angle B_1PC_2&=\angle B_1PB+\angle BPC_2\\ &=\angle B_1PB+\angle CPB_2\\ &=\angle B_1PB+B_1PC'=\angle BPC' \qquad ③\end{aligned}$$

$$\text{同理}\begin{cases}\angle C_2PA_1=\angle C'PA\\ \angle A_1PB_2=\angle APB'\\ \angle B_2PC_1=\angle B'PC\\ \angle C_1PA_2=\angle CPA'\\ \angle A_2PB_1=\angle A'PB.\end{cases} \qquad ④$$

$$\text{又}\begin{cases}PA_1/PA_2=PA/PA'\\ PB_1/PB_2=PB/PB'\\ PC_1/PC_2=PC/PC',\end{cases} \qquad ⑤$$

从①、②、③、④、⑤可知：多边形$ABCA'B'C'$与多边形$A_1B_1C_1A_2B_2C_2$相似。因此$\angle B_1A_1C_1=\angle BAC=\pi-\angle B_1HC_1$且$A_1B_1C_1A_2B_2C_2$有外接圆。

$\therefore B_1$、A_1、C_1、H四点共圆且A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2六点共圆。

故A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2、H七点共圆。

111．在调和四边形$ABCD$中：设c_1是过D而切AB于A的圆，c_2是过A而切BC于B的圆，c_3是过B而切CD于C的圆，c_4是过C而切DA于D的圆；又设c_1'是过B而切DA于A的圆，c_2'是过C而切AB于B的圆，c_3'是过D而切BC于C的圆，c_4'是过A而切CD于D的圆。求证：

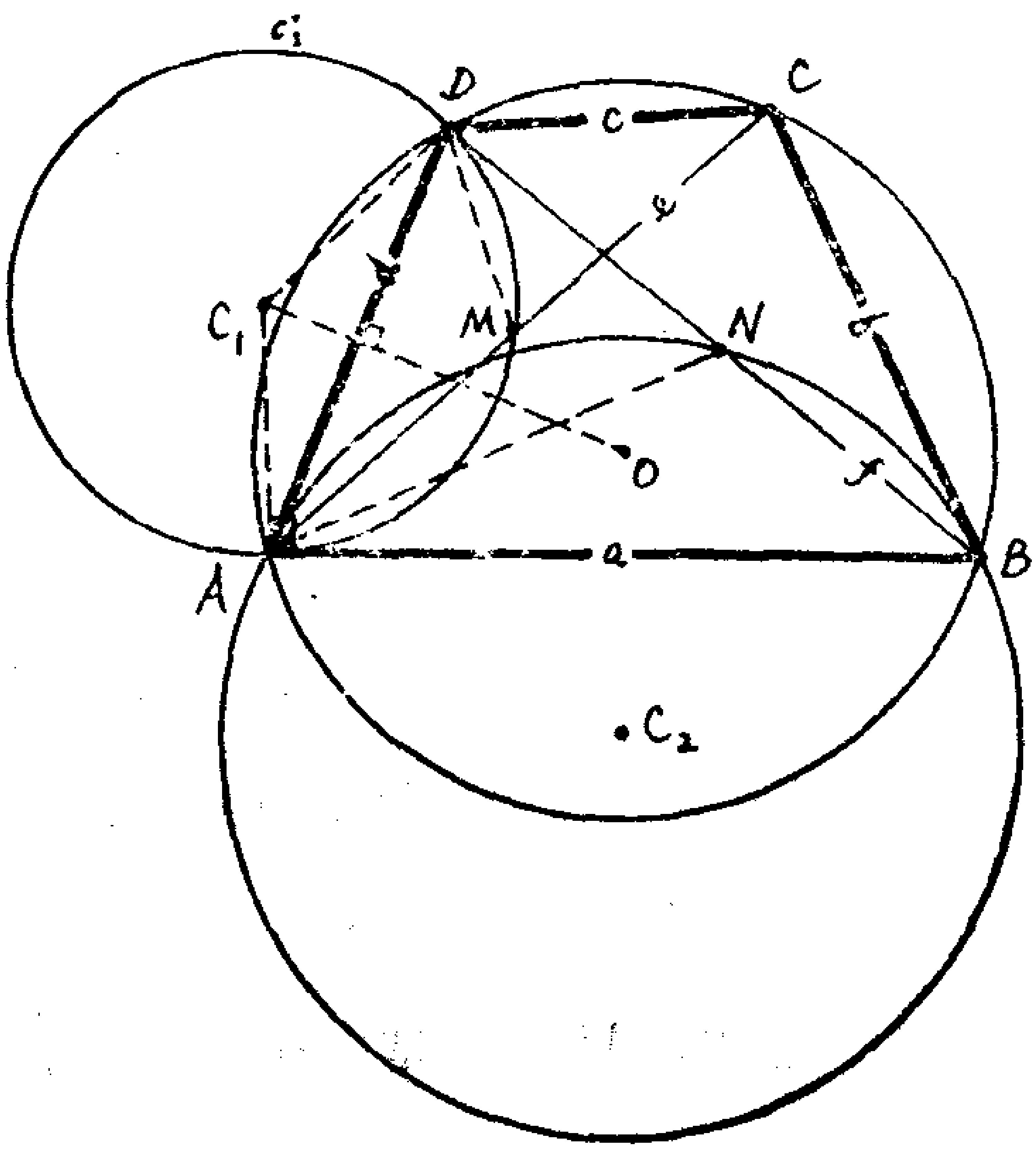
（1）c_1、c_1'、c_3、c_3'四圆会于一点M，c_1'、c_2'、c_3'、c_4'四圆会于一点N，M、N是$ABCD$的等角共轭点；

（2）c_1、c_2、c_3、c_4四圆会于一点Ω，c_1'、c_2'、c_3'、c_4'四圆会于一点Ω'，Ω、Ω'也是$ABCD$的等角共轭点；

（3）$A\Omega$与$B\Omega'$、$B\Omega$与$C\Omega'$、$C\Omega$与$D\Omega'$、$D\Omega$与$A\Omega'$、AC与BD的交点A_1、B_1、C_1、D_1、P连同M、N、Ω、Ω'凡九点共圆；

(4) $A\Omega$与C_1'、$A\Omega'$与C_1、……的第二交点X、X'、……连同Ω、Ω'凡十点共圆。

所谓调和四边形是这样的四边形：它有外接圆而且对边的乘积彼此相等。



图总—111(1)

证(1)：如图设，M、N为AC、BD中点。

$\because$ $ac=bd$ （调和四边形定义），

而 $ac+bd=ef$，

有 $ac=bd=ef/2$，

$\therefore$ $d/(e/2)=f/b$。

又 $\angle DAM=\angle DBC$,

$\therefore\ \triangle DAM \backsim \triangle DBC$ ①

故 $\angle AMD=\angle BCD$

$=\pi-\angle BAD=\pi-\angle AC_1D/2$,

$\therefore$ M在$\odot C_1$(即c_1)上。

同理可证M在c_1'、c_3、c_3'上,

故 c_1、c_1'、c_3、c_3'共点M。

同理可证c_2、c_2'、c_4、c_4'共点N。

由①得$\angle MOC=\angle BDA=\angle NDA$.

同理$\angle MAD=\angle NAB$; $\angle MBA=\angle NBC$; $\angle MCD=\angle NCB$.

故M、N为等角共轭点.

(2): 设c_1与c_2交于另点 Ω,

则 $\angle M\Omega B=\angle MDA+\angle \Omega AB+\angle \Omega BA$

$=\angle CDB+\angle \Omega AB+\angle \Omega BA$

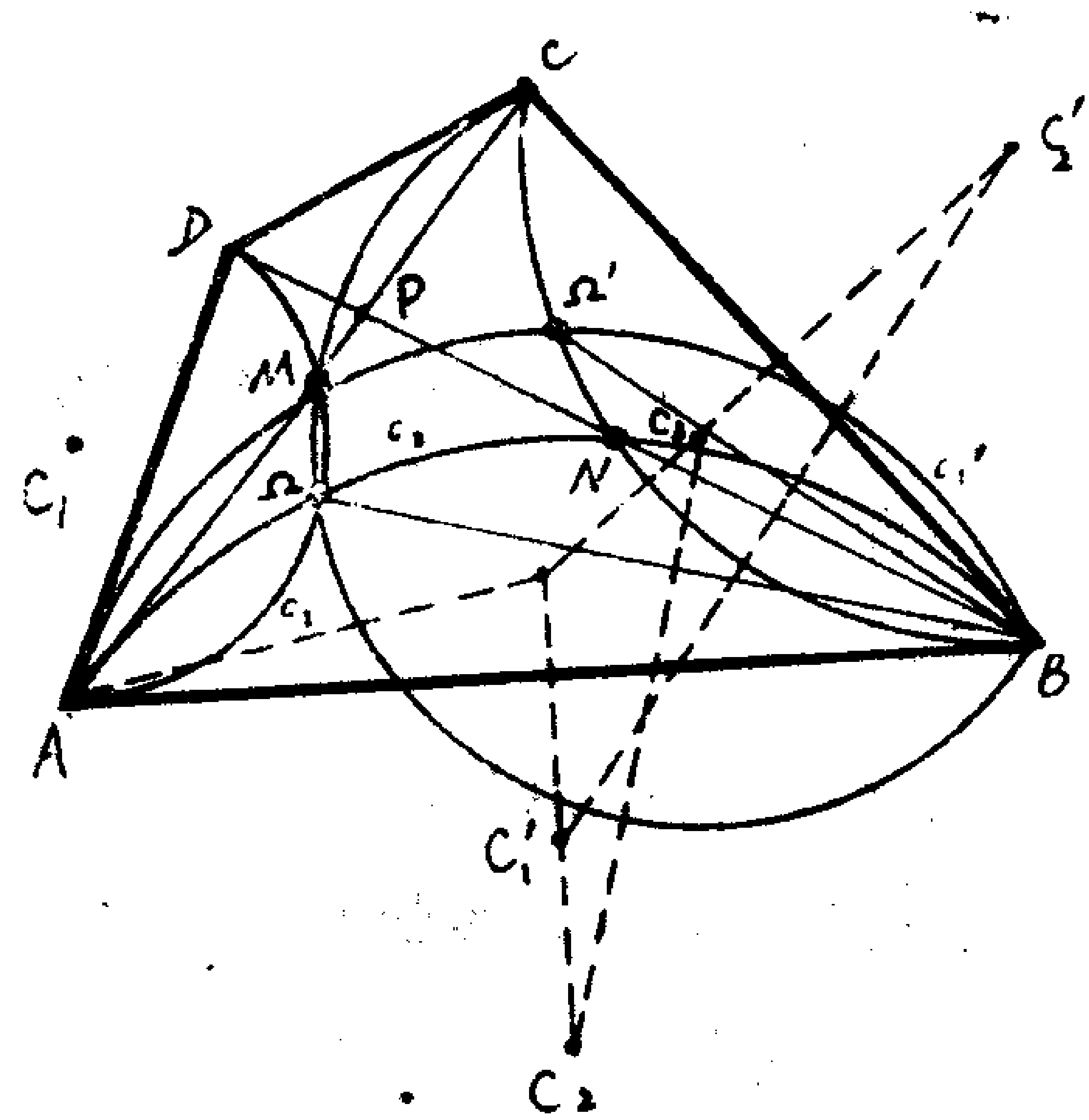
(M、N等角共轭点)

$=\angle CAB+\angle \Omega BC+\angle \Omega BA$

(BC切$\odot \Omega AB$)

$=\angle CAB+\angle CBA=\pi-\angle MCB$,

$\therefore$ M、Ω、B、C共圆.



图总—111(2)

故 $\odot MBC$过Ω，即c_3过Ω。

同理c_4过Ω，

故 c_1、c_2、c_3、c_4共点Ω。

同理c_1'、c_2'、c_3'、c_4'共点Ω'，

设 O为$ABCD$外心，

∵ $\angle AOC_1'=\angle BDA$，$\angle AC_1'O=\angle BAD$

有 $\triangle AOC_1'\backsim\triangle BDA$，

∴ $OC_1'/AD=AO/BD$。

同理$OC_2/CB=BO/CA$，

$\therefore\quad OC_1'\cdot OC_2=AO\cdot BO\cdot AD\cdot BC/BD\cdot AC$。

同理，$OC_2'\cdot OC_3=OB\cdot OA\cdot AB\cdot CD/AC\cdot BD$。

又　$AD\cdot BC=AB\cdot CD$(调和四边形定义)，

有　$OC_1'\cdot OC_2=OC_2'\cdot OC_3$，

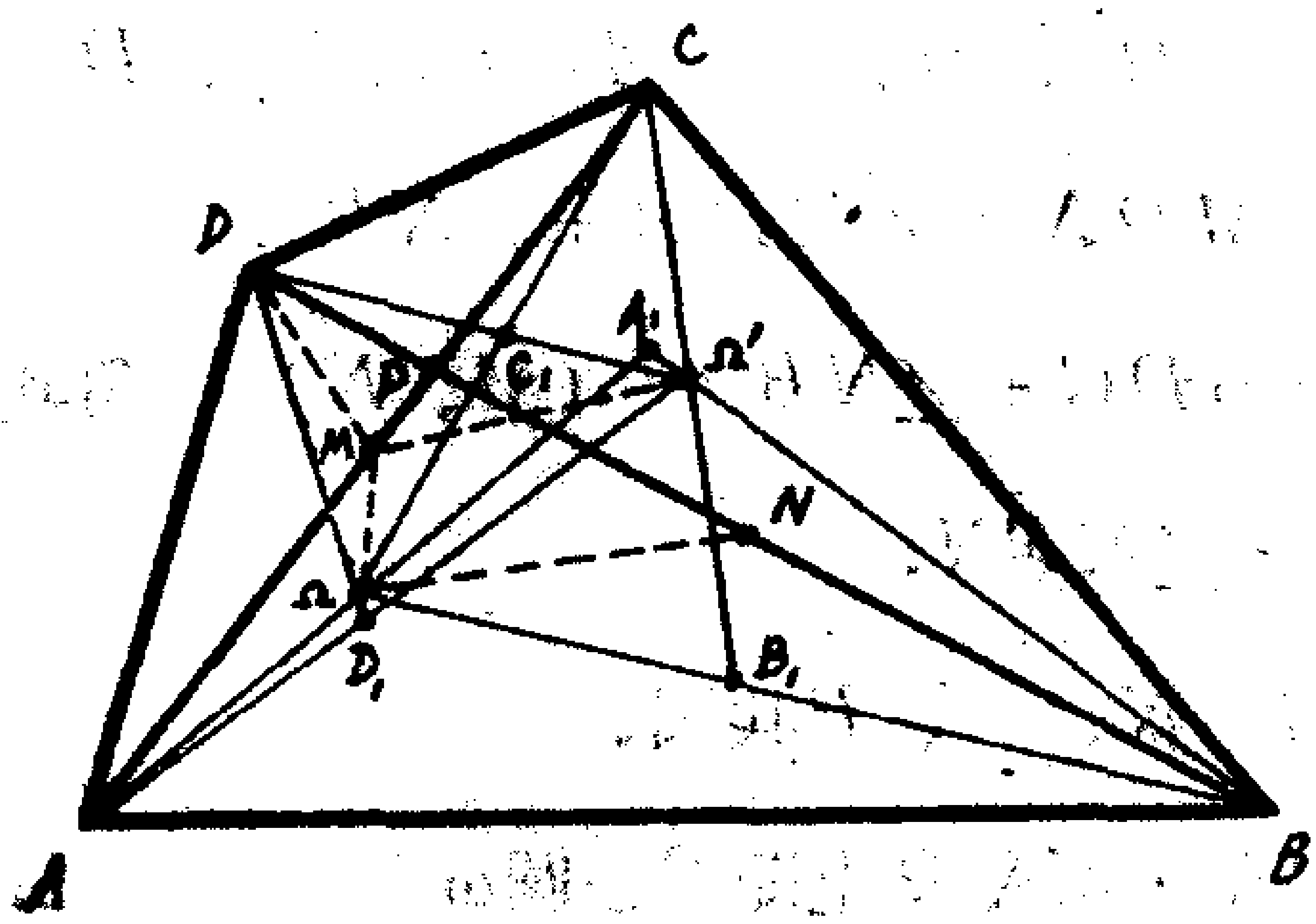
$\therefore$　C_1'、C_2、C_2'、C_3共圆。

有　$\angle C_3C_2'C_1'=\angle C_3C_2C_1'$，

$\angle CB\Omega'=\angle AB\Omega$，

$\therefore$　$B\Omega$、$B\Omega'$为$\angle B$的等角共轭线；同理，$A\Omega$、$A\Omega'$为$\angle A$的等角共轭线；$C\Omega$、$C\Omega'$为$\angle C$的等角共轭线；$D\Omega$、$D\Omega'$为$\angle D$的等角共轭线。

故Ω、Ω'为$ABCD$的等角共轭点。



图总—111(3)

(3)：$\because$　CB切圆c_2(即$\odot\Omega AB$)，

$\therefore$　$\angle\Omega BC=\angle\Omega AB$。

又　$\angle\Omega BC=\angle\Omega'BA$，

有　$\angle \Omega AB=\angle \Omega' BA$，

∴　$\triangle A_1AB$为等腰三角形。

同理可证$\triangle B_1BC$、$\triangle C_1CD$、$\triangle D_1DA$均为等腰三角形。不难知它们都相似，令基底角为α。

∴　$\angle \Omega A_1\Omega'=\pi-2\alpha$，$\angle \Omega B_1\Omega'=2\alpha$，

$\angle \Omega C_1\Omega'=\pi-2\alpha$，$\angle \Omega D_1\Omega'=2\alpha$。

又　$\angle \Omega M\Omega'=\angle \Omega AD+\angle \Omega' CD$

$=(\angle A-\alpha)+(\angle C-\alpha)$

$=\pi-2\alpha$，

$\angle \Omega N\Omega'=2\alpha$(同上得)，

∴　Ω、Ω'、M、N、A_1、B_1、C_1、D_1八点共圆ω。

∵　$\angle M\Omega N=\angle MDA+\angle NBA$

$=\angle BDC+\angle NBA$　(M、N为等角共轭点)

$=\pi-\angle MPN$，

∴　M、N、Ω、P共圆。

∴　P在$\odot MN\Omega$上即P在圆ω上。故得证。

实际上，O也在圆ω上，这样就有十点共圆了。

(4)：设$\angle \Omega AB=\alpha$，则$\angle CB\Omega=\alpha$（弦切角）

∴　$\angle AB\Omega'=\angle CB\Omega=\alpha$，

∴　$\angle \Omega X\Omega'=\pi-\alpha$（$A$、$B$、$\Omega'$、$X$共圆）。

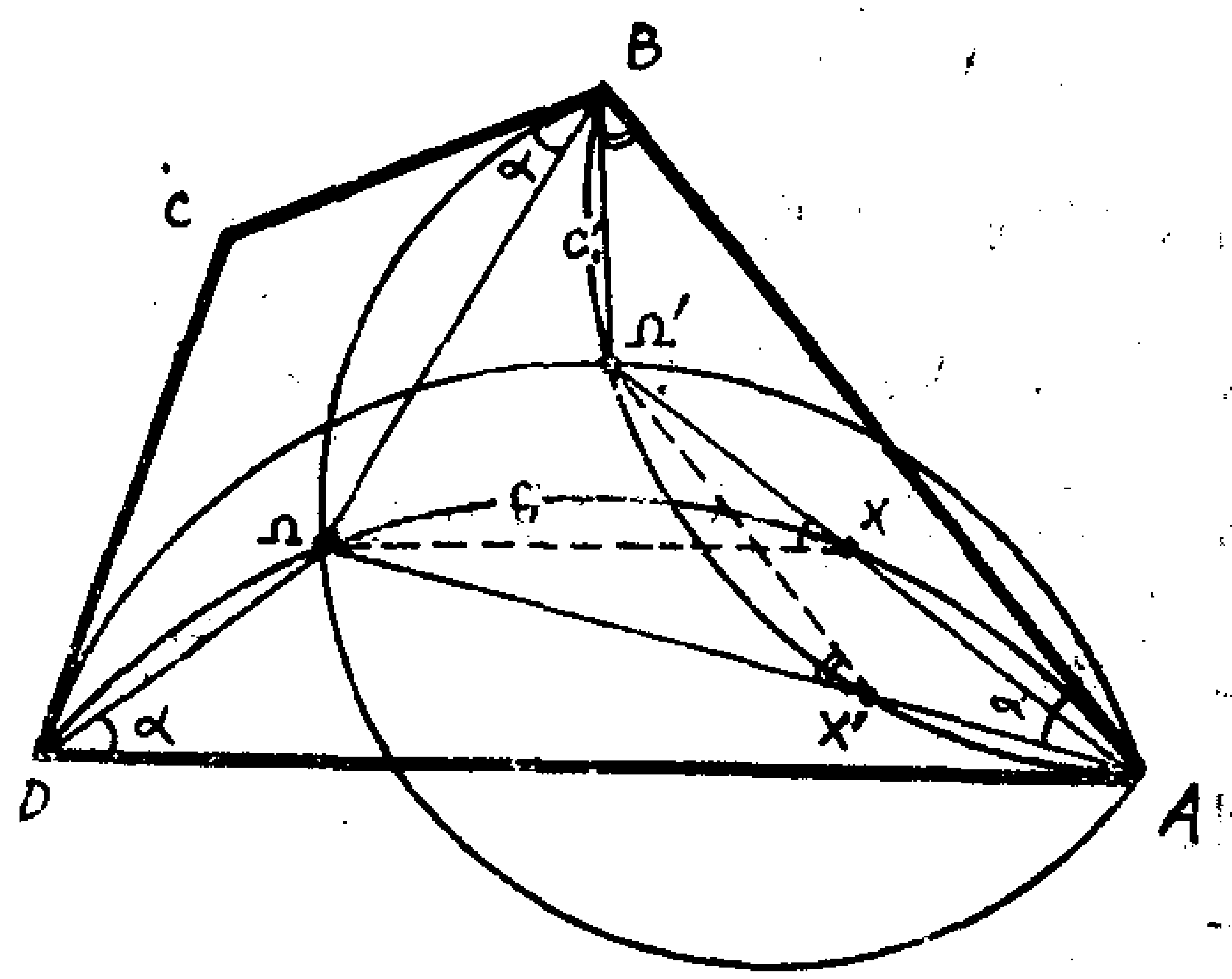
∵　$\angle \Omega X' \Omega' = \angle AD\Omega$,

而　$\angle AD\Omega = \alpha$（弦切角），

∴　$\angle \Omega X' \Omega' = \alpha$。

同理可证其它交点对 $\Omega\Omega'$ 的张角为α或$\pi-\alpha$。

故原题得证。



图总—111（4）

112。设过调和四边形的对角线交点引直线平行于每边而与两邻边相交，则八交点共圆。

证：如图设。

∵　$AX_1 = BQ \cdot AD/BD$，$AX_6 = AQ \cdot AD/AC$，

$AX_8 = DQ \cdot AB/DB$，$AX_3 = AQ \cdot AB/AC$。

∴ $AX_1 \cdot AX_6 / AX_8 \cdot AX_3 = BQ \cdot AD^2 / QD \cdot AB^2$。

上题已证AQ是$\triangle ABD$的BD边陪位中线，由习题十五第16题知$BQ/QD=AB^2/AD^2$，

有　$AX_1\cdot AX_6=AX_8\cdot AX_3$，

$\therefore$　X_1、X_6、X_8、X_3共圆。

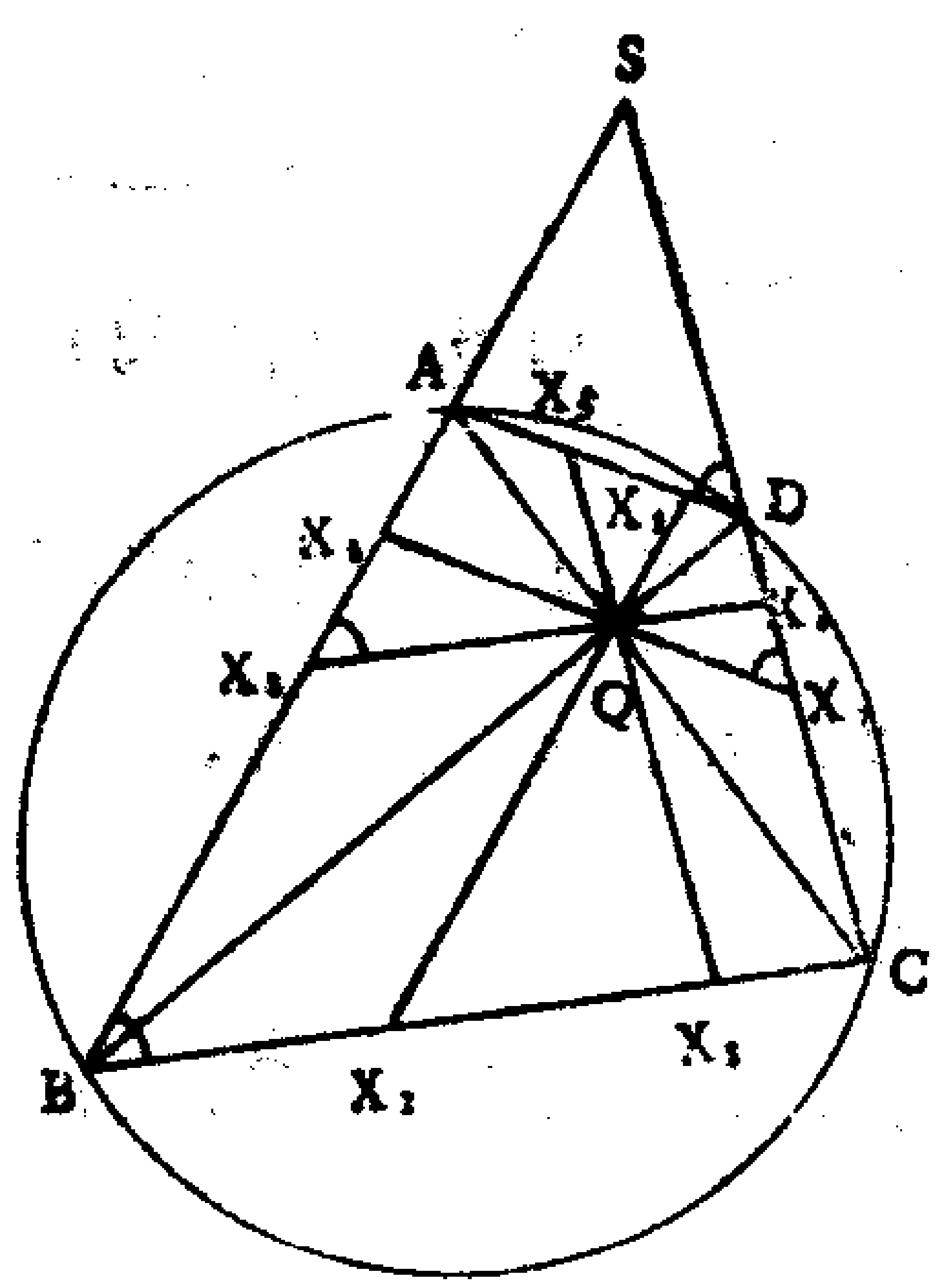
同理X_6、X_1、X_4、X_7共圆。

又　X_3、X_7、X_8、X_4共圆（$\angle AX_3Q=\angle ABC=\angle ADS=\angle SX_7Q$）。

根据§44例题40的推论（Davis定理）得：

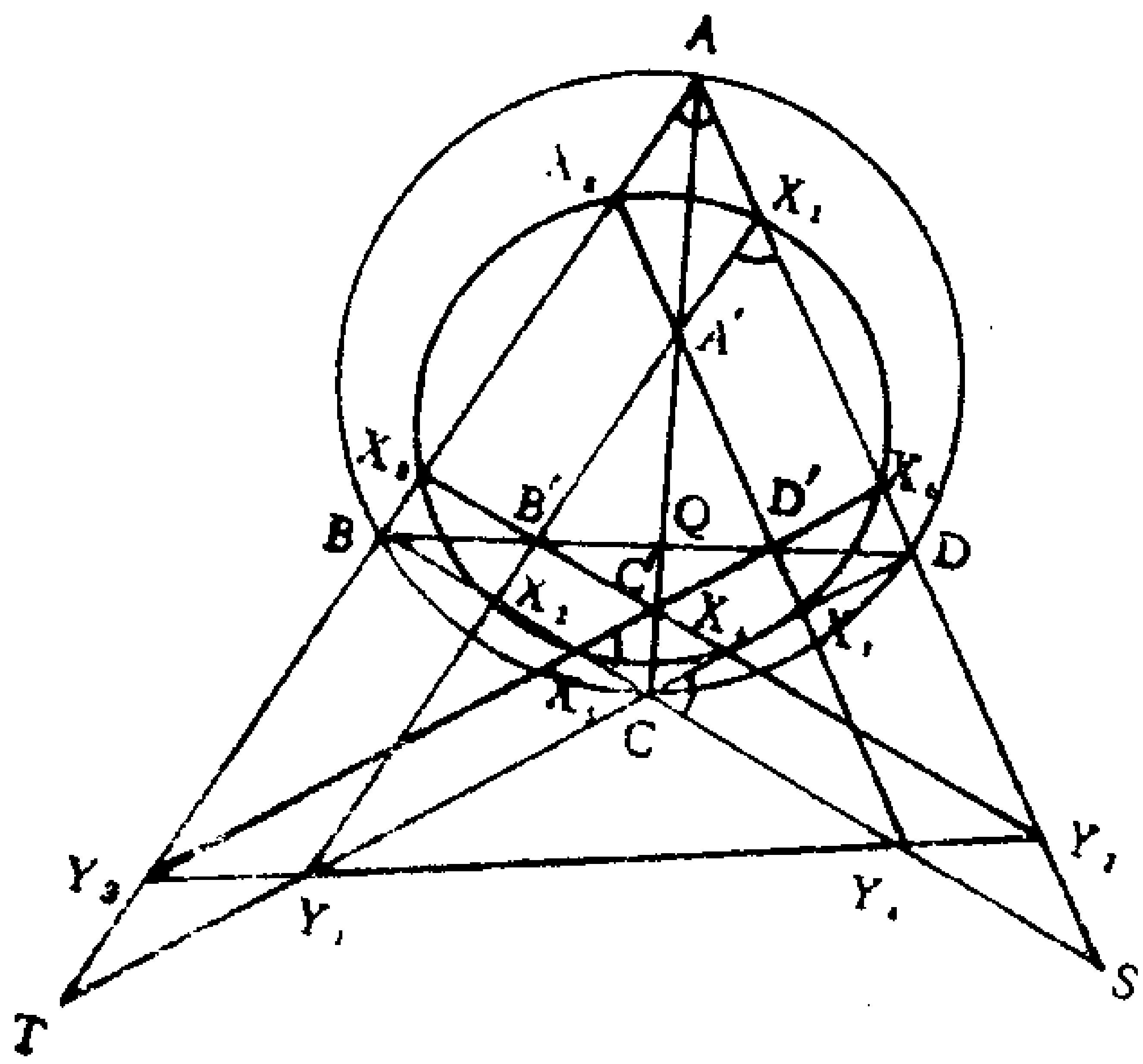
X_3、X_8、X_6、X_1、X_4、X_7六点共圆。同理X_4、X_7、X_5、X_2、X_3、X_8六点共圆。

由此可得：X_1、X_2、X_3、X_4、X_5、X_6、X_7、X_8八点共圆。



图总—112

113. 在调和四边形$ABCD$中，A'、C'是AC上的两点，B'、D'是BD上的两点。若四边形$A'B'C'D'$与$ABCD$有三双对应边平行，则第四双对应边也相互平行，而非对应边(所在直线)相交于十二点，其中有八点共圆，四点共线。



图总—113

证：如图设。

$\because\ QA' : A'A = QB' : B'B = QC' : C'C = QD' : D'D$,

$\therefore\ QA' : A'A = QD' : D'D$,

$\therefore\ D'A' \parallel DA$.

$\because\ AX_1 = BB' \cdot AD/BD, AX_6 = AC' \cdot AD/AC$,

$AX_3 = AC' \cdot AB/AC$，$AX_8 = DD' \cdot AB/DB$，

∴ $AX_1 \cdot AX_6 / AX_3 \cdot AX_8 = BB' \cdot AD^2 / DD' \cdot AB^2$。

又 $BB'/DD' = BQ/QD = AB^2/AD^2$，

∴ $AX_1 \cdot AX_6 = AX_3 \cdot AX_8$，

∴ X_1、X_6、X_3、X_8共圆。

同理，X_3、X_8、X_2、X_5共圆。

又 X_5、X_6、X_1、X_2共圆（$\angle C'X_6C = \angle DCS = \angle BAD = \angle A'X_1D$），

∴ 根据§44例题40的推论（*Davis*定理）得

X_1、X_8、X_3、X_2、X_5、X_6六点共圆。

同理，X_1、X_8、X_3、X_4、X_7、X_6六点共圆。

由此可得X_1、X_2、X_3、X_4、X_5、X_6、X_7、X_8八点共圆。

由第99题得：Y_1、Y_2、Y_3、Y_4共线。

114。在上题中，如果A'、C'是BD上的两点，B'、D'是AC上的两点，其他条件不改，那么仍有相仿的结论。

证：如图设，

∵ $QA'/QB = QB'/QA$，

∴ $QA' \cdot QA = QB' \cdot QB$。

同理$QB'\cdot QB=QC'\cdot QC=QD'\cdot QD$。

∴ $QA'\cdot QA=QD'\cdot QD$,

或$QA'/QD=QD'/QA$。因此$A'D'\parallel AD$。

∵ $AX_1=A'B\cdot AD/DB$, $AX_5=AD'\cdot AD/AC$,

$AX_3=AB'\cdot AB/AC$, $AX_8=DA'\cdot AB/DB$,

∴ $AX_1\cdot AX_5/AX_3\cdot AX_8$

$=A'B\cdot AD'\cdot AD^2\cdot/AB'DA'\cdot AB^2$。

∵ $A'B/AB'=QB/QA$, $AD'/DA'=QA/QD$,

∴$AX_1\cdot AX_5/AX_3\cdot AX_8=(QB/QD)\cdot(AD^2/AB^2)$。

∵ $QB/QD=AB^2/AD^2$,

∴ $AX_1\cdot AX_5=AX_3\cdot AX_8$,

故 X_1、X_5、X_3、X_8共圆。

同理X_1、X_5、X_7、X_4共圆。

又 X_4、X_3、X_8、X_7共圆（$\angle A'X_7S=\angle ADS=\angle SBC=\angle SX_8B'$）

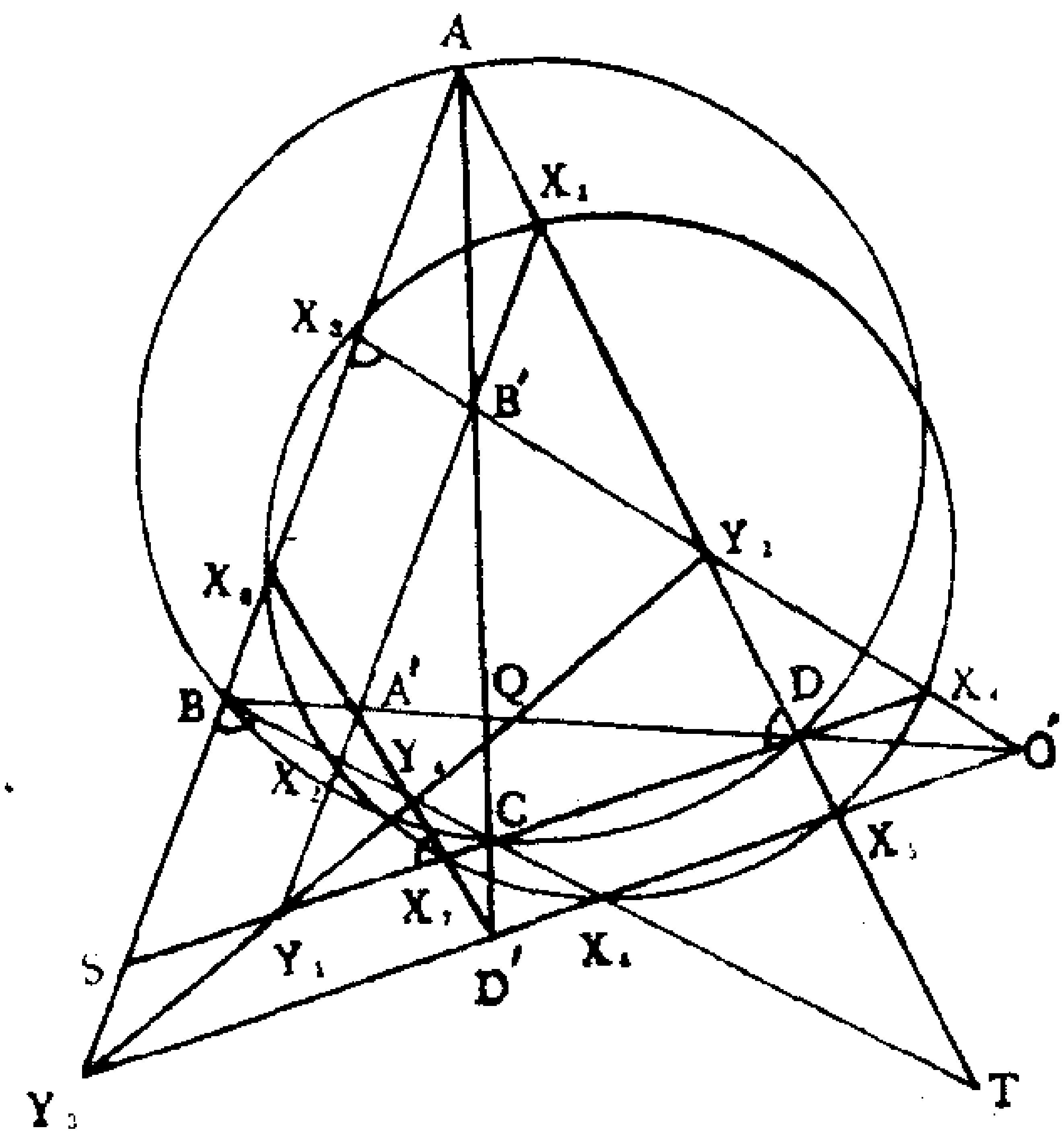
∴ 根据§44例题40推论（$DaNis$定理）得：

X_1、X_3、X_4、X_5、X_7、X_8六点共圆。

同理，X_3、X_8、X_2、X_6、X_5、X_1六点共圆。

由此可得：X_1、X_2、X_3、X_4、X_5、X_6、X_7、X_8八点共圆。

由第99题知Y_1、Y_2、Y_3、Y_4共线。

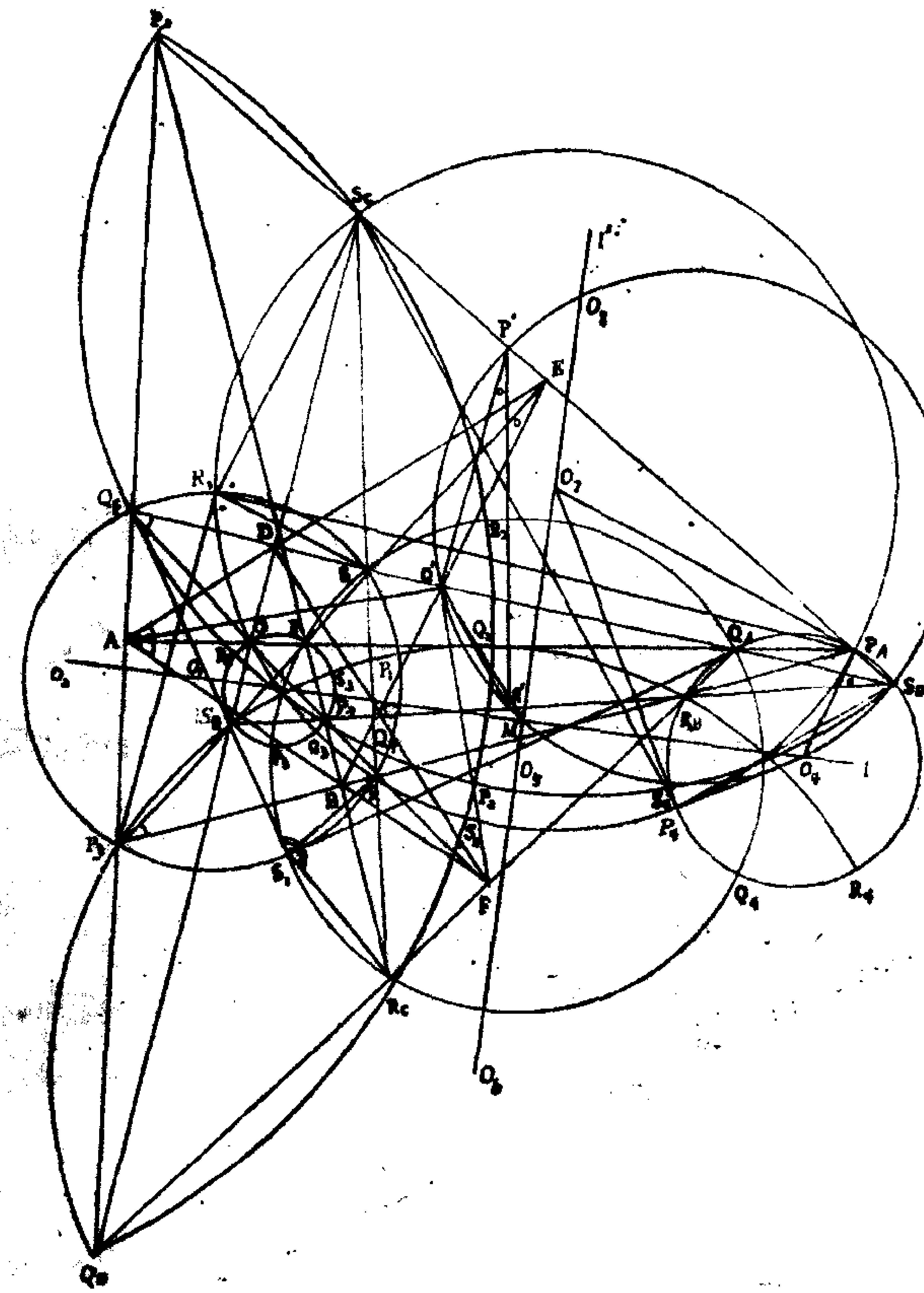


图总—114

115。定全四边形各边共交成四个三角形，它们的内心，旁心共十六点。在每个三角形中，以内心、旁心两两的连结线为直径作圆；如此一共可得二十四个圆。这二十四个圆，除三三会于各三角形的内心、旁心外，又三三会于其它十六点。这十六点连同各三角形的内心、旁心计三十二点，分布在八个圆上，每圆上有八点。这八点组成两组互相正交的共轴圆，每组含四圆，它们的等幂轴同过完全四边形的密克点。

证明(1)：令P、P_A、P_B、P_E，Q、Q_A、Q_D、Q_F，R、R_B、R_C、R_F，S、S_C、S_D、S_E分别为$\triangle ABE$、

$\triangle ADF$、$\triangle BCF$、$\triangle CDE$的内心与旁心，有完全四边形DQ_FRCFS、BP_ESCER、P_AQDEAS_C、Q_APBFAR_C的密克点P_1、Q_1、R_1、S_1即以直径为Q_DQ_F、RR_B、SS_E，



图总—115

P_BP_E、RR_F、SS_D，P_AP_E、QQ_F、SS_C，PP_E、Q_AQ_F、RR_C的三圆的交点；完全四边形$Q_FR_FCDS_DF$、$P_ES_ECBR_BE$、$P_BADS_CQ_DE$、$Q_DABR_CP_BF$的密克点P_2、Q_2、R_2、S_2即以直径为Q_DQ_F、R_CR_F、S_CS_D，P_BP_E、R_BR_C、S_CS_E，PP_B、Q_AQ_D、SS_C，P_AP_B、QQ_D，RR_C的三圆的交点；完全四边形Q_ASCFDR_C、P_ARCEBS_C、$P_BQ_FDEAS_D$、$Q_DP_EBFAR_B$的密克点P_3、Q_3、R_3、S_3即以直径为QQ_A、R_CR_F、SS_E、PP_A、RR_F、S_CS_E，PP_B、QQ_F、S_DS_E，PP_E、QQ_D、R_BR_F的三圆的交点；完全四边形$QRCDFS_C$、$PSCBER_C$、$AP_ES_EDQ_DE$、$AQ_FR_FBP_BF$的密克点P_4、Q_4、R_4、S_4即以直径为QQ_A、RR_B、S_CS_D，PP_A、R_BR_C、SS_D，P_AP_E、Q_AQ_D、S_DS_E，P_AP_B、Q_AQ_F、R_BR_F的三圆的交点。

（2）：∵ A、P、B、P_E与A、Q、D、Q_F四点共圆。有 $\angle RP_ES=\angle BAP=\angle QAD=\angle BQ_FS$，

∴ R、S、Q_F、P_E四点共圆，令其圆心为O_1。

∵ P_1、Q_1、R_1、S_1为有关完全四边形的密克点，于是它们分别在$\odot Q_FRS$、$\odot P_ERS$、$\odot P_AQS_C$，$\odot PQ_AR_C$上，∴ P_1、Q_1在$\odot O_1$上；

∵ $\angle P_AR_1P_E$、$\angle SR_1S_C$、$\angle Q_AS_1Q_F$、$\angle RS_1R_C$均为直角，有$\angle P_AR_1S_C=\angle SR_1P_E$、$\angle Q_AS_1R_C=\angle RS_1Q_F$，

又 $\angle P_AR_1S_C=\angle P_AQS_C=\angle SQ_FP_E$，

$\angle Q_AS_1R_C=\angle Q_APR_C=\angle RP_EQ_F$。故有 R_1、S_1 在 $\odot O_1$上，即P_E、Q_F、R、S、P_1、Q_1、R_1、S_1八点共圆。

同理可得：$\odot O_2$：$P_BQ_DR_CS_CP_2Q_2R_2S_2$；

$\odot O_3$：$PQR_FS_EP_3Q_3R_3S_3$；

$\odot O_4$：$P_AQ_AR_BS_DP_4Q_4R_4S_4$；

$\odot O_5$：$PQ_AR_CSP_3Q_4R_2S_1$；

$\odot O_6$：$P_EQ_DR_BS_EP_1Q_2R_4S_3$；

$\odot O_7$：$P_AQRS_CP_4Q_3R_1S_2$；

$\odot O_8$：$P_BQ_FR_FS_DP_2Q_1R_3S_4$。

(3) $\because \angle P_4S_DP_A+\angle P_4S_CP_A=90°$，

$\therefore$ $\angle P_4O_4P_A+\angle P_4O_7P_A=180°$。

故 P_4、P_A、O_4、O_7四点共圆，有

$\angle O_4P_AO_7=\angle O_4P_4O_7=90°$，$\therefore$ $\odot O_4$与$\odot O_7$正交。

同理，与$\odot O_5$、$\odot O_6$、$\odot O_8$均正交。

故有 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$与$\odot O_5$、$\odot O_6$、$\odot O_7$、$\odot O_8$均正交。

(4) $\because$ $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$与$\odot O_5$、$\odot O_6$、$\odot O_7$、$\odot O_8$是互相正交的两组共轴圆，故有$O_4P_A\perp O_7P_A$，$O_4Q_A\perp O_5Q_A$，$O_4R_B\perp O_6R_B$，$O_4S_D\perp O_8S_D$；且

$O_4P_A=O_4Q_A=O_4R_B=O_4S_D$,

故　O_4为$\odot O_5$、$\odot O_6$、$\odot O_7$、$\odot O_8$的等幂点；

同理，O_1、O_2、O_3亦为$\odot O_5$、$\odot O_6$、$\odot O_7$、$\odot O_8$的等幂点。故O_1、O_2、O_3、O_4所在直线l为$\odot O_5$、$\odot O_6$、$\odot O_7$、$\odot O_8$的等幂轴；

同理，O_5、O_6、O_7、O_8所在直线l'亦为$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$的等幂轴。

（5）：令M为完全四边形$ABCDEF$的密克点，设P'、Q'、R'为P_AP_B、Q_AQ_F、R_BR_F的中点，由习题二十一第17题以及$\odot O_4$与$\odot O_8$的正交关系，有P'、Q'、R'、S_D、S_4、O_4、O_8七点共圆，且以O_4O_8为直径。

故　$\angle Q'P'R'=\angle Q'S_DR'=\angle SEC$。

又由复习题一第19、18题，有A、D、F、Q'、M与B、C、F、R'、M均五点共圆，且$Q'A=Q'F=Q'Q_A$，$R'B=R'F=R'R_B$。

有　$\angle Q'MR'=\angle FMQ'-\angle FMR'=(180°-\angle FAQ')-(180°-\angle FBR')=\angle FBR'-\angle FAQ'=(90°-\angle BR'F/2)-(90°-\angle AQ'F/2=(\angle AQ'F-\angle BR'F)/2=(\angle ADF-\angle BCF)/2=\angle CED/2=\angle SEC$。

∴　$\angle Q'P'R'=\angle Q'MR'$，故$P'$、$Q'$、$R'$、$M$共

圆。即M在以O_4O_8为直径的圆上。

$\therefore \quad \angle O_4MO_8=90°$，

同理，$\angle O_1MO_8=90°$。

故 O_4、M、O_1共线，即M在直线l上，

同理，M在直线l'上。

116. 设P、Q是四边形$ABCD$的等角共轭点。在$\triangle PAB$、$\triangle QBC$、$\triangle PCD$、$\triangle QDA$中，以每个三角形的内心、旁心两两的连结线各为直径作圆，如此一共得24个圆。这24个圆除三三会于各三角形的内心、旁心外，又三三会于其他十六点。这十六点连同各三角形的内心、旁心合计32点，分布在八个圆上，每圆上有八点。

证(1)：令$\triangle PAB$、$\triangle QBC$、$\triangle PCD$、$\triangle QDA$的内心、旁心分别为E、E_P、E_A、E_B；F、F_Q、F_B、F_C；G、G_P、G_C、G_D；H、H_Q、H_A、H_D。且$\odot(F_QF_C)$与$\odot(H_QH_D)$相交于E_4、以下证明E_4在$\odot(G_CG_D)$上。

$\because \quad \angle QE_4C+\angle QE_4D=\angle QF_CC+\angle QH_DD$

$=\angle QBF+\angle QAH=(\angle QBC+\angle QAD)/2$

又 $\angle CG_DD=\angle CPG=\angle CPD/2$

$=[180°-(\angle PCD+\angle PDC)]/2$

$=[(180^\circ-\angle QCB)-\angle QDA]/2$

$=[(\angle QBC+\angle BQC)-(180^\circ-\angle QAD-\angle AQD)]/2$

$=[(\angle QBC+\angle QAD)+(\angle BQC+\angle AQD-180^\circ)]/2$

由例题46，Q在四边形$ABCD$上的射影共圆，可得 $\angle BQC+\angle AQD=180^\circ$，

$\therefore\quad \angle CE_4D=\angle CG_DD$。

即三圆$\odot(F_QF_C)$、$\odot(G_CG_D)$、$\odot(H_QH_D)$共点于E_4，

同理，$\odot(E_PE_A)$、$\odot(G_PG_D)$、$\odot(H_AH_D)$共点于F_4，

$\odot(EE_P)$、$\odot(F_QF_B)$、$\odot(HH_D)$共点于G_4，

$\odot(FF_Q)$、$\odot(E_PE_B)$、$\odot(GG_D)$共点于H_4；

$E_1(FF_B、G_CG_D、HH_A)$，$F_1(EE_B、H_AH_E、GG_C)$，

$G_1(EE_P、FF_C、H_QH_A)$，$H_1(EE_A、FF_Q、G_PG_C)$，

$E_2(F_QF_C、GG_P、HH_A)$，$F_2(E_PE_A、GG_C、HH_Q)$，

$G_2(E_AE_B、FF_C、HH_D)$，$H_2(EE_A、F_BF_C、GG_D)$，

$E_3(FF_B、GG_P、H_QH_D)$，$F_3(EE_B、HH_Q、G_PG_D)$，

$G_3(E_AE_B、F_QF_B、H_QH_A)$，$H_3(E_PE_B、F_BF_C、G_PG_C)$。

（2）：证八点E_P、F_Q、G_D、H_D、E_4、F_4、G_4、H_4共圆。

$\because\quad \angle F_QE_4G_D=\angle F_QE_4C-\angle G_DE_4C=\angle F_QQC-\angle G_DDC=\angle FQC-\angle GDC$，

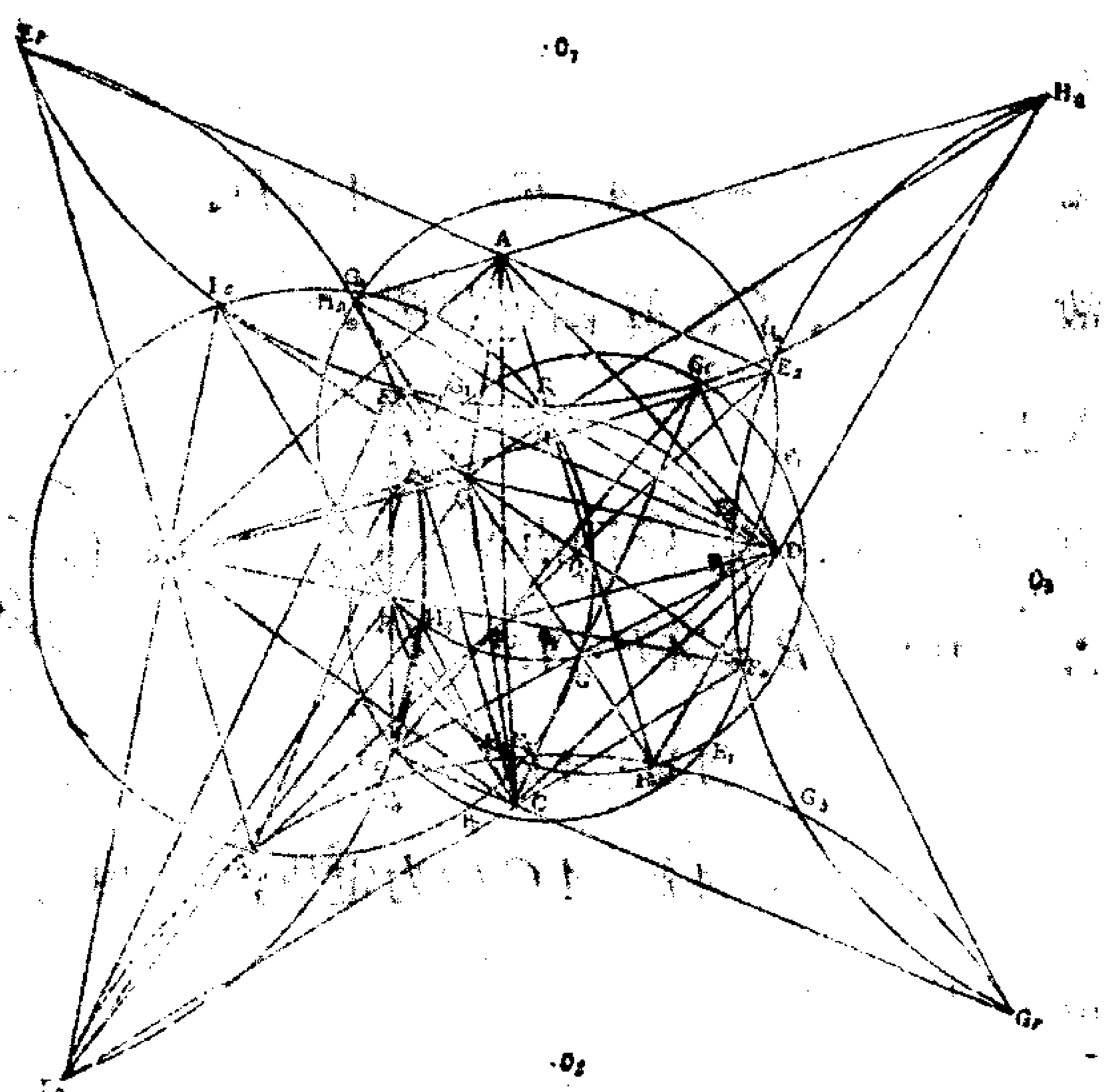
$$\angle F_Q H_4 G_D = \angle F_Q H_4 C - \angle G_D H_4 C = \angle F_Q F_G C - \angle G_D G C = (\angle FQC + \angle QCF) - (\angle GDC + \angle GCD),$$

而 $\angle QCF = \angle PCG = \angle GCD$,

$\therefore \quad \angle F_Q E_4 G_D = \angle F_Q H_4 G_D$。

故有F_Q、G_D、E_4、H_4四点共圆。

同理可得F_Q、G_D、E_4、H_4、F_4、G_4、E_P、H_D八点共圆。



图总—116

同理，E、F、G_C、H_A、E_1、F_1、G_1、H_1；E_A、F_B、

G、H、E_2、F_2、G_2、H_2；E_B、F_B、G_P、H_Q、E_3、F_3、G_3、H_3；E、F_B、G_D、H、E_1、F_3、G_4、H_2；E_B、F、G、H_D、E_3、F_1、G_2、H_4；E_P、F_C、G_C、H_Q、E_4、F_2、G_1、H_3；E_A、F_Q、G_P、H_A、E_2、F_4、G_3、H_1均八点共圆。

117、设A、B是两定点．过B引割线交已知圆⊙O于C、D；连AC、AD交⊙O于E、F.求△AEF的外心的轨迹。

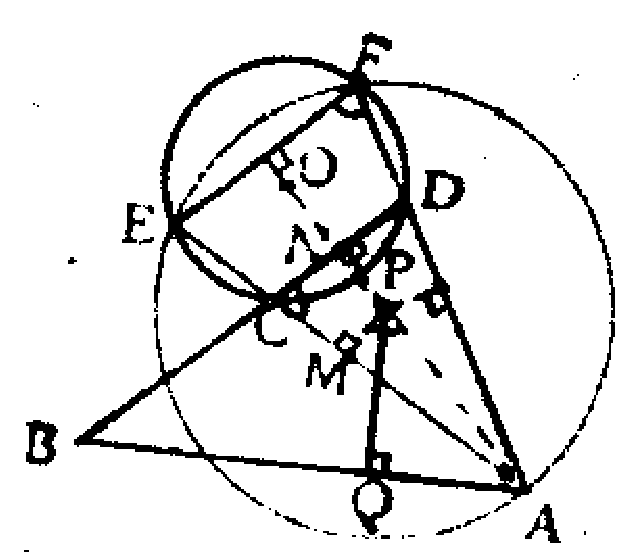
探求：设P是△AEF的外心，作AP交CD于N、$PQ\perp AB$于Q。

有 $\angle APM=\angle AFE=\angle ACD$。

故 P、N、C、M四点共圆。

得$AN\perp CD$。

有 P、N、B、Q四点共圆。



$$\therefore\quad AQ\cdot AB=AP\cdot AN$$
$$=AM\cdot AC$$
$$=AE\cdot AC/2\text{为定值，}$$

图总—117

故 Q为定点。

有$PB^2-PA^2=QB^2-QA^2$为定值。

由例题65得，P点的轨迹为由PQ所确定的直线。

（证明略）。

118. 设P是已知圆$\odot O$内的定点，AB是过P点的弦。今过P任作一弦CD，求$\odot PAC$与$\odot PBD$的第二交点的轨迹。

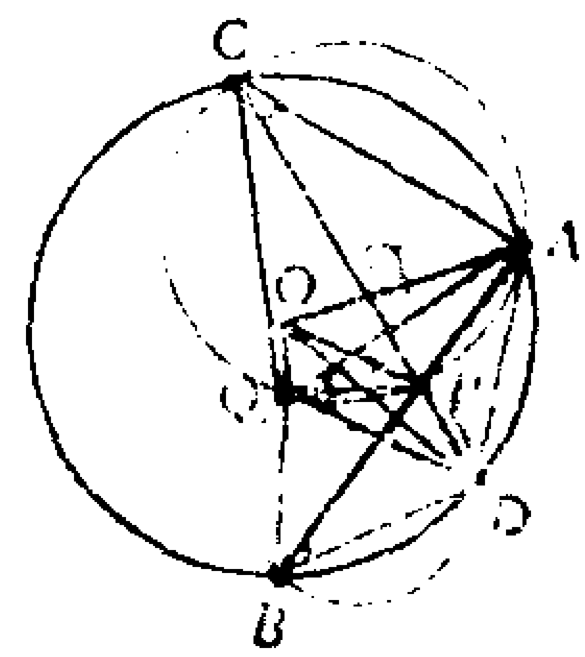
探求：

$\because \quad \angle AOD = 2\angle ACD$

$= \angle ACD + \angle ABD$

$= \angle AQP + \angle PQD$

$= AQD$。



图总—118

故A、O、Q、D四点共圆，

又$\angle OQP = \angle OQD - \angle PQD$

$= 180° - \angle OAD - \angle AOD/2$

$= 90°$。

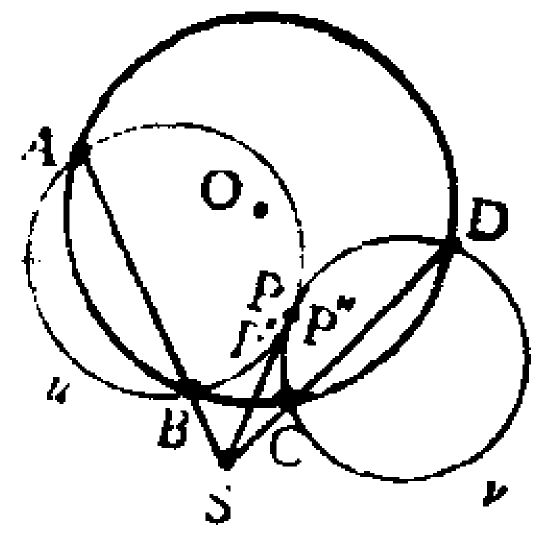
由于O、P均是定点，故Q点的轨迹可能是以OP为直径的圆。

（证明略）。

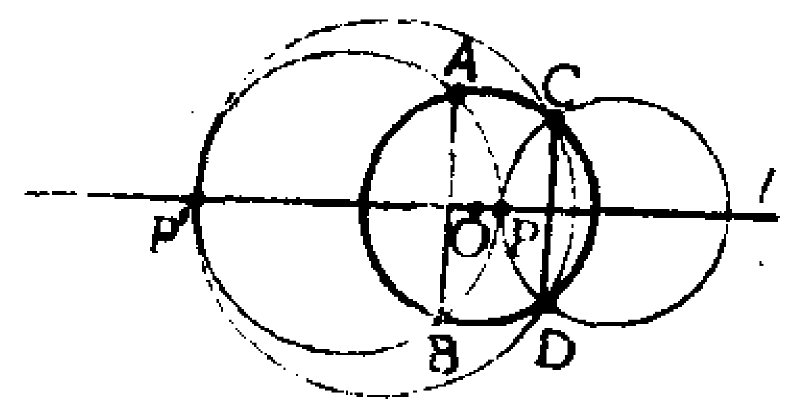
119. 设A、B、C、D是共圆的四定点，u是通过A、B的任意圆，v是通过C、D且与u相切的圆。求u与v的切点的轨迹。

探求： 设AB、CD相交于S。

又 u与v相切于P。若SP交u、v于P'、P''。



(1)



(2)

图总—119

∵ $SP \cdot SP' = SA \cdot SB = SC \cdot SD = SP \cdot SP''$

∴ $SP' = SP''$。

故 P'、P''与P重合。

得 $SP^2 = SA \cdot SB$ 为定值。

故 P 点的轨迹可能是以 S 为圆心$\sqrt{SA \cdot SB}$为半径的圆。

（证明略）。

当$AB \parallel CD$时，则$ABCD$为等腰梯形．过AB、CD的圆的圆心在梯形的对称轴l上，且l过定圆的圆心O，

故 P点的轨迹为直线l。

（证明略）。

120。过两定圆的一交点P引正交的两直线分别交两圆于X、Y，求XY的中点的轨迹。

探求：$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于P、Q。当PY在PQ时，M

与O_1重合；当PX在PQ时，M与O_2重合。即O_1、O_2为轨迹上的特殊点。

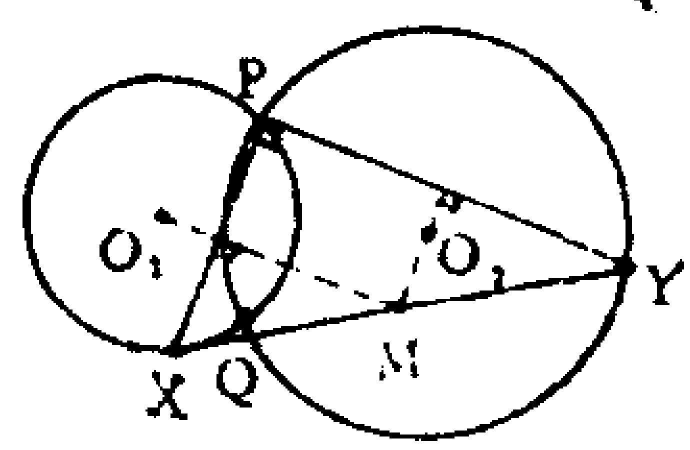
在任意场合下，

∵ $O_1M\perp PX$，$O_2M\perp PY$，

∴ $\angle O_1MO_2=90°$。

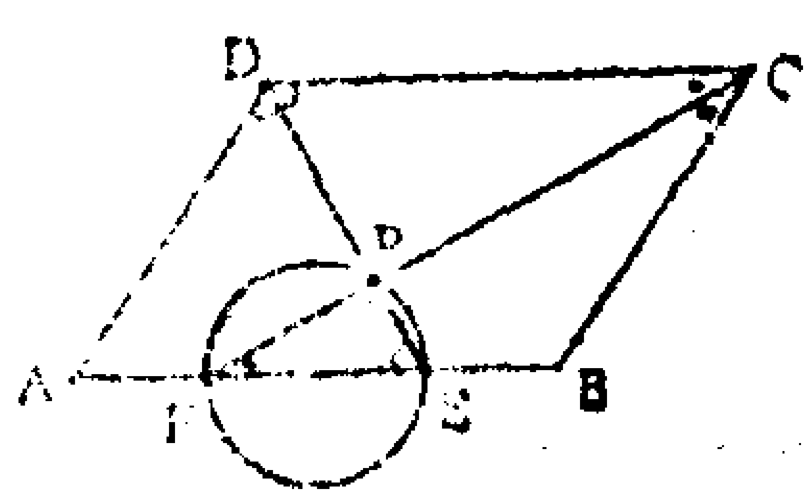
故 M的轨迹可能是以O_1O_2为直径的圆。

（证明略）。



图总—120

121. 在▱$ABCD$中，设AB边固定，AD边等于定长，求$\angle C$与$\angle D$的平分线之交点的轨迹。



图总—121

探求：

∵$\angle CDE=\angle AED=\angle ADE$，

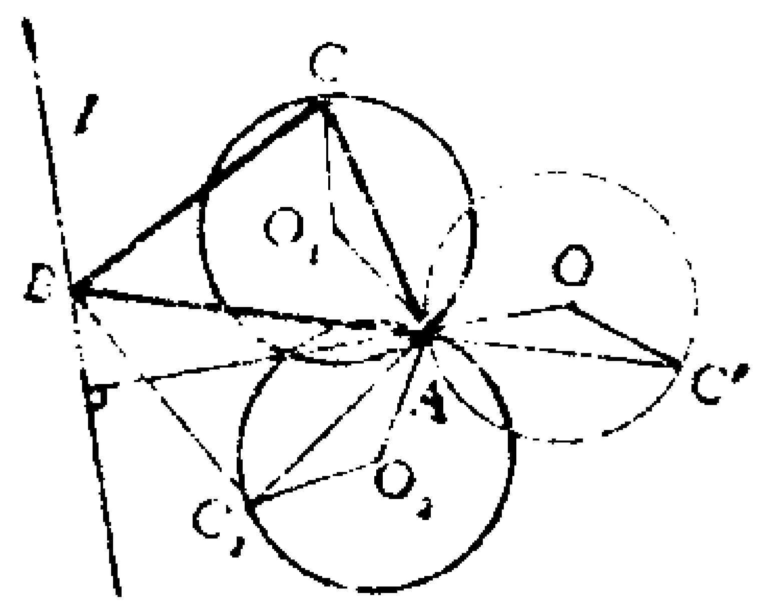
$\angle DCF=\angle BFC=\angle BCF$。

∴$AE=AD$，$BF=BC$。

故E、F为定点，且$\angle EPF=90°$。

$\therefore P$点的轨迹可能是以EF为直径的圆（证明略）。

122。在面积一定的$\triangle ABC$中，设A点固定且$\angle BAC$等于已知角，B点在一条定直线上移动，求C点的轨迹。



图总—122

探求：设三角形的面积为$\triangle$，$\angle BAC=\alpha$，则

$\triangle=AB\cdot AC(\sin\alpha)/2$,

$\therefore AB\cdot AC=2\triangle/\sin\alpha$。

以A为反演中心，$2\triangle/\sin\alpha$为反演幂对直线l施行反演变换。由定理178，其反象为通过A点的$\odot O(r)$。

取l上任一点B，设BA交$\odot O$于C'，则

$AB\cdot AC'=2\triangle/\sin\alpha$。

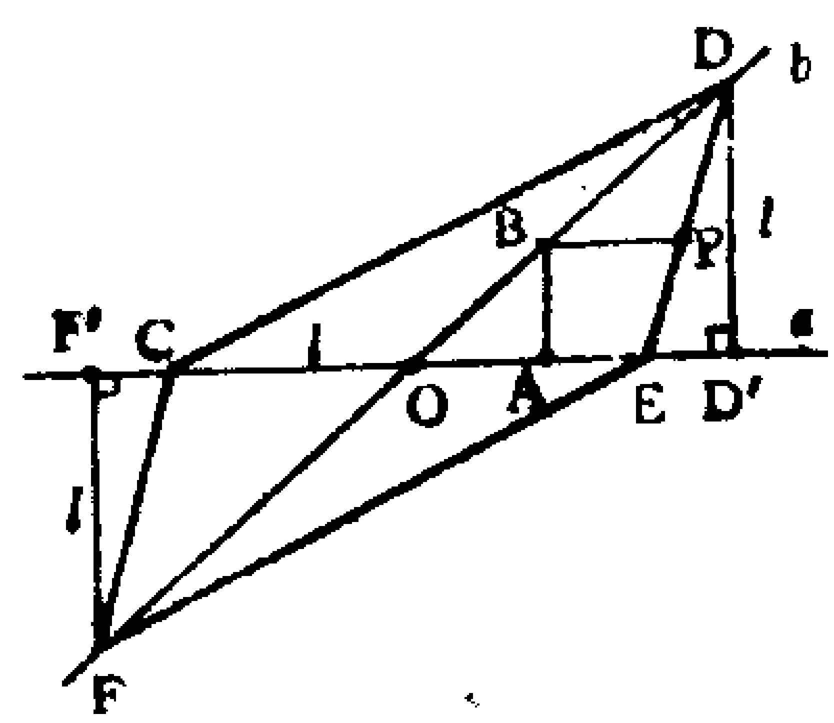
以A为旋转中心，$\pm(\pi-\alpha)$为旋转角，将$\odot O$旋转至$\odot O_1$、$\odot O_2$，则AC'旋转至AC、AC_2且$\angle BAC$、$\angle BAC_2$均为角α。

故有$\triangle ABC$的面积$=2\triangle(\sin\alpha)/2\sin\alpha=\triangle$。

所以$\odot O_1(r)$、$\odot O_2(r)$均可能是C点的轨迹。

（证明略）。

123. 设a、b是两条已知直线，B是b上的动点。引$BA\perp a$于A，$BP\parallel a$，且使$AB+BP$等于定长，求P点的轨迹。



图总—123

探求：

设$AB+BP=l$，a、b的交点为O，当B与O点重合时，取a上$OC=OE=l$，则C、E为轨迹上特殊点，取b上两点D、F，使$DD'=FF'=l$，则D、F亦为轨迹上的特殊点。

取b上任意点B，设$BP\parallel a$交DE于P。

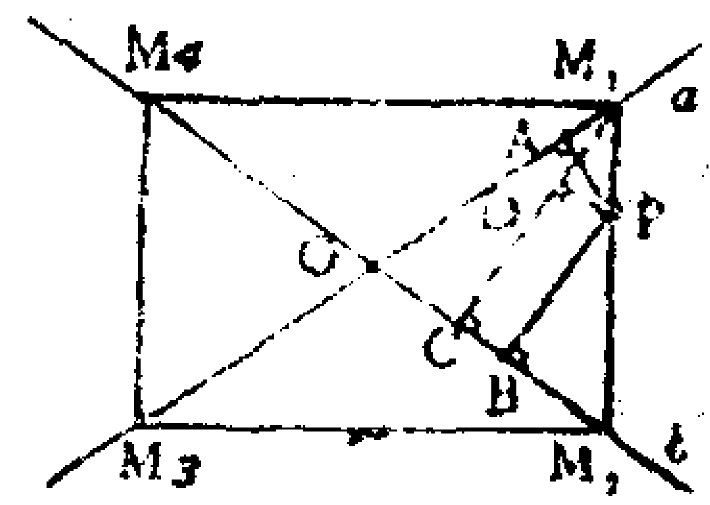
$$\because BA+BP=DD'\cdot OB/OD+OE\cdot BD/OD$$

$$=l\cdot(OB+BD)/OD=l.$$

故P点的轨迹可能是▱$CDEF$（证明略）。

124. 设两已知直线 a、b 交于O，动点P在它们上面的射影为A、B，若$OA+OB$等于定长，求P点的轨迹。

探求：设$OA+OB=l$，取 a 上一点 M_1，其在 b 上的射影为 C，且$OM_1+OC=l$，即M_1是轨迹上的特殊点。在 a、b 上再取M_3、M_2、M_4，使$OM_1=OM_2=OM_3=OM_4$，



图总—124

则M_1、M_2、M_3、M_4均为轨迹上的特殊点。

取M_1M_2上任一点P，P点在 a、b 上的射影为A、B。令P在M_1C上的射影为D。

则 $\triangle PAM_1 \cong \triangle PDM_1$，

$\therefore$ $OA+OB=OA+OC+OB=OA+OC+DP$

$=OA+OC+AM_1=OM_1+OC=l$。

得P在M_1M_2上，故P点的轨迹可能是矩形 $M_1M_2M_3M_4$。（证明略）。

125. 求对定等腰三角形有相等视角的点的轨迹。

探求：令定等腰三角形$\triangle ABC$的外接圆为$\odot O$，对两腰AB、AC 有相等视角的点 P的轨迹有

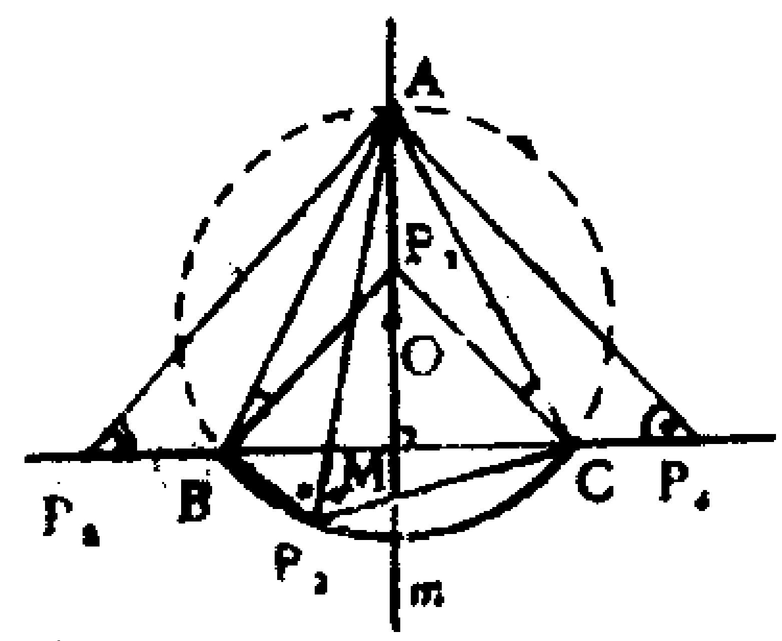
1. BC的中垂线m；

2. $\overset{\frown}{BP_2C}$弧；

3. 射线BP_3；

4. 射线CP_4（B、C两点为极限点）。

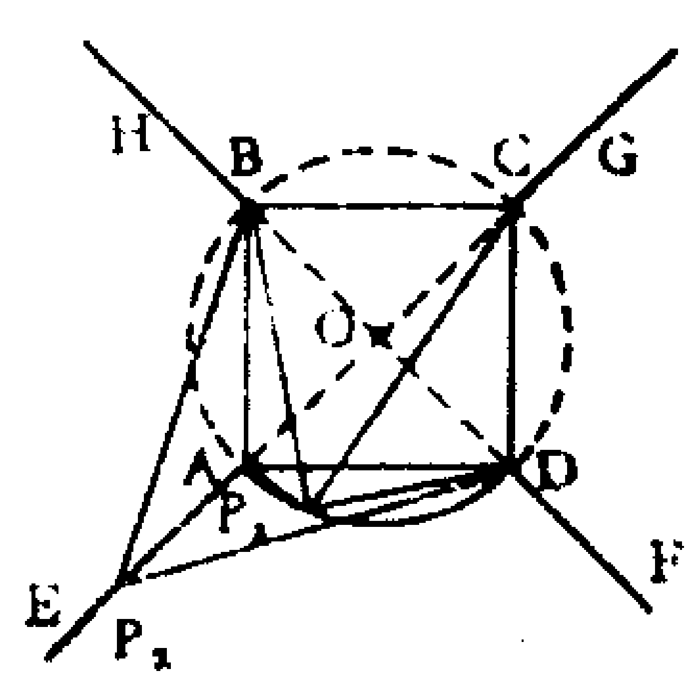
（证明略）。



图总—125

126. 求对定正方形中指定的三边有相等视角的点的轨迹。

探求：设指定三边为AB、BC、CD，并作正方形的外接圆$\odot O$，则有相等视角的点P的轨迹为点O；弧$\overset{\frown}{AP_1D}$及射线AE、BF、CG、DH。A、B、C、D为极限点。



图总—126

（证明略）。

127. 设定圆的弦AB对已知点P张开直角，求AB的极点的轨迹。

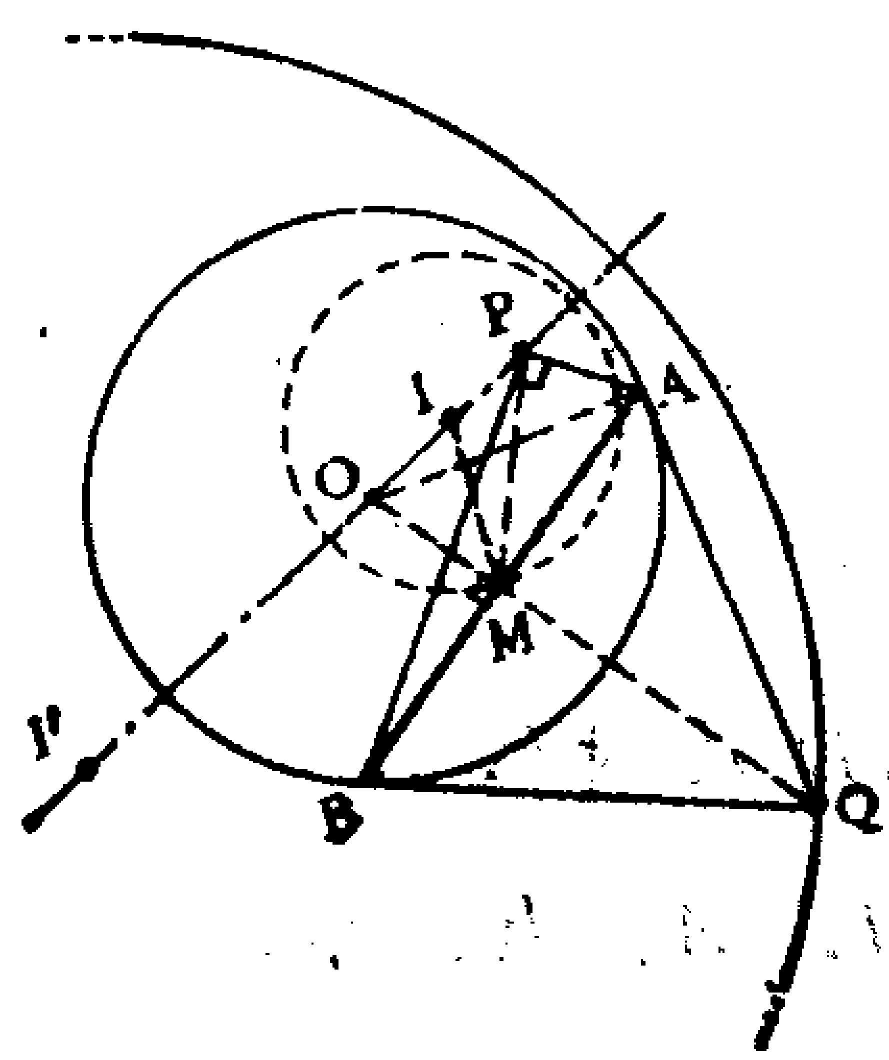
探求：设AB为是圆$\odot O(r)$的弦。过A、B作$\odot O$的切线其交点为Q，则Q点为AB的极点。

连OQ交AB于中点M，则$OM \cdot OQ = r^2$。

取OP的中点I，则I为定点。MI为$\triangle MPO$的中线，由定理 131 得：

$$IM^2 = (MO^2 + MP^2)/2 - OP^2/4$$
$$= (MO^2 + MA^2)/2 - OP^2/4$$
$$= r^2/2 - OP^2/4$$

得IM^2为定值，则M点的轨迹是以I为圆心，$\sqrt{2r^2 - OP^2}/2$为半径的圆$\odot I$。



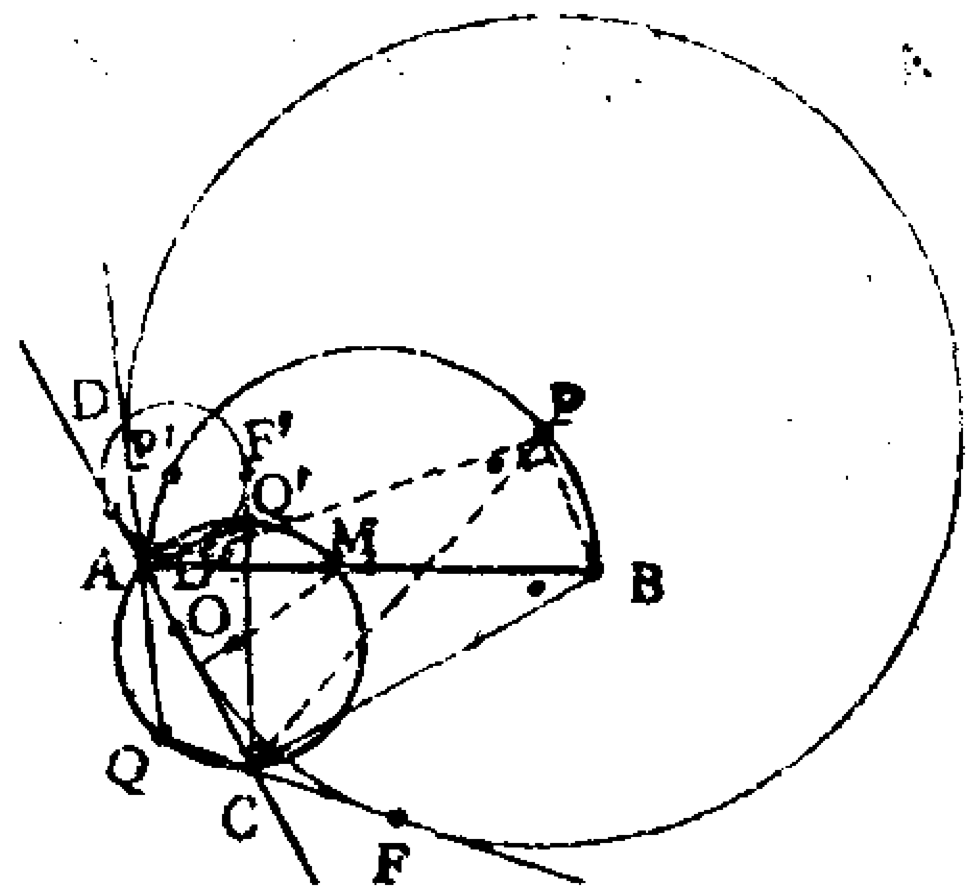
图总—127

以O为反演中心，r^2为反演幂将$\odot I$反演变换为$\odot I'$，则Q点的轨迹是$\odot I'$。

（证明略）。

128. 设AB是定半圆形的直径，AX是异于AB的定直线，$BC \perp AX$于C，以半圆上任意点P为心作圆切于AX，

而自A、C向所作圆各另引切线，试求这两条切线的交点Q的轨迹。



图总—128

探求：当P在B点时，⊙P切AX于C，则Q点重合于C；当P在A点时，⊙P切AX于A，则Q点重合于A。即A、C是轨迹上的特殊点。

取半圆上任一点P，有P、A、C、B四点共圆。

当切点在AC上时，有

$$\angle ABC=\angle APC=180°-(\angle DAC+\angle FCA)/2$$
$$=180°-(\angle Q+\angle ACQ+\angle Q+\angle CAQ)/2$$
$$=180°-(\angle Q+180°)/2$$
$$=90°-\angle Q/2$$

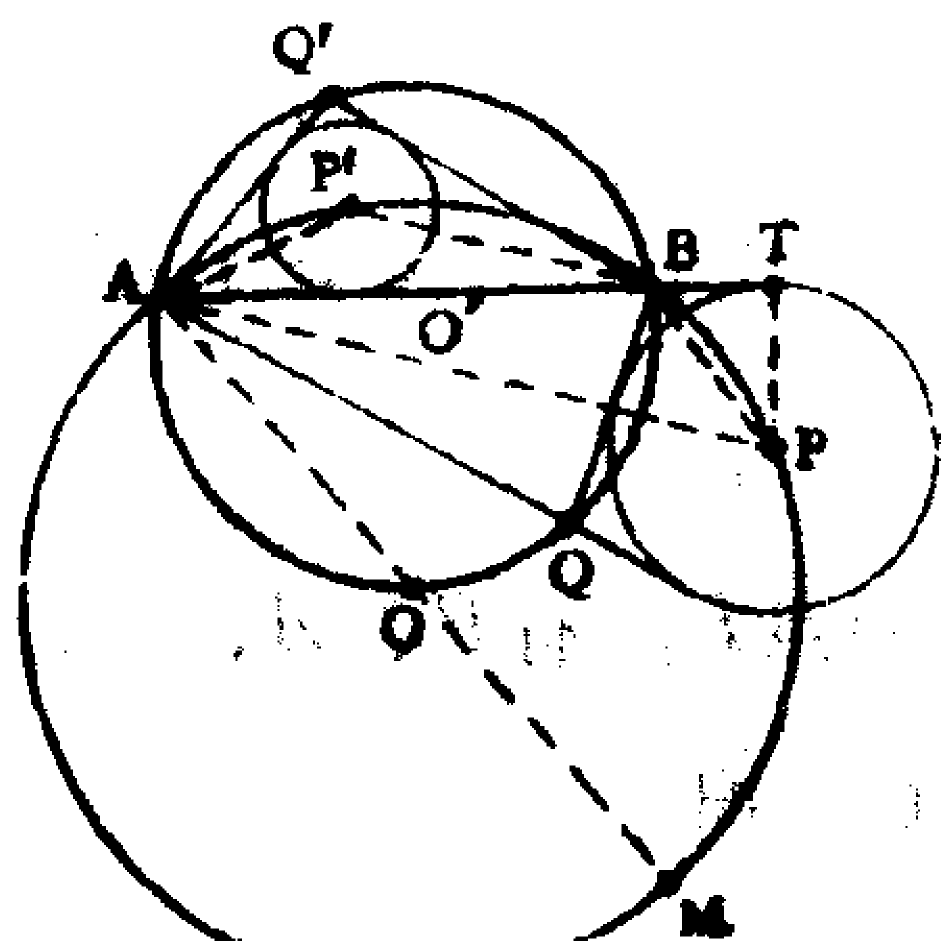
$\therefore \angle Q/2=90°-\angle ABC=\angle BAC$。

故$\angle Q=2\angle BAC$为定值。

当切点在CA的延长线上时，设两切线AD'、CF'相交于Q'，有$\angle Q'=180°-2\angle BAC$。

故Q、Q'、A、C共圆且$\angle Q=2\angle BAC$。即Q点的轨迹为圆（证明略）。

129. 在已知圆$\odot O$中，AB是不过O点的弦，以$\odot O$上某点P为心作圆使切于直线AB，而自A、B向所作圆各另引切线，命这两条切线的交点为Q，设令P点在$\odot O$上自原位置起移动到半周而止，试求Q点的轨迹。



图总—129

探求：设P点自A点起至经B点而至半周M止。当P在A、B点时，A、B两点为轨迹上的特殊点；当P至M时，轨迹点又与A点重合。即轨迹的起点与终点重合。

当P取在$\overset{\frown}{BM}$上时，$\odot P$切AB于延长线长的T点。

则 $\angle AQB=\angle TBQ-\angle TAQ=2(\angle TBP-\angle TAP)$

$= 2\angle APB$。

当P取在$\overset{\frown}{AB}$上时，$\odot P'$切于AB内部。

则 $\angle AQ'B = \angle AP'B - (\angle P'AQ' + \angle P'BQ')$

$= \angle AP'B - (\angle P'AB + \angle P'BA)$

$= \angle AP'B - (180° - \angle AP'B)$

$= 2\angle AP'B - 180°$

$= 2(180° - \angle APB) - 180°$

$= 180° - 2\angle APB$。

∴ $\angle AQB + \angle AQ'B = 2\angle APB + 180° - 2\angle APB$

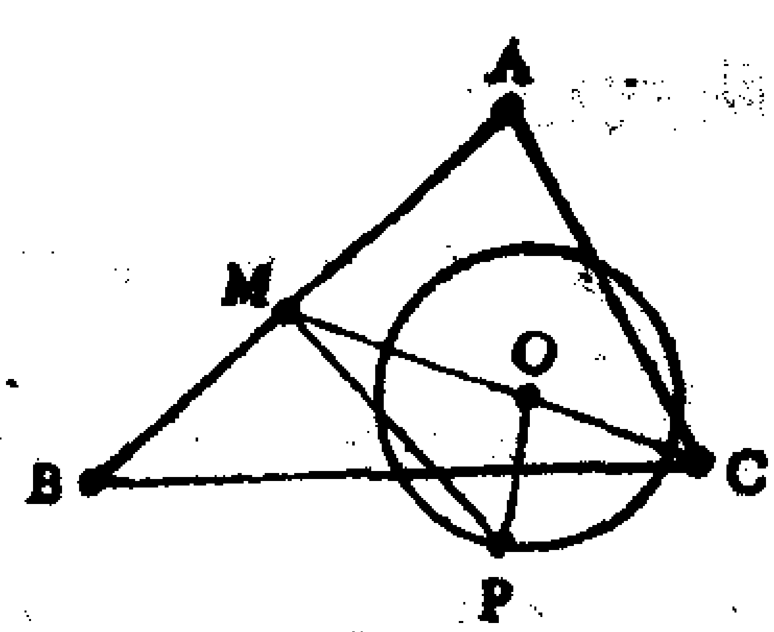
$= 180°$。

故Q点的轨迹为$\odot ABO$（证明略）。

130。设A、B、C是三个定点，P是适合关系

$a\cdot PA^2 + b\cdot PB^2 + c\cdot PC^2 = k$

的点，其中a、b、c、k都是常数，求P点的轨迹。



图总—130

探求：在AB上取点M，使$\overline{AM}/\overline{MB} = b/a$，由习题十八第20题得：

$PM^2 = a\cdot PA^2/(a+b) + b\cdot PB^2/(a+b)$

$- ab\cdot AB^2/(a+b)^2$

$\therefore\quad a\cdot PA^2+b\cdot PB^2=(a+b)PM^2+ab\cdot AB^2/(a+b)$

有 $k-c\cdot PC^2=(a+b)PM^2+ab\cdot AB^2/(a+b)$

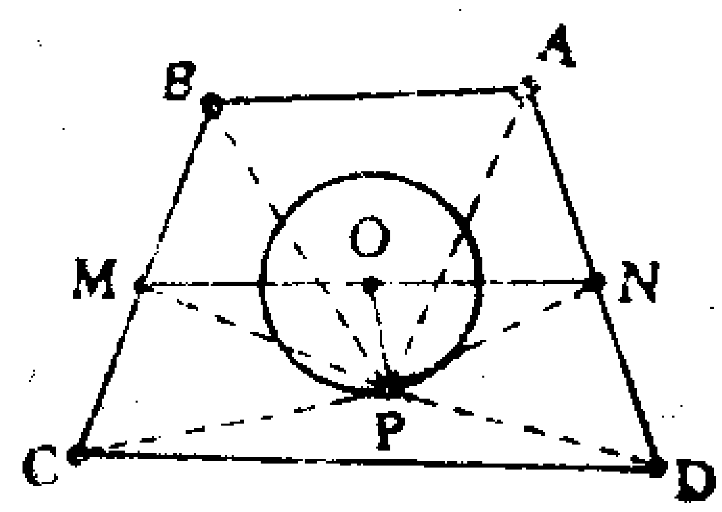
$\therefore\quad (a+b)\cdot PM^2+c\cdot PC^2=k-ab\cdot AB^2/(a+b)$为定值

由复习题四第37题，若$a+b+c\neq 0$，当P点的轨迹存在时，其轨迹为圆，圆心O在MC上。（证明略）

131．设A、B、C、D是四个定点，P是适合关系

$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=k$的点，k是常数，求P点的轨迹。

探求：令M、N为BC、DA的中点。O为MN的中点。由定理131，有



图总—131

$$PB^2+PC^2=2PM^2+BC^2/2,$$

$$PA^2+PD^2=2PN^2+AD^2/2.$$

两式相加得：

$$k=2(PM^2+PN^2)+(BC^2+AD^2)/2$$

$$=2(2PO^2+MN^2/2)+(BC^2+AD^2)/2$$

$\therefore\quad PO^2=k/4-MN^2/4-(BC^2+AD^2)/8$为定值。

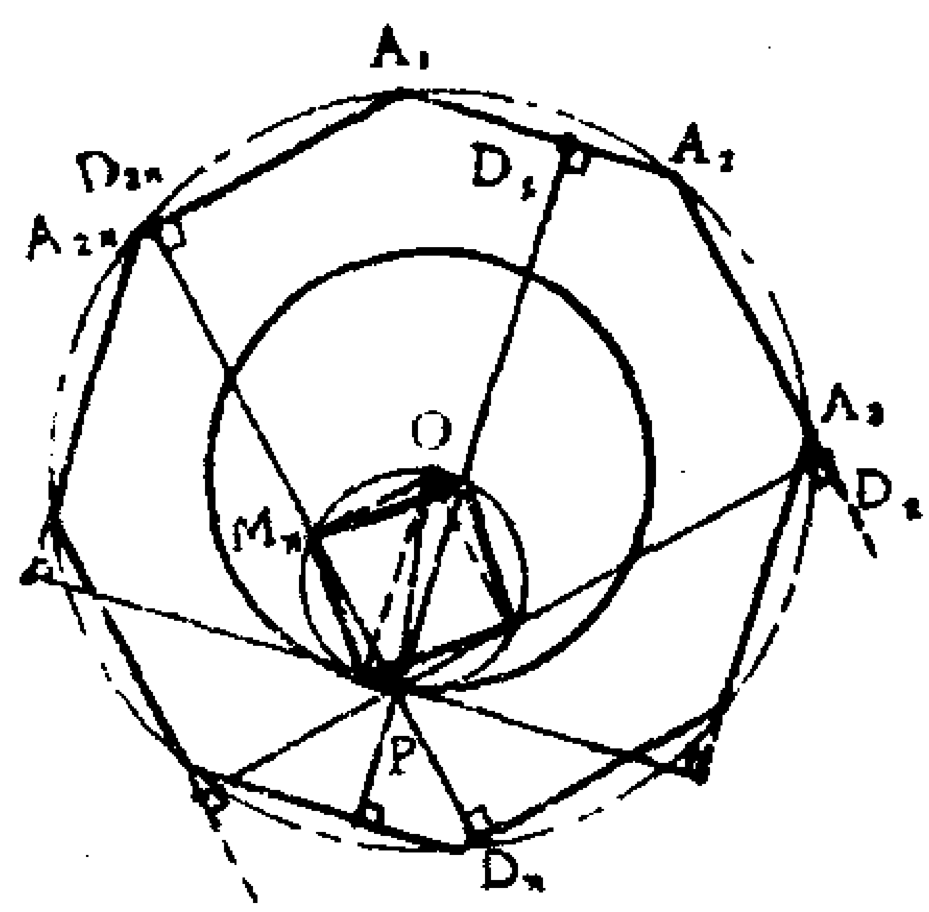
故P点的轨迹为圆O（证明略）。

132．已知一正$2n$边形，它的边依次记为a_1、a_2、……

a_{2n}，设P是适合关系

$$d_1d_{n+1}+d_2d_{n+2}+\cdots\cdots+d_nd_{2n}=k$$

的点。其中d_i是P与a_i的距离，k是常数，求P点的轨迹。



图总—132

探求：因正多边形是偶数边形，故其对边平行，即$A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}$，$A_2A_3 \parallel A_{n+2}A_{n+3}$，……$A_nA_{n+1} \parallel A_{2n}A_1$且两平行线间的距离相等，令为$h$。

设P在各边上的射影依次为D_1、D_2、D_3……D_{2n}，则PD_i与PD_{n+i}均共线，$i=1$、2……n。

设O在PD_i上的射影为M_i。有n个点M_i在以OP为直径的圆上。

由定理41的推论2°，正$2n$边形的每个内角等于$(n-1)\times180°/n$，每个外角等于$180°/n$。由于D_i、A_{i+1}、D_{i+1}、P均四点共圆。且$\angle M_iPM_{i+1}=\angle D_iPD_{i+1}$，

$\therefore\quad \angle M_iPM_{i+1}=180°/n$或$(n-1)180°/n$,

故$M_1M_2\cdots\cdots M_n$为正n边形。由习题十一第31题得:

$$PM_1^2+PM_2^2+\cdots\cdots+PM_n^2=2n(OP/2)^2 \qquad (1)$$

$\because\quad PD_1\cdot PD_{n+1}=(D_1D_{n+1}/2+PM_1)(D_1D_{n+1}/2$

$-PM_1)=D_1D_{n+1}^2/4-PM^2$

$=h^2/4-PM_1^2$,

$PD_2\cdot PD_{n+2}=h^2/4-PM_2^2$

……

$PD_n\cdot PD_{2n}=h^2/4-PM_n^2$

以上n个等式相加得:

$PD_1\cdot PD_{n+1}+PD_2\cdot PD_{n+2}+\cdots\cdots+PD_n\cdot PD_{2n}$

$=n\cdot h^2/4-2n\cdot(OP/2)^2$

故$k=n\cdot h^2/4-n\cdot OP^2/2$

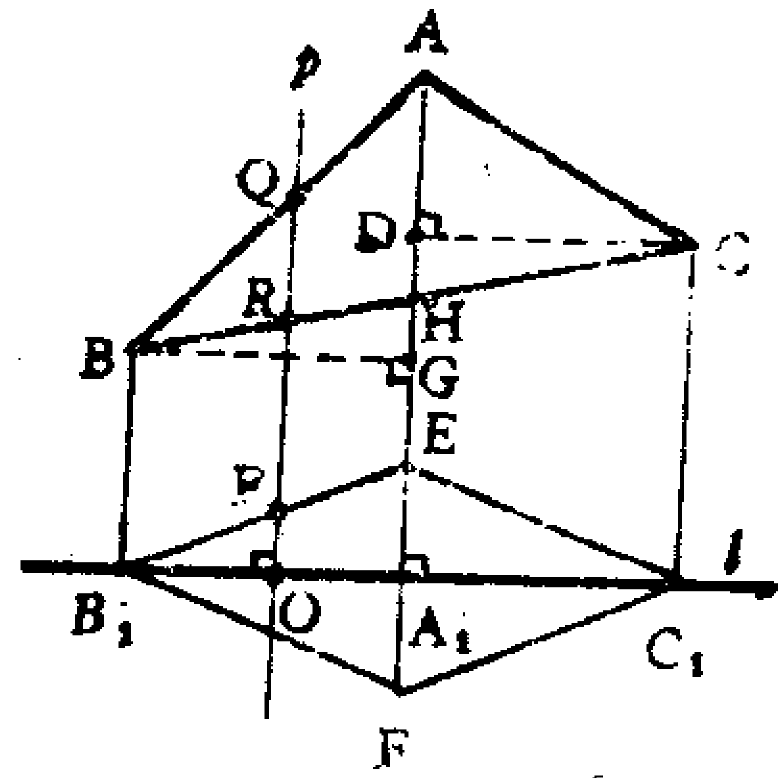
$\therefore\quad OP=\sqrt{h^2/2-2k/n}$ 为定值。

故P点的轨迹是以O为圆心的圆。

(证明略)。

133. 已知$\triangle ABC$,直线l。设动直线p垂直l于O,交$\triangle ABC$的周界于Q、R,在p上取P点,使$OP=QR/2$,求P点的轨迹,并证明这轨迹所包圈的面积等于$\triangle ABC$的面积。

探求：令A、B、C在l上的射影为A_1、B_1、C_1。AA_1交BC于H，取$A_1E=A_1F=AH/2$。则筝形B_1EC_1F就是所求的轨迹(证明略)。



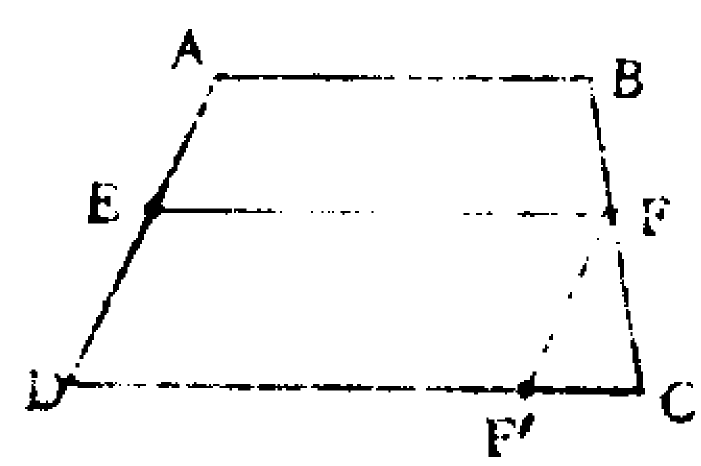
图总—133

筝形的面积：

$$S=\text{面}\triangle EFB_1+\text{面}\triangle EFC_1$$
$$=\text{面}\triangle AHB+\text{面}\triangle AHC=S_{\triangle ABC}.$$

134. 给定一梯形，求作一直线平行于它的底边且把它分为两个相似梯形。

作图：令$AB=a$，$DC=b$，在DC上取DF'使$DF'=\sqrt{ab}$。(§65，1°、29°)，过点F'作$F'F\parallel DA$交BC于点F(§65，11°)。过点F作$FE\parallel CD$交AD于E。则EF为所需直线。



图总—134

(证明略)。

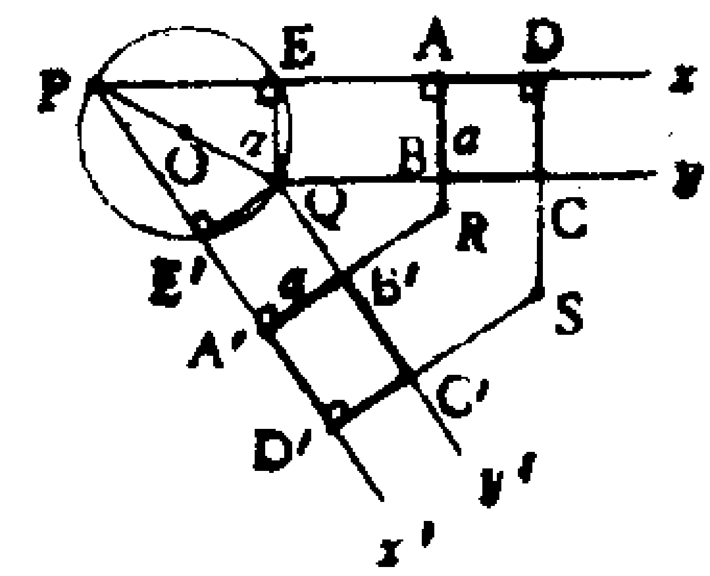
推究，本题恒有一解。

135. 已知一边的长。求作一个矩形，使它的四边(所在

直线）分别通过四个定点。

作图：令已知边长为a，四定点为P、Q、R、S。以PQ为直径作圆$\odot O$（§65，5°；§64，2°），

以Q为圆心，a为半径作圆使交$\odot O$于E、E'（§64，2°）。



图总—135

作$QY \parallel PX$（§65，11°）。

过R、S作直线垂直于PX、QY并分别交两直线于A、B、C、D（§65°，10°）。

则矩形$ABCD$、$A'B'C'D'$均为所求矩形。

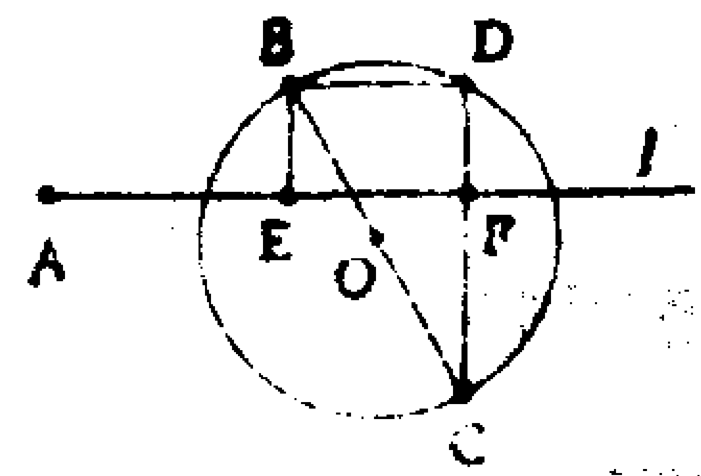
（证明略）。

推究，当RS恰垂直于PX时，所求矩形退化为线段。

136。过一定点求作一直线，使与另外两定点的距离和等于定长。

作图：设定长为a，定点为A、B、C。

以BC为直径作圆$\odot O$（§65，5°；§64，2°）。



图总—136

以C为圆心，a为半径作弧交$\odot O$于D（§64，2°）。

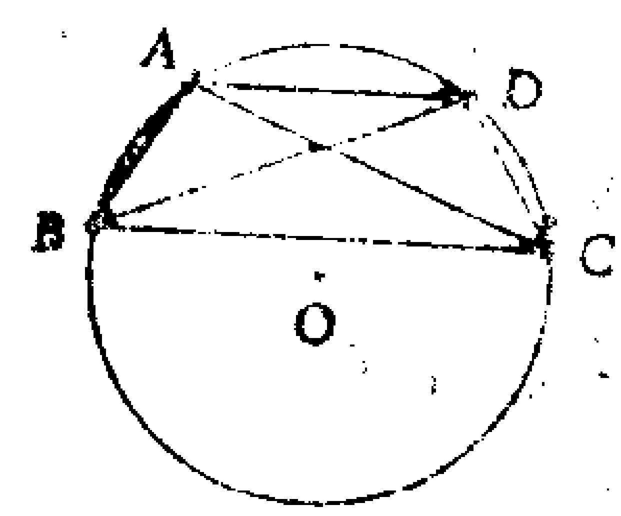
作$AF\perp CD$于D(§65,10°)。则AF所确定的直线l为所需直线(§64,1°)。

(证明略)。

137. 自已知圆上两定点求作两平行弦，使它们的积等于一已知线段的平方。

作图：⊙O上两定点为A、B，设已知线段为a。

作线段$x=\sqrt{AB^2+a^2}$(§65,31°)，以A为圆心，x为半径作弧交⊙O于C(§64,2°)。



图总—137

连BC，作$AD\parallel BC$交⊙O于D(§64, 1°; §65, 11°)。则AD、BC为所求的两平行弦。

证明：由托列密定理得：

$AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD$,

由等腰梯形得

$AD\cdot BC=AC^2-AB^2=a^2$。

推究：x等于⊙O的直径时一解；

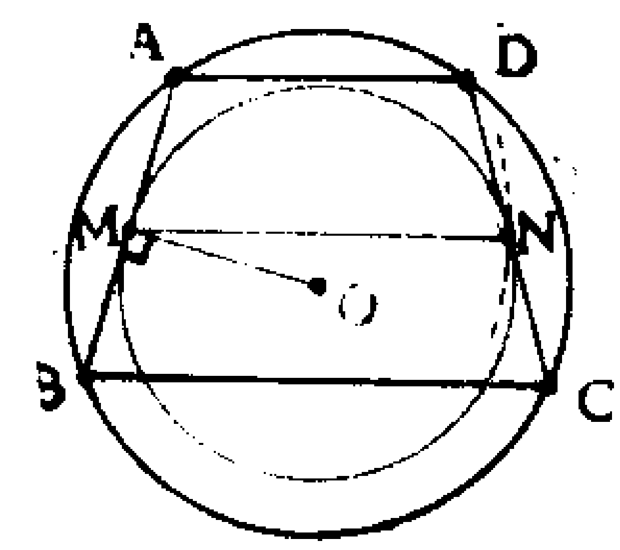
x小于⊙O的直径时两解；

x大于⊙O的直径时无解。

138. 自已知圆上两定点，求作两平行弦，使它们的和等于定长。

作图：设A、B是$\odot O$上两定点。M为AB的中点、作$\odot O$的同心圆。$\odot O(OM)$。

令定长线段为a，以M为圆心。$a/2$为半径的圆弧，设交$\odot O(OM)$于N。过点N作$\odot O(OM)$的切线交$\odot O$于C、D。则AD、BC为所求两平行弦。



图总—138

证明：AB、CD均为$\odot O(OM)$的切线且$AB=DC$。

∴ $AD \parallel BC$，且M、N均为AB、DC的中点。

又 $MN=a/2$。

有 $AD+BC=a$。

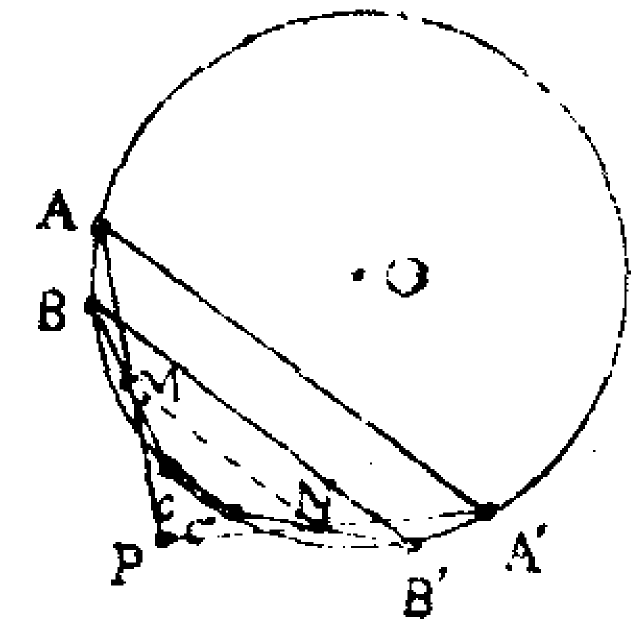
推究。当$a/2=2\cdot OM$时，有一解；

当$a/2<2\cdot OM$时，有两解，

当$a/2>2\cdot OM$时，无 解。

139. 设A、B、C是已知圆上三定点，求作互相平行三弦AA'、BB'、CC'，使$\overline{AA'}=\overline{BB'}+\overline{CC'}$。

作图、设M为BC的中点，延长AM至P，使$MP=AM$。在$\odot O$上求一点A'，使$PA'=PA$。作$BB' \parallel AA'$、$CC' \parallel AA'$，则 AA'、BB'、CC'即所求三平行弦。



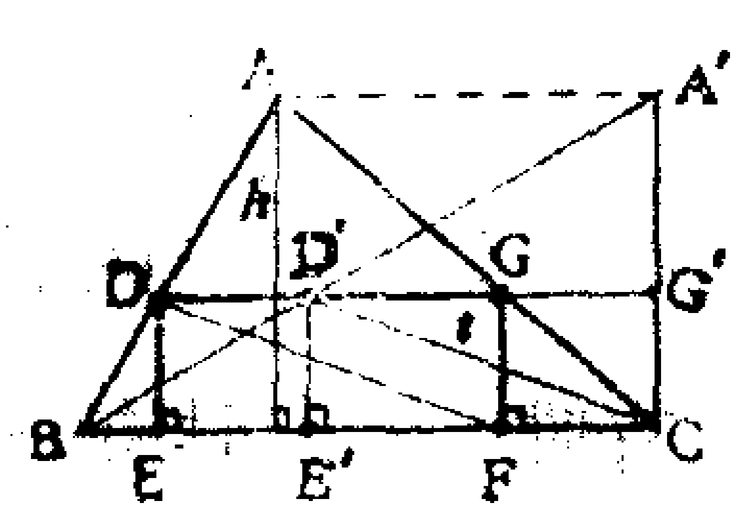
图总—139

证明： $AA'=2\cdot MN=BB'+CC'$。

140.设一定三角形的两底角都是锐角。求作已知对角线长的矩形，使它有一边落在定三角形的底边上，其他两顶点分别落在两腰上。

作图，设定三角形BC上的高为h，所求矩形对角线长为t。

作$\triangle A'BC$使$A'C=h$，在$A'B$上取点D'，使$CD'=t$，过D'作$DG' \parallel BC$交AB、AC于D、G。作矩形$DEFG$，则为所求矩形。



图总—140

证明：

$\because$ $DG/BC=AG/AC=A'G'/A'C=D'G'/BC$。

∴ 矩形$DEFG$≌矩形$D'E'CG'$。

故 $DF=D'C=t$。

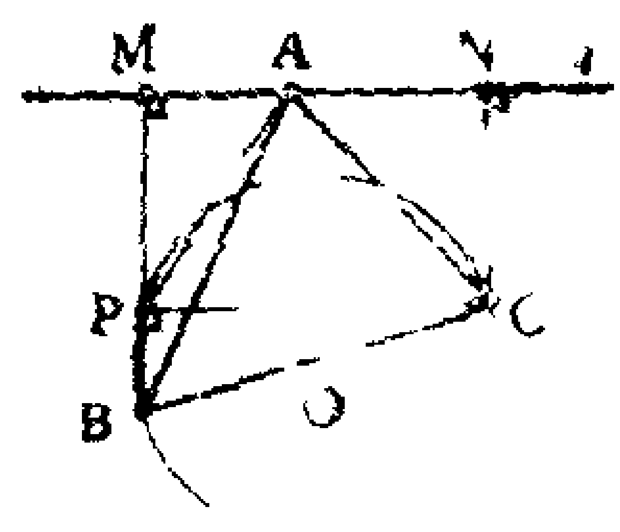
141。已知$\triangle ABC$及线段r，求过A点作直线l，并引BM、$CN\perp l$于M、N，使得$BM^2-CN^2=r^2$。

作图。以BC为直径作圆$\odot O$。

在$\odot O$上求点P，使

$AP=\sqrt{AB^2-r^2}$（§65，32°）。

过A作直线$l\perp BP$于M。则l为所求作的直线。



图总—141

证明：作$CN\perp l$于N。

则 $BM^2-CN^2=BM^2-PM^2=(AB^2-AM^2)-[(AB^2-r^2)-AM^2]=r^2$。

推究。

在$\odot O$上求得两点P时有两解；

有唯一P点时有一解；

无P点存在时无解。

142。已知顶角的平分线、两底角的差、两腰的和是底边的三倍，求作三角形。

作图。设顶角的平分线为 t，

两底角的差为 θ。

作$\triangle DAT$，使$AT=t$，

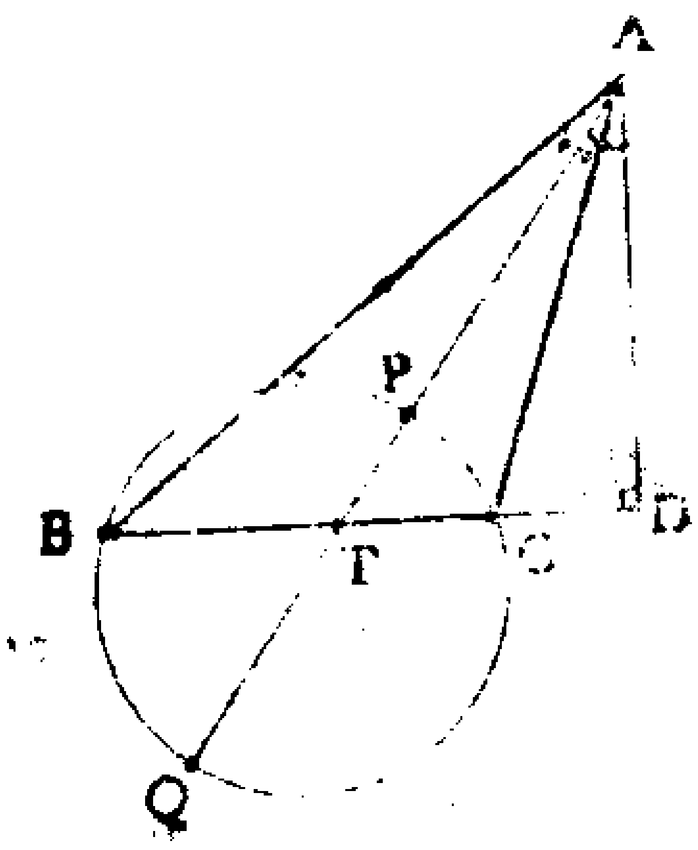
$\angle TAD=\theta/2$ （§65、4°）

内、外分AT于P、Q，

设 $PA/PT=QA/QQ=3/1$

则由例题64阿波罗尼斯定理得

以PQ为直径的圆为动点至两定点



图总—142

A、T的定比为3/1的点的轨迹。

令此圆交直线TD于B、C。则所求三角形为$\triangle ABC$。

证明： $\because$ $BA/BT=CA/CT=3/1$。

有 $AB+AC$是BC的三倍。

且 $\angle BAT=\angle CAT$、$AT=t$。

又 $\angle C-\angle B=(90°+\angle CAD)-(90°-\angle BAD)$

$=\theta$。

143.已知一边、对角的平分线、另两边的和，求作三角形。

作图。已知边$BC=a$，其对角平分线$AT=t$。

又 $AB+AC=l$。

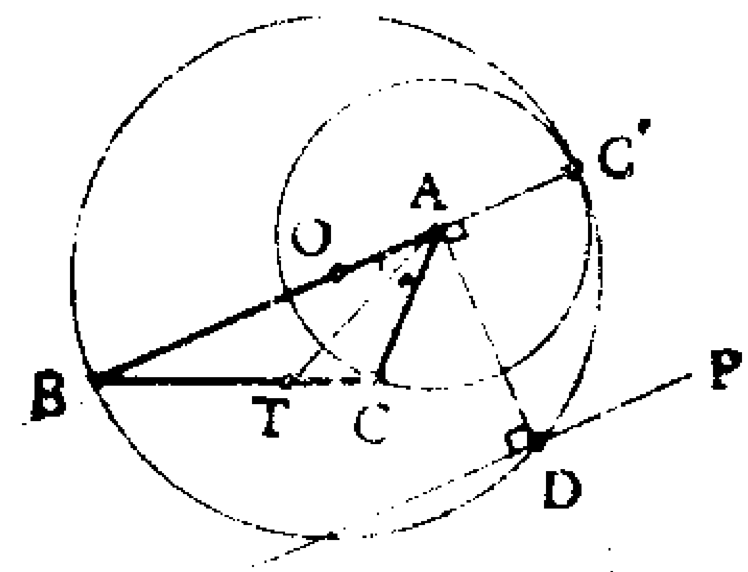
以线段$BC'=l$为直径作⊙O。

作直线$p \parallel BC'$且两线的距离为

$t/\sqrt{1-a^2/l^2}$。

设p交⊙O于D，作$DA \perp BC'$于A。

作⊙$A(AC')$，在⊙A上求点C，使$BC=a$，则所求三角形为$\triangle ABC$。



图总—143

证明：作$\angle BAC$的分角线AT。需证$AT=t$。

$\because \quad AD^2=AB \cdot AC'=AB \cdot AC$。$AB+AC=l$。

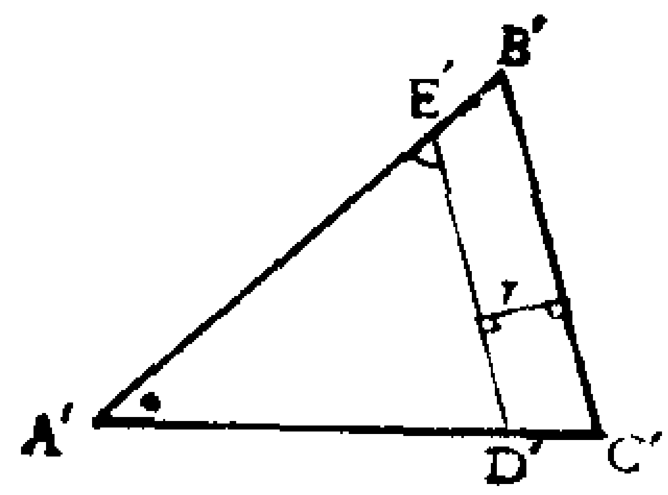
且 $\overline{TB}/\overline{TC}=-\overline{AB}/AC$。由习题十八第20题得：

$$AT^2=AB \cdot AC^2/(AB+AC)+AC \cdot AB^2/(AB+AC)$$
$$-AB \cdot AC \cdot BC^2/(AB+AC)^2$$
$$=AD^2[(AC+AB)/(AB+AC)-a^2/l^2]$$
$$=t^2(1-a^2/l^2)/(1-a^2/l^2)=t^2。$$

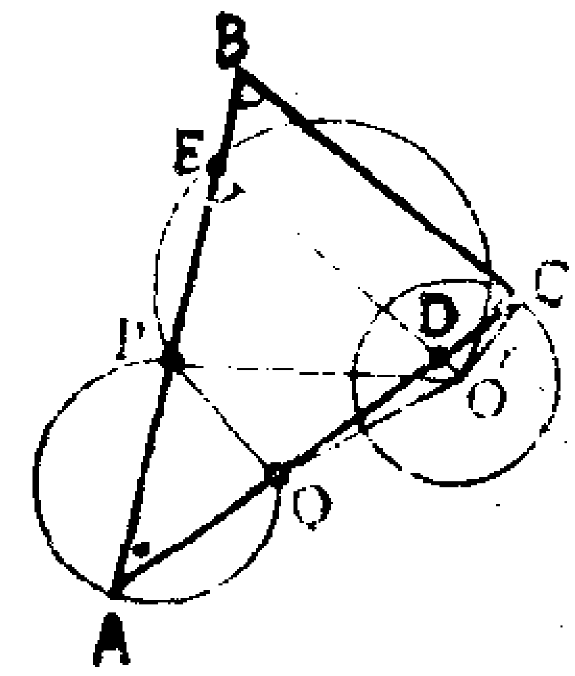
$\therefore \quad AT=t$。

144. 已知$\triangle A'B'C'$，⊙O，两点P、Q。求作$\triangle ABC$，使真正合同于$\triangle A'B'C'$，且BC切于⊙O，AB、AC各通过P、Q。

作图。设⊙O的半径为r。作$E'D' \parallel B'C'$　且两平行线间的距离为r。



(a)



(b)

图总—144

以PQ为弦作弓形，使其内接角为$\angle A'$；

以PO为弦作弓形，使其内接角为$\angle B'$；

利用复习题五第39题方法，过两弓形的交点P作直线交两弓形于A、E，且使$AE = A'E'$。连EO设与AQ的交点为D，则有$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$。

作⊙O的切线$BC \parallel ED$。交AP、AQ于B、C，

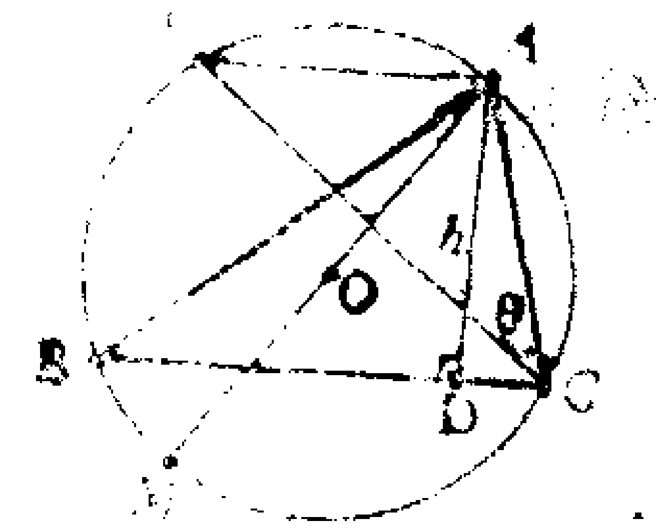
有　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

（证明略）。

145.已知两底角的差、底边的高、两腰的积，求作三角形。

作图。设两底角 $\angle C - \angle B = \theta$，$BC$ 边上的高为 h，

两腰的积为mn。



图总—145

由习题四第11题有，$\triangle ABC$的外接圆半径 $R=mn/2h$。

由§65、28°，可得R。故$\odot O$可作，取$\odot O$上任一点C。作角θ设其两边交$\odot O$于A、E。

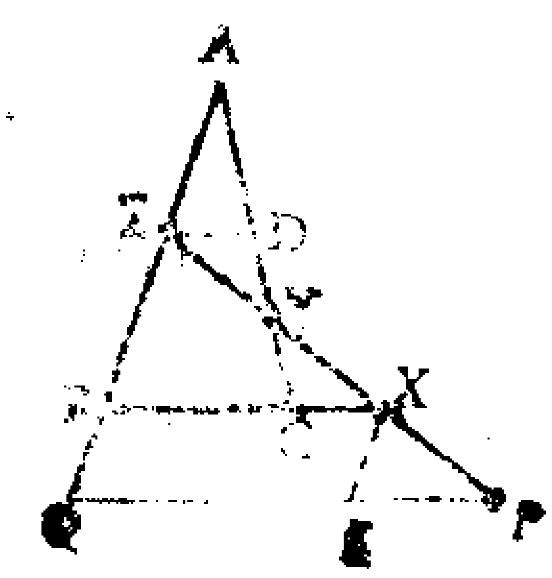
作$BC \parallel EA$，使两平行线间的距离为h。则$\triangle ABC$为所求三角形。

（证明略）。

146. 已知$\triangle ABC$，求过定点P作直线l，交BC、CA、AB于X、Y、Z，使$XY=YZ$。

分析。设图已作成。即有$XY=YZ$。

过P作$PQ \parallel CB$交AB于Q。



图总—146

过X作$XE \parallel AB$交PQ于E，过Z作$ZD \parallel BC$交AC于D。则Q为定点。且有

$\triangle AZD \backsim \triangle ABC$，

$\triangle ZBX \backsim \triangle ZQP$

故有

$$AB = AZ + ZB = AB \cdot \frac{ZD}{BC} + \frac{BQ \cdot BX}{QP - BX}$$

$$= AB \cdot \frac{BX - BC}{BC} + \frac{BQ \cdot BX}{QP - BX}$$

令　$AB = c$，$BC = a$，$BQ = q$、$QP = p$。由上式可得

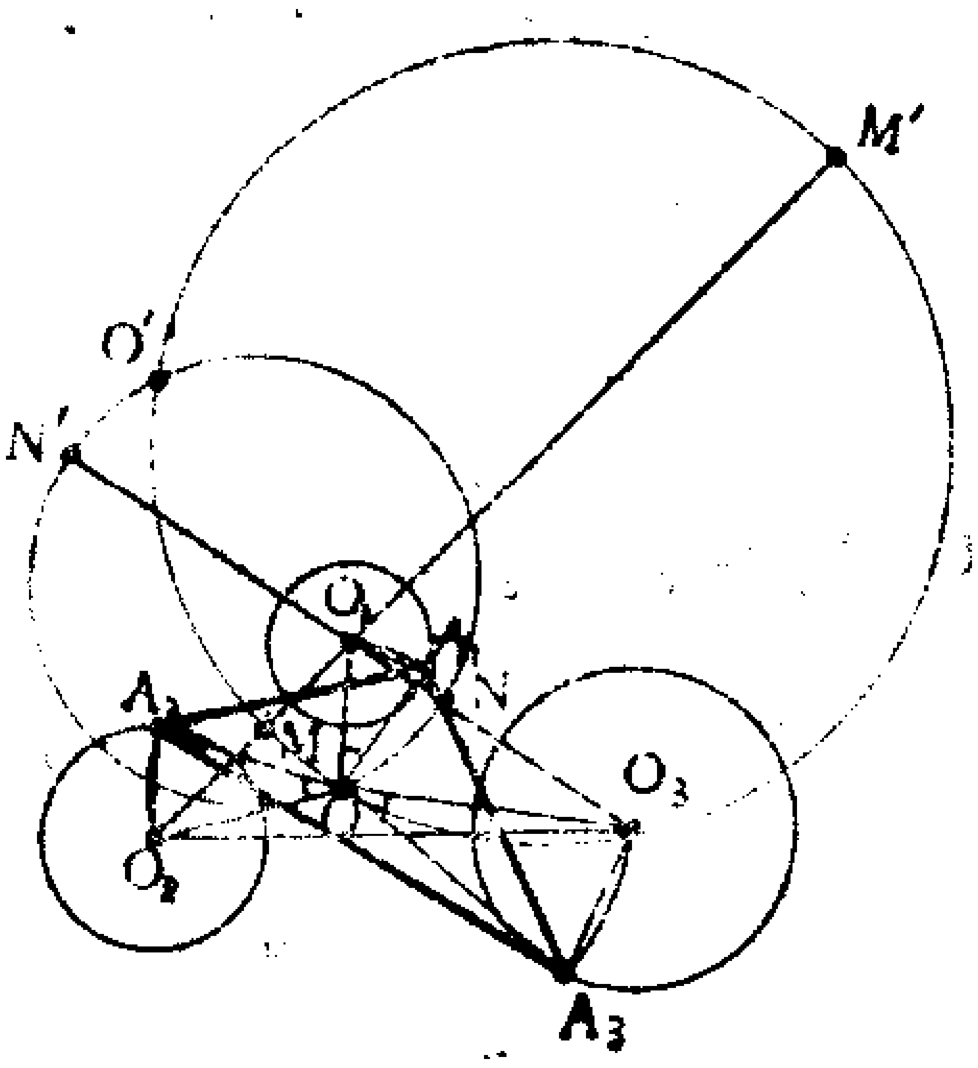
$$BX = \frac{2ac + aq + cp \pm \sqrt{(2ac + aq + cp)^2 - 8apc^2}}{2c}$$

由作图成法知BX可作。

故有两解。

显然，X、Z重合于B时，恒有$XY = YZ$。

147.已知中心不共线的三圆$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$，在这三圆上各求一点A_1、A_2、A_2，使$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle O_1O_2O_3$真正合同，



图总—147

作图，在O_1O_2、O_1O_3上分别取内、外分点M、M'，N、N'，使$O_2M/MO_1=O_2M'/O_1M'=r_2/r_1$，$O_3N/NO_1=O_3N'/O_1N'=r_3/r_1$，

分别以MM'、NN'为直径作圆，设两圆交于O、O'。

以O为圆心。OO_1、OO_2、OO_3为半径在三圆上取A_1、A_2、A_3三点，并使O_1A_1、O_2A_2、O_3A_3关于O点取顺时针方向，则$\triangle A_1A_2A_3$为所求三角形。

当A_1'、A_2'、A_3'三点关于O点取逆时针方向时，可得$\triangle A_1'A_2'A_3'$，则$\triangle A_1'A_2'A_3'$亦为所求三角形。

证明：由例题64即阿波罗尼斯定理得。

$\because$ $OO_2/OO_1=r_2/r_1$，$OO_3/OO_1=r_3/r_1$，

$\therefore$ $OO_3/OO_2=r_3/r_2$。

故有 $OO_1:OO_2:OO_3=r_1:r_2:r_3$

$OA_1:OA_2:OA_3=O_1A_1:O_2A_2:O_3A_3$

$\therefore$ $\triangle OO_1A_1\backsim\triangle OO_2A_2\backsim\triangle OO_3A_3$

有 $\angle O_1OA_1=\angle O_2OA_2=\angle O_3OA_3$

$\therefore$ $\triangle A_1A_2O\cong\triangle O_1O_2O$，$\triangle A_2A_3O\cong\triangle O_2O_3O$，

$\triangle A_3A_1O\cong\triangle O_3O_1O$。

故 $A_1A_2=O_1O_2$，$A_2A_3=O_2O_3$，

令 $A_3A_1=O_3O_1$。

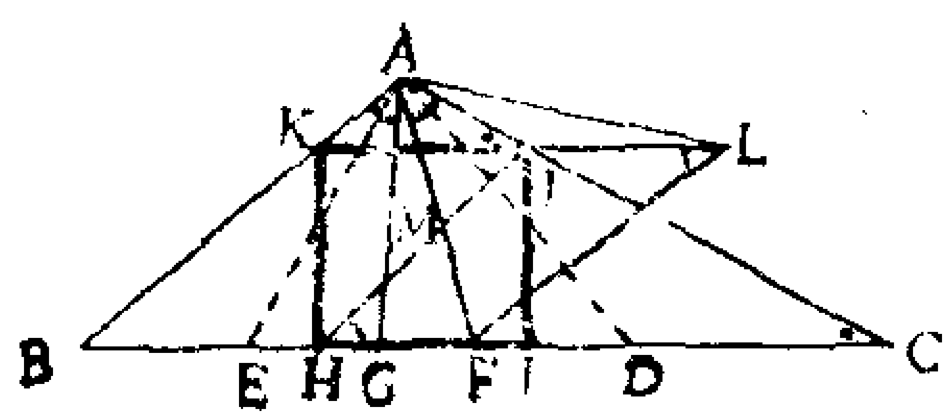
∴ $\triangle A_1A_2A_3 \cong \triangle O_1O_2O_3$。

同理 $\triangle A_1'A_2'A_3' \cong \triangle O_1O_2O_3$。

推究。关于O'点也有两解。

故本题有四解。

148.求把一已知三角形裁去一部分，使剩下的是一个极大的正方形。



图总—148

当已知三角形为非钝角三角形时，由习题十二第24题知，立于较小边上的正方形为较大。

当已知三角形为钝角三角形时，令$\angle A>\angle B>\angle C$以下将研究裁去一部后，立于各边的正方形的对角线的大小。

作直角三角形$\triangle BAD$、$\triangle CAE$。过直角顶点A作平分角线AF、AG、则AF、AG为立于AC、AB边上的正方形的对角线。

∵ $\angle AGF=45°+\angle B$，$\angle AFG=45°+\angle C$。

∴ $\angle AGF>\angle AFG$

故　$AF>AG$。

作BC边上的正方形$HIJK$，平移其对角线HJ至FL。

∵　$\triangle MHF\backsim\triangle MAJ$，

有　$JL=HF>AJ$，

∴　$\angle JAL>\angle JLA$，

故　$\angle FAL>\angle FLA$，

∴　$FL>FA$。

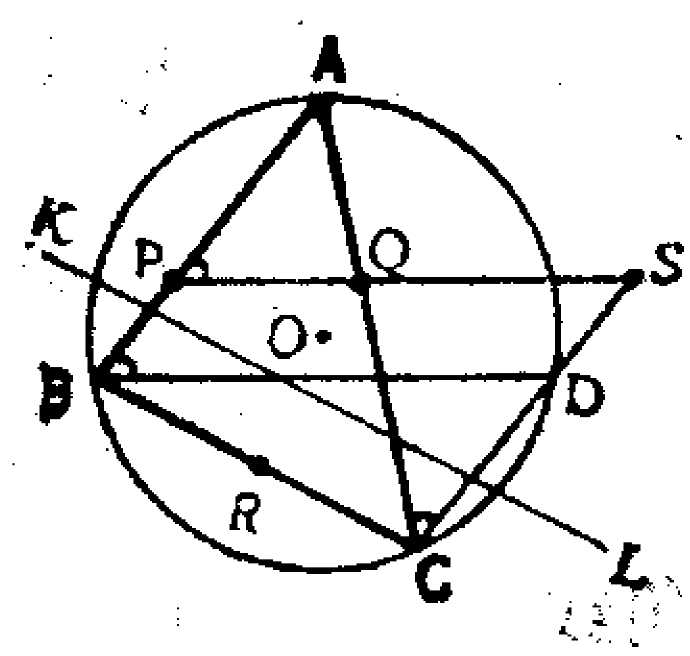
故　钝角所对边BC上的正方形是一个极大的正方形。

149．已知圆及不在圆上的三点，求作这圆的内接三角形，使它的三边或其延长线分别通过该三点。

分析：设P、Q、R是不在圆上三定点。若图$\triangle ABC$已作成。则过点R的线段BC有定向KL。

取圆上任一点A作AP、AQ交$\odot O$于B、C。

过B作平行于PQ的直线交$\odot O$于D，令CD交PQ于S。则S为定点。这是因为$\angle ACS=\angle ABD=\angle APQ$，



图总—149

所以$\triangle QCS\backsim\triangle QPA$，

故有　$QS=QA\cdot QC/PQ$为定值。

由此可以导出一种作图方法：

欲作内接于⊙O的△ABC，使其三边通过三定点P、Q、R，可先作△BCD，使其两边通过两定点R、S，而第三边平行于PQ；而欲作出上述△BCD，可先作出通过定点S且两边平行于两定向PQ、KL的三角形即可。

由例题89知，这个问题是可作的。

150.已知一圆及不与圆相切的三条直线，求作这圆的外切三角形，使它的顶点分别落在该三条直线上。

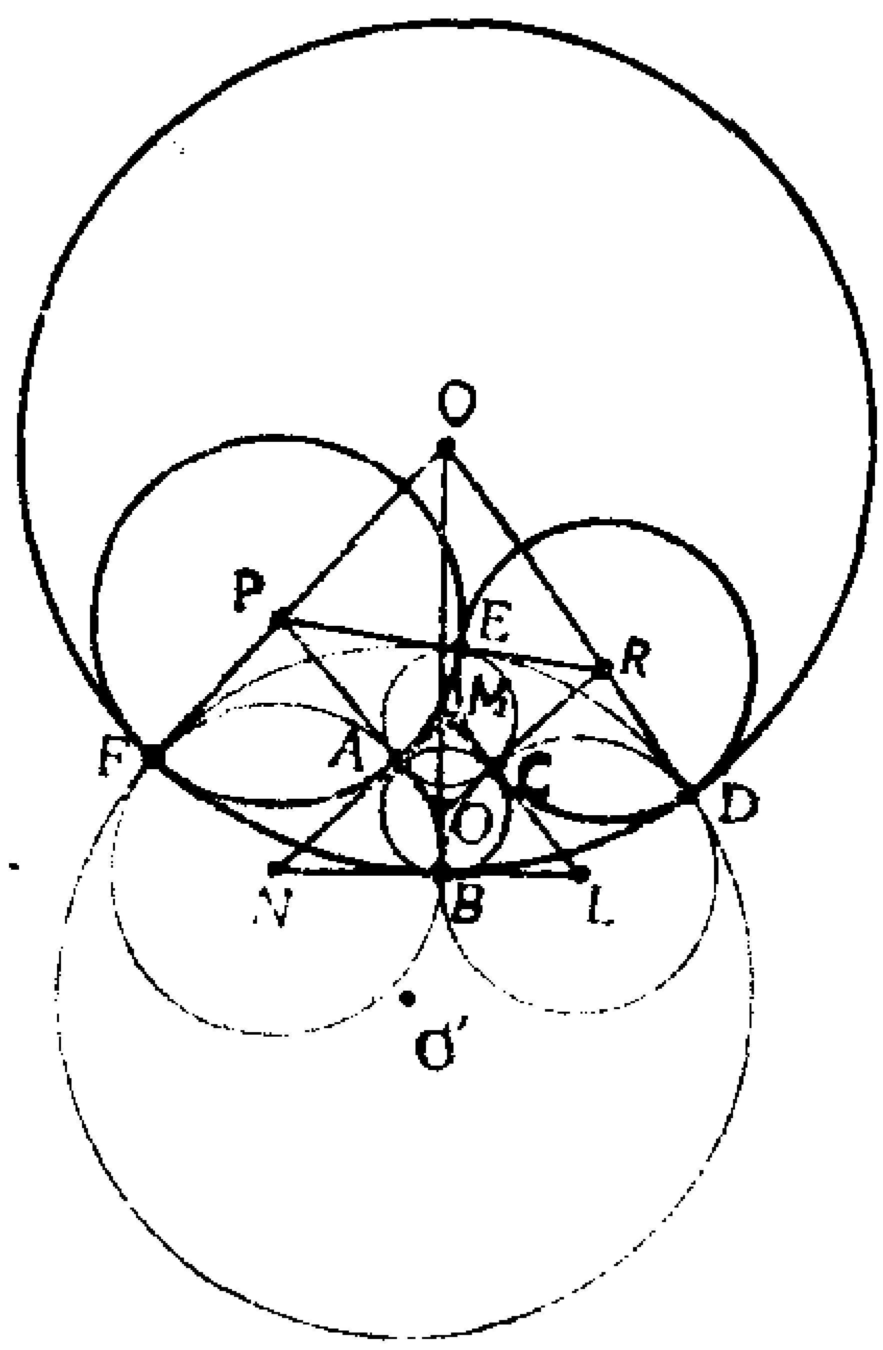
可参考习题二十九第38题。

151.求作三圆使其两两相切，并分别切一已知圆于三定点。

作图，设已知圆⊙O上三定点为A、B、C。过三定点A、B、C作⊙O的切线，令其交点为L、M、N。以L、M、N为圆心，分别以LB、MC、NA为半径作三圆⊙L、⊙M、⊙N，则该三圆两两相切于A、B、C。

由例题107，可作三圆⊙L、⊙M、⊙N的公切圆⊙O'，令⊙O'与该三圆的切点分别为D、E、F。再过D、E、F三点作⊙O'的切线并令其交点为P、Q、R。以P、Q、R为圆心，分别以PE、QF、RD为半径作三圆。⊙P、⊙Q、

$\odot R$。则该三圆两两相切且分别切$\odot O$于三定点 A、B、C。故$\odot P$、$\odot Q$、$\odot R$为所需的图形。



图总—151

证明：∵ OA、OB、OC 分别是三圆 $\odot M$、$\odot N$、$\odot L$的两两的公切线，故必须通过P、Q、R三点。

∴ $PE=PA=PF$，$QF=QB=QD$，

$RD=RC=RE$。

讨论：当$\triangle ABC$ 为锐角三角形时，$\odot L$、$\odot M$、$\odot N$三圆相切，有两解；

当$\triangle ABC$为钝角三角形时，有两圆彼此外切且它们与第三圆内切，有两解；

当△ABC为直角三角形时有一圆蜕化成一直线，有一解。

152.求作所设圆的内接梯形。已知它的周长及一底角。

分析：令周长为 s。底角 为 α。则梯形的对角线 AC 有定值 a。若⊙O的直径为$2R$，则有$\sin\alpha = a/2R$。

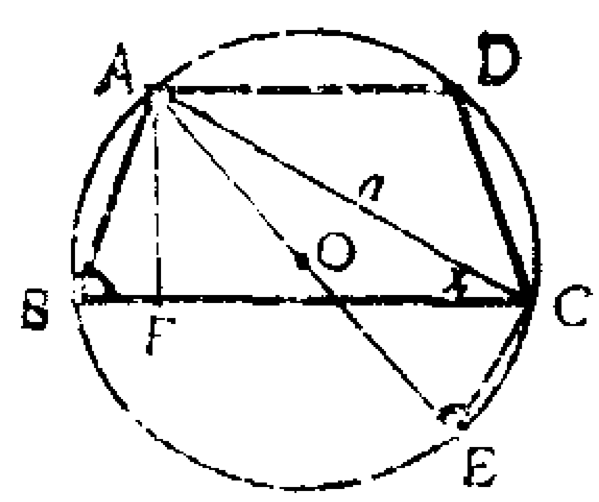
设图已作成，只要能作出角x，则梯形可得。

∵ $2(AB + FC) = s$。

有 $2(2R\sin x + 2R\sin\alpha \cdot \cos x) = s$

∴ $\sin x + \sin\alpha \cdot \cos x = s/4R$ (1)

令 $\cos = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$,



图总—152

由于 $\sin\alpha = a/2R$，可得角θ，

且有$\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}} = \dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha}$ (2)

将(2)分别乘(1)式各项得：

$$\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta = \frac{s}{4R\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$$

$$\therefore \quad \sin(x+\theta) = \frac{s}{4R\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$$

故角x可作。

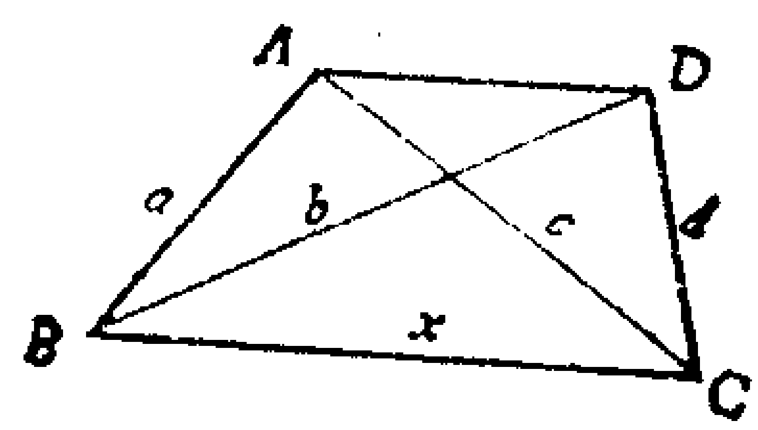
153. 已知两腰及两对角线，求作梯形。

因△ABC与△DBC面积相等。由§22的海伦——秦九韶公式得：

$$a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-x^2}{2}\right)^2=b^2d^2-\left(\frac{b^2+d^2-x^2}{2}\right)^2$$

解得 $x^2=\dfrac{2(bd+ac)(bd-ac)}{(a^2+c^2-b^2-d^2)}+\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)$

故 x可作。



图总—153

附　　录

名　词　索　引

三角形的合同分两类：若沿周界环绕的方向相同，叫做**真正合同**，方向相反时，叫做**镜向合同**。（P. 19. 梁书页码，以下同）

折线两端点的连结线，叫做**折线的缺线**。（P.20）

设有四点，其中有一点是其余三点连成的三角形的垂心，则其余三点都有同样的性质。这样的四点合称为一垂心组。例如三角形的内心和三傍心构成一**垂心组**。（P.34）

被圆内某点平分的弦，叫做**过该点的最小弦**。（P.35）

自圆外一点向圆引两切线（半线），这两切线的夹角，**叫做该点对圆的视角**。（P.36）

一个角的顶点若在一弓形的弧上，而两边各通过弓形的弦的两端，则该角叫做这**弓形的内接角**。（P.39）

自一点发出两条半线使分别通过一已知线段的两端，则这两条半线所成的角，叫做该**点对已知线段的**视角。（P.40）

由等腰梯形的两腰与两对角线构成的图形（一个折四边形），**叫做逆平行四边形**。（P.45）

三角形的相似分两类：若延周界环绕的方向相同，叫做**真正相似**，方向相反时，叫做**镜象相似**。（P.54）

对于同一直线上且合于$CA/CB=-DA/DB$的四点A、B、C、D常称为C、D(A、B)调和分隔A、B(C、D)，或把这四点合称为调和点列。(P.65)

扇形的弧所对的圆心角，叫做扇形的顶角，顶角为直角的扇形，叫做直角扇形。(P.73)

与诸圆均相切的圆，叫做诸圆的公切圆。(P.73)

三角形(非直角的)的三个高足连成的三角形，叫做原三角形的垂三角形。(P.74)

若一个三角形的三顶点分别落在另一个三角形的三边上，则前者叫做后者的内接三角形。(P.148)

三角形外接圆上任一点在三边所在直线上的射影共线。这直线叫做该点对于该三角形的西摩松线。(P.158)

三角形的外心、垂心、重心三者共线。这直线叫做三角形的欧拉线。(P.160)

设两三角形对应边(所在直线)交点共线，则对应顶点的连线会于一点或互相平行，具有这个条件的两个三角形，被称为是透视的，其对应顶点连线的交点叫做透视中心，对应边(所在直线)交点所在的直线叫做透视轴。(P.166)

圆内接六边形三双对边(所在直线)的交点共线。这直线叫做该六边形的巴斯卡线。

过三角形的顶点所作外接圆的切线，各与对边(所在直线)的交点共线。这直线叫做三角形的来莫恩线。(P.168)

四条直线两两相交于六点，这个图形叫做完全四边形。有四边和六个顶点，不共边的两顶点称为对顶点，其连线称为对角线，凡三线。该三线的三中点共线，叫做完全四边形的牛顿线。三对角线交成的三角形，称为对角三角形。(P.168)

过一个角的顶点且关于该角的平分线互为对称的两直线，称为该角的**等角线**。（P.174）

对给定的△ABC，如果有一点P，使得PA、PB、PC的等角线会于一点Q（当然，QA、QB、QC的等角线要会于P点），那么这样的P、Q两点叫做△ABC的**等角共轭点**。例如三角形的外心与垂心就是一对等角共轭点。

三角形每条中线的等角线，叫做**陪位中线**，三条陪位中线的交点，即重心的等角共轭点，叫做**陪位重心**。

给定△ABC，在直线AC、AB上各取一点B'、C'，若△$AB'C'$镜象相似于△ABC，即B、C、B'、C'同在一圆上，则$B'C'$线叫做BC边的**逆平行线**。（P176）

在△ABC中，X与X'、Y与Y'、Z与Z'各是BC、CA、AB上的等截点，设AX、BY、CZ三线交于一点P，则AX'、BY'、CZ'三线交于一点P'或互相平行。

当P与P'存在时，它们被称为△ABC的**等截共轭点**。（P182）

设⊙I是△ABC的内切圆或旁切圆。它切BC、CA、AB于X、Y、Z，则AX、BY、CZ三线共点。这样的点共四点，称为△ABC的**葛耳刚点**。这四点的等截共轭点是存在的，它们叫做△ABC的**奈格耳点**。（P183）

三角形三边的中点，三高线的垂足，垂心与顶点连结线的中点，凡九点共圆。这圆叫做三角形的**九点圆**。（P183）

过三角形的陪位重心所作三边的平行线与周界的六个交点共圆。这圆叫做三角形的**第一来莫恩圆**，又称为**三乘比圆**。（P189）

过三角形的陪位重心所作三边的逆平行线的六个端点共圆。这圆叫做三角形的**第二来莫恩圆**，又称为**余弦**

圆。（P188）

由三角形的顶点向直径为对边的圆引切线，则诸切点共圆，圆心是三角形的重心。这圆叫做三角形的**重圆**。

三角形每边上高线足在他两边上的射影凡六点共圆。这圆叫做三角形的**泰罗圆**。

在$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在直线上各任取一点X、Y、Z，则三圆$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$共点。这点叫做X、Y、Z对于$\triangle ABC$的**密克点**。（P194）

四条直线交成四个三角形，它们的外接圆共点。这点叫做四条直线所构成的**完全四边形的密克点**。（P198）

一个完全四边形中包含三个四边形（凸的、凹的折的各一），每个四边形的对边，都叫做完全四边形的**对节**。一个完全四边形共有六双对节。

四点两两相连共得六条直线。这个图形叫做**完全四角形**。一完全四角形有四顶点和六边，不共顶点的两边称为对边，其交点称为对角点，凡三点。连三对角点所成的三角形，称为**对角三角形**。（P202）

弓形的弧的中点至弦的垂线，叫做**弓形的高**.（P213）

三角形的九点圆内切于内切圆而外切于三旁切圆。本题称**费尔巴哈定理**。（P219）

完全四边形的密克点在四边上的射影共线。这直线叫做**完全四边形的西摩松线**。

完全四边形各边所成四个三角形的垂心同在一条平行于西摩松线的直线上。这直线叫做**完全四边形的垂心线**。（P221）

三角形三边中点所连成的三角形，叫做原三角形的**中点三角形**。（P223）

自一点向已知三角形每边所在直线作垂线，则三垂足连成的三角形叫做该点对于已知三角形的**垂足三角形**。(P224)

如果某点的任何近旁都含有合条件的点，唯独它本身不合条件，那么这样的点叫做轨迹的**极限点**。当其恰处于轨迹的极端位置时，复有**临界点**之称。(P240)

设一动点至两定点的距离之比，等于两不等已知线段之比，则该点的轨迹是一圆。这圆叫做**阿波罗尼斯圆**，或简称**阿氏圆**。(P243)

若甲圆通过乙圆某直径的两端，便说甲圆**径割**乙圆。(P253)

设一点至不同的两定圆的中心的距离之比等于两圆半径之比，则该点的轨迹是与两定圆共轴的一圆。叫做两定圆的**相似圆**。(P253)

把已知线段AB内分或外分成**中外比**，是说求作内分点或外分点C，使合于$AC^2=AB\cdot BC$。(P292)

半圆形的**内接矩形**，是指后者有一边落在前者的直径上，其他两顶点落在弧上。(P358)

三角形的中点三角形的内切圆及旁切圆，又叫做原三角形的**斯皮克圆**。(P452)

垂心的等截共轭点，又称**垂心等截点**。(P453)

圆心不共线的三圆，它们两两的等幂轴共点，这点叫做三圆的**等幂心**。(P453)

有外接圆且对边的乘积彼此相等的四边形，称为**调和四边形**。(P460)

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝初等数学复习及研究　　平面几何题解　　（下册）
作者＝尚强编
页数＝３０９
ＳＳ号＝１１２１２５８１
出版日期＝１９８５年１１月第１版

目录

目录

（下册）
第五章　作图
习题二十五
习题二十六
习题二十七
习题二十八
习题二十九
习题三十
习题三十一
习题三十二
复习题五
总复习题
附录
名词索引